ナッシュ均衡計算の複雑さ

岡本 吉央*

2008 年 9 月 5 日

1　はじめに

ナッシュ均衡はゲーム理論における最重要概念の 1 つであり，任意の戦略型ゲームにはナッシュ均衡が存在する [18]．オペレーションズ・リサーチの研究では実際にナッシュ均衡の計算法 (アルゴリズム) に関する研究も行なわれ，不動点計算アルゴリズムの応用として議論されることが多い．また，2 人ゲームに対しては Lemke と Howson による離散的なピボット型アルゴリズム [15] も存在する．しかし，2 人ゲームに対してもナッシュ均衡が多項式時間で計算可能かどうか分かっていない．

通常，計算量理論におけるクラス P やクラス NP に関する事項は問題が多項式時間で計算可能かどうかの議論に役立つが，P や NP が対象とする問題は判定問題であり，つまり，入力に対してその出力が Yes か No で与えられるような問題である．しかし，ナッシュ均衡計算においては，具体的なゲームを与えたときにナッシュ均衡の存在性を考えてもその答えは常に Yes である．したがって，P や NP のような概念はナッシュ均衡計算問題の難しさを議論するためには適切でない．

Megiddo と Papadimitriou [17] は出力が常に Yes となってしまう判定問題に対する計算量理論を確立するために，TFP や TFNP というクラスを導入した．また Papadimitriou [19] はそのような問題に対して PPA，PPAD というクラスを導入し，ナッシュ均衡計算問題が PPAD に属することを証明した．彼は同じ論文で Brouwer の不動点定理が存在を保証する不動点の計算が PPAD において完全である (PPAD 完全) であることを証明した．他の様々な問題も PPAD 完全であることが示されていて，一方，PPAD 完全などの問題に対しても多項式時間アルゴリズムが知られていない．

最近，Chen と Deng [5] は 2 人ゲームのナッシュ均衡計算問題が PPAD 完全であることを証明した．これによって,「ナッシュ均衡計算は計算量理論的に難しい問題である」という認識がアルゴリズム理論研究者の間では常識となった．

本稿では，クラス PPAD がどういうものなのか，それに関連する概念とナッシュ均衡計算問題が PPAD 完全であることの解釈などをまとめる．

2　ナッシュ均衡の概念と Lemke-Howson アルゴリズム：ゲーム理論に関する事項

本稿で扱う対象は戦略型 2 人ゲームであり，これは双行列ゲーム (bimatrix game) とも呼ばれる．プレイヤーは 2 人なので，便宜上 (情報科学の流儀かもしれないが) Alice，Bob と呼ぶことにする．Alice，Bob のそれぞれに対して利得行列 (payoff matrix) と呼ばれる $m \times n$ 行列 A, B が割り当てられている．Alice の戦略は行列の行を選ぶことであり，Bob の戦略は列を選ぶことである．Alice が行 i を選び，Bob が列 j を選んだときに Alice の得る利得が a_{ij}，Bob の得る利得が b_{ij} である．言い換えると，$e_i \in \mathbb{R}^m$ を第 i 成分のみが 1 で他の成分が 0 であるような m 次元ベクトル，$f_j \in \mathbb{R}^n$ を第 j 成分のみが 1 で他の成分が 0 であるような n 次元ベクトルとしたとき，Alice の得る利得は $e_i^\top A f_j$ と表され，Bob の得る利得は $e_i^\top B f_j$ と表される．

実際，ゲーム理論でナッシュ均衡を考える際にはプレイヤーが戦略を確率的に選択できる枠組で議論する．すなわち，Alice の戦略は m 個の戦略上の確率分布として表現され，それは成分和を 1 とするベクトル $x = (x_1, \ldots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ で表される．同様に，Bob の戦略は成分和を 1 とするベクトル $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ で表される．このとき，Alice の得る利得の期待値は $x^\top Ay$ であり，Bob の得る利得

*東京工業大学 大学院情報理工学研究科

の期待値は $x^\top By$ である．

さて，Bob が $y \in \mathbb{R}^n$ という戦略を選んだときに Alice が自身の得る利得の期待値を最大にする戦略を y に対する最適反応戦略 (best response strategy) と呼ぶが，それを $x \in \mathbb{R}^m$ とすると，次の線形計画問題の最適解になる．

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & x^\top Ay \\ \text{制約} \quad & 1_m^\top x = 1, \\ & x \geq 0_m. \end{aligned}$$

ただし，$1_m, 0_m$ は全ての成分が $1, 0$ であるような m 次元ベクトルとする．相補スラック性定理から，x が y に対する最適反応戦略であることと，ある $u \in \mathbb{R}$ が存在して x と u が次の 4 条件を満たすことが同値となる：$1_m^\top x = 1$, $x \geq 0_m$, $u1_m \geq Ay$, $x^\top(u1_m - Ay) = 0$. ここで，u は先の線形計画問題に対する双対変数になっていることに注意する．同様に Bob の最適反応戦略を考える．Bob の戦略 y が Alice の戦略 x に対する最適反応戦略であることと，ある $v \in \mathbb{R}$ が存在して y と v が次の 4 条件を満たすことが同値となる：$1_n^\top y = 1$, $y \geq 0_n$, $v1_n \geq B^\top x$, $y^\top(v1_n - B^\top x) = 0$. ただし，$1_n, 0_n$ は全ての成分が $1, 0$ であるような n 次元ベクトルである．

双行列ゲームのナッシュ均衡 (Nash equilibrium) とは Alice の戦略 $x \in \mathbb{R}^m$ と Bob の戦略 $y \in \mathbb{R}^n$ の対 (x, y) で，x が y に対する最適反応戦略であり，y が x に対する最適反応戦略であるようなもののことである．先ほどの議論より，(x, y) がナッシュ均衡となるための必要十分条件は次の 3 条件を満たすことである．

1. $1_m^\top x = 1$, $x \geq 0_m$, $v1_n \geq B^\top x$.
2. $1_n^\top y = 1$, $y \geq 0_n$, $u1_m \geq Ay$.
3. $x^\top(u1_m - Ay) = 0$, $y^\top(v1_n - B^\top x) = 0$.

Lemke-Howson アルゴリズムは第 1，第 2 の制約を満たす (x, y) と u, v を更新することで第 3 の制約も満たすようにするアルゴリズムであり，必ず停止することが知られている．実際どのような動きをするのか説明する．

上の第 1 の条件は x と v のみに関する条件であり，それは x と v を並べたベクトル $\binom{x}{v} \in \mathbb{R}^{m+1}$ が

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \mid 1_m^\top x = 1, x \geq 0_m, v1_n \geq B^\top x \right\}$$

という凸多面体の点であることを表している．同様に第 2 の条件は y の u のみに関する条件であり，それは $\binom{y}{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ が

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \mid 1_n^\top y = 1, y \geq 0_n, u1_m \geq Ay \right\}$$

という凸多面体の点であることを表している．第 3 の条件は相補性条件であり，x の添字集合 (すなわち，A, B の行の添字集合) が I で，y の添字集合 (すなわち，A, B の列の添字集合) が J であるとすれば，第 1，第 2 の条件から $x \geq 0_m$, $u1_m - Ay \geq 0_m$ が成り立つので任意の $i \in I$ に対して $x_i = 0$ または $(u1_m - Ay)_i = 0$ が成り立たねばならず，同様に任意の $j \in J$ に対して $y_j = 0$ または $(v1_n - B^\top x)_j = 0$ が成り立たねばならない．

いま，多面体 P にも Q にも縮退がないと仮定する．Lemke-Howson アルゴリズムでは，まず I の要素 i を任意に 1 つ選び，全ての $k \in I \setminus \{i\}$ に対して $x_k^0 = 0$ を満たし，かつ $x_i^0 > 0$ を満たすような P の端点 $\binom{x^0}{v^0}$ を見つける．非縮退仮定より，$(v^0 1_n - B^\top x^0)_j = 0$ を満たす唯一の $j \in J$ が存在する．これに呼応して，全ての $k \in J \setminus \{j\}$ に対して $y_k^0 = 0$ を満たし，かつ $y_j^0 > 0$ を満たすような Q の端点 $\binom{y^0}{u^0}$ を見つける．再び非縮退仮定より，$(u^0 1_m - Ay^0)_{i'} = 0$ を満たす唯一の $i' \in I$ が存在する．

ここで，$i = i'$ が成り立つならば (x^0, y^0) は上記 3 条件を満たし，すなわち，これはナッシュ均衡になり，アルゴリズムは停止する．そうでなければ $i \neq i'$ となっているが，その場合は $x_{i'}^0 = 0$ かつ $(u^0 1_m - Ay^0)_{i'} = 0$ が成立している．すなわち，$\binom{x^0}{v^0} \in P$ が等号で満たす不等式の添字集合と $\binom{y^0}{u^0} \in Q$ が等号で満たす不等式の添字集合に共通する要素が 1 つだけ存在する．一般の状況では以下のようになっている．アルゴリズムでは P の端点 $\binom{x}{v}$ と Q の端点 $\binom{y}{u}$ を常に保持するが，$\binom{x}{v}$ が等号で満たす不等式の添字集合と $\binom{y}{u}$ が等号で満たす不等式の添字集合に共通する要素が常に 1 個以下であるようにする．これが 0 個ならば，ナッシュ均衡が得られていることになる．そうでなければ，その添字集合の共有を解消するように P の端点か Q の端点を (交互に) ピボット操作によって移動させる．このようにナッシュ均衡を探索するのが Lemke-Howson アルゴリズムの概略である．

Lemke-Howson アルゴリズムの重要な点は (P と Q に縮退がない場合) 一旦アルゴリズムを開始する

(つまり，任意に i を選ぶ) と，それ以降の動きには任意性が全くなく自動的にピボット操作の繰り返しが定まることである．また，Lemke-Howson アルゴリズムが多項式時間アルゴリズムでないこと [22] やまた，ナッシュ均衡の数が戦略の総数に関して指数関数的に多い双行列ゲームの例 [26] も知られている．このような特徴が次に述べる計算量クラス PPAD と相性がよい．

3 PPAD 完全性：計算量理論に関する事項

普通，計算量理論が対象とする問題は判定問題 (decision problem) と呼ばれるもので，これは入力に対して答えが Yes か No で与えられるものである．例えば，線形計画法の実行可能性判定問題では，入力として線形不等式系が与えられて，その不等式系に解があれば Yes，そうでなければ No を答えとする問題である．

それに対して探索問題 (search problem) と呼ばれるものは入力に対する答えが Yes のときには，そうであることを証明する解を見つけて出力することまで要求する．例えば，線形計画法の実行可能性判定問題に対してその探索問題バージョンを考えると，入力として与えられた線形不等式系に解があれば，その解も出力しなければならない．

普通の計算量理論では多項式時間で解ける判定問題全体のクラスを P と呼び，非決定性多項式時間で解ける判定問題全体のクラスを NP と呼ぶ．クラス NP は多項式時間で検査できる解を持つ判定問題全体のクラスと等しいことがよく知られている．これに対応して，多項式時間で解ける探索問題全体のクラスを FP と呼び，多項式時間で解であることを検査できる探索問題全体のクラスを FNP と呼ぶ．ちなみに「F」は function の意味で，探索問題が関数問題とも呼ばれることに由来する．

我々の考えている双行列ゲームのナッシュ均衡について，入力は利得行列 A, B であるが，そのときにナッシュ均衡が存在するかどうかという判定問題の答えは常に Yes である．したがって，そのような判定問題はクラス P に属する．そのため，ナッシュ均衡自身を解として出力する探索問題を考えなければ意味がない．答えが必ず Yes になる判定問題に付随する探索問題を全域探索問題と呼び，多項式時間で解ける全域探索問題全体のクラスを TFP，多項式時間で解であることを検査できる全域探索問題全体のクラスを TFNP と呼ぶ．ちなみに「T」は全域を意味する total に由来する．

クラス間の基本的な関係を述べると，FP $\subseteq$ FNP，TFP $\subseteq$ TFNP，TFP $\subseteq$ FP，TFNP $\subseteq$ FNP が分かる．これらの包含関係が真の包含関係かどうか (つまり，等号が成り立つかどうか) は未解決問題であるが，FP $=$ FNP が成り立つことと P $=$ NP が成り立つことは同値である．

さて，双行列ゲームのナッシュ均衡計算問題であるが，双行列ゲームのナッシュ均衡 (x, y) が実際に与えられたとき，それが本当にナッシュ均衡であるかどうか検査するためには前節で述べた 3 条件を満たすかどうか調べればよい．これは多項式時間で可能なので，ナッシュ均衡計算問題は TFNP に属することが分かる．では，それが TFP に属するのか，それとも，TFNP の中でも難しい問題になるのだろうか？これを議論するためには，NP 完全性に似た「TFNP 完全性」という概念が必要になる．しかし，TFNP 完全問題は存在しないだろうと考えられている (詳しくは Papadimitriou [19] を参照)．そのため TFP と TFNP を用いてナッシュ均衡計算問題の複雑さを議論することは困難である．

それを克服するために，Papadimitriou [19] は TFNP の部分クラスで完全問題を持つようなものを導入した．後にも述べるが双行列ゲームのナッシュ均衡計算問題は彼の導入したクラスの 1 つである PPAD に属し，さらに，Chen と Deng [5] はそれが PPAD 完全問題であることを証明した．

Papadimitriou [19] のアイディアは，TFNP に属する問題がなぜ TFNP に属するのかという証明方法に基づいて問題を分類することである．例えば，「任意の有限有向グラフで閉路を持たないものには必ずシンク (出辺の接続しない頂点) が存在する」という原理に基づいて TFNP に属することが証明できる問題はいくつもあり，これら全体を Johnson, Papadimitriou, Yannakakis [12] は PLS という名前のクラスとして定義した (PLS は polynomial local search の略だそうだ)．これは局所探索の原理に基づいて局所最適解を計算する問題を想定して導入されたクラスであり，完全問題を持つ．例えば，巡回セールスマン問題に対する kOpt 近傍に関する局所最適解を計算する問題は (十分大きな定数 k に対して) PLS 完全である [14]．PLS 完全性については Yannakakis の解説 [25]

が詳しいが，ここでの本筋から逸脱するのでこれ以上は言及しない．

双行列ゲームのナッシュ均衡計算問題が TFNP に属することの証明は Lemke-Howson アルゴリズムを通じて行なうことができる．Lemke-Howson アルゴリズムはある種の有向グラフ上の探索になっているが，その動きは「各頂点の入次数も出次数も高々1 であるような有限有向グラフに，出次数が 1 の頂点があるならば，入次数が 1 の頂点も存在する」という原理に基づいている．この原理に基づいて TFNP への所属性が証明される問題全体のクラスを PPAD と呼ぶ (PPAD は polynomial parity argument in a directed graph の略だそうだ)．簡単に分かる包含関係は TFP $\subseteq$ PPAD $\subseteq$ TFNP であり，この包含関係が等号で成り立つかどうかは未解決問題である．クラス PPAD に留まらず Papadimitriou [19] が定義した TFNP の部分クラスを Beame, Cook, Edmonds, Impagliazzo, Pitassi [1] と Buresh-Oppenheim, Morioka [3] は相対化の観点から更に考察している．

Papadimitriou [19] はクラス PPAD が完全問題を持つことを証明している．実際，彼は数々の不動点定理が存在を保証する不動点の計算問題が PPAD 完全であることを証明した．そして，双行列ゲームのナッシュ均衡計算問題が PPAD 完全かどうかを (暗に) 未解決問題として残した．この問題は Papadimitriou による 2001 年の解説 [20] で再び人の目に触れることとなったが，この解説論文がアルゴリズム理論研究者の多くをゲーム理論に引き込んだことは間違いなく，それによってアルゴリズム理論とゲーム理論の豊かな融合が醸成された．しかし，その一方でゲーム理論の歴史を無視したアルゴリズム的ゲーム理論研究が多く出てきたことも否めず，個人的にはアルゴリズム理論がゲーム理論の土壌を荒らしているように見える．既存研究に敬意を払う研究態度がどの分野でも必要である．

また脱線したので本論に戻る．

この未解決問題に対して進展があったのは 2005 年で，Daskalakis, Goldberg, Papadimitriou [8] が 4 人ゲームのナッシュ均衡計算問題が PPAD 完全であることを証明した (会議録論文として出版されたのは 2006 年である)．この結果を皮切りとして，3 人ゲームのナッシュ均衡計算問題の PPAD 完全性を Chen, Deng [4] と Daskalakis, Papadimitriou [11] が独立にすぐさま証明した．そして，2 人ゲーム (すなわち双行列ゲーム) のナッシュ均衡計算問題の PPAD 完全性を Chen と Deng [5] がすぐさま証明したのである (会議録論文として出版されたのは 2006 年である)．

私自身は 2001 年頃 Papadimitriou [19] の未解決問題を気にしつつも他の問題に取り組んでおり，1994 年以来の未解決問題でそれまで何も進展がなかったこの問題がすぐに解かれることはないと思い，後で時間の出来たときに少しずつ考えて行こうと思っていた．しかし，2005 年に ECCC というプレプリントサーバに PPAD 完全性を示す論文 [8, 4, 11, 5] がおよそ 1ヵ月の間に続々と登場し，論文を印刷して読む前に次の論文が提出されてくるという状況が続き，やる気を失ってしまったという思い出がある．あっという間の出来事であった．

また脱線したので話を戻す．

双行列ゲームのナッシュ均衡計算が PPAD 完全であるという事実はどのような意味を持つのだろうか? 知られている包含関係 TFP $\subseteq$ PPAD の等号が成り立つかどうか未解決であり，TFP = PPAD となる可能性もある．その等号が成り立てばナッシュ均衡計算問題が多項式時間で解けることになる．しかし，今のところこの問題を多項式時間で解くアルゴリズムは知られていないし，どの PPAD 完全問題に対してもそれを多項式時間で解くアルゴリズムは知られていない．これが PPAD 完全問題は難しい問題であるだろうという根拠の 1 つである．

4　より最近の進展

ナッシュ均衡を計算することが難しいと分かったので，せめてナッシュ均衡を近似することぐらいは高速にできたらと願いたい．ここで，戦略の対 (x, y) が ε 近似ナッシュ均衡であるとは，x が y に対する ε 近似最適反応戦略であり，y が x に対する ε 近似最適反応戦略であることである．すなわち，ε は近似精度を表していて，0 に近いほどナッシュ均衡に近い戦略対になっている．

しかしその願いもむなしく，Chen, Deng, Teng [7] はナッシュ均衡を任意の精度 ε で近似することすら PPAD 完全であることを示した．それでも Lipton, Markakis, Mehta [16] の結果によれば ε 近似ナッシュ均衡を準指数時間 (subexponential time) で計算することが可能である．近似精度を緩めた場合に関して，Daskalakis, Mehta, Papadimitriou [9] の多項式時間

0.5 近似アルゴリズム (ただし，各プレイヤーの純粋戦略数が 2 つの場合)，Kontogiannis, Panagopoulou, Spirakis [13] の (任意の双行列ゲームに対する) 多項式時間 0.75 近似アルゴリズムが 2006 年に提案された．それに続いて，2007 年には Daskalakis, Mehta, Papadimitriou [10] により多項式時間 0.38 近似アルゴリズム，Bosse, Byrka, Markakis [2] により多項式時間 0.36392 近似アルゴリズム，Tsaknakis, Spirakis [24] により多項式時間 0.3393 近似アルゴリズムが提案された．これが現在知られている中で最も (最悪時の) 近似精度がよい多項式時間アルゴリズムである．近似精度 ε が定数であるときにナッシュ均衡の ε 近似計算が難しいかどうかは分かっていない．

5　勉強するには

この原稿は主に以下の文献を参考にした．ナッシュ均衡計算の PPAD 完全性については Papadimitriou の解説 [21] と Chen, Deng の解説 [6] がある．Lemke-Howson アルゴリズムの説明は von Stengel [27] が (個人的には) 分かりやすい．最後の節で述べたナッシュ均衡の近似については Spirakis [23] の解説がある．興味を持たれた方はこれらの記事を参考にして更に勉強していただきたい．

参考文献

[1] P. Beame, S. Cook, J. Edmonds, R. Impagliazzo, T. Pitassi. The relative complexity of NP search problems. Journal of Computer and System Sciences **57** (1998) 3–19.

[2] H. Bosse, J. Byrka, E. Markakis. New algorithms for approximate Nash equilibria in bimatrix games. Proc. 3rd WINE (2007) 17–29.

[3] J. Buresh-Oppenheim, T. Morioka. Relativized NP search problems and propositional proof systems. Proc. 19th CCC (2004) 54–67.

[4] X. Chen, X. Deng. 3-Nash is PPAD-complete. ECCC TR05-134, 2005.

[5] X. Chen, X. Deng. Settling the complexity of two-player Nash equilibrium. Proc. 47th FOCS (2006) 261–272.

[6] X. Chen, X. Deng. Recent development in computational complexity characterization of Nash equilibrium. Computer Science Review **1** (2007) 88–99.

[7] X. Chen, X. Deng, S.-H. Teng. Computing Nash equilibria: approximation and smoothed complexity. Proc. 47th FOCS (2006) 603–612.

[8] C. Daskalakis, P.W. Goldberg, C.H. Papadimitriou. The complexity of computing a Nash equilibrium. Proc. 38th STOC (2006) 71–78.

[9] C. Daskalakis, A. Mehta, C. Papadimitriou. A note on approximate Nash equilibria. Proc. 2nd WINE (2006) 297–306.

[10] C. Daskalakis, A. Mehta, C. Papadimitriou. Progress in approximate Nash equilibria. Proc. 8th EC (2007) 355–358.

[11] C. Daskalakis, C.H. Papadimitriou. Three-player games are hard. ECCC TR05-139, 2005.

[12] D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, M. Yannakakis. How easy is local search? Journal of Computer and System Sciences **37** (1988) 79–100.

[13] S.C. Kontogiannis, P.N. Panagopoulou, P.G. Spirakis. Polynomial algorithms for approximating Nash equilibria of bimatrix games. Proc. 2nd WINE (2006) 286–296.

[14] M.W. Krentel. Structure in locally optimal solutions. Proc. 30th FOCS (1989) 216–222.

[15] C.E. Lemke, J.T. Howson, Jr. Equilibrium points in bimatrix games. Journal of SIAM **12** (1964) 413–423.

[16] R.J. Lipton, E. Markakis, A. Mehta. Playing large games using simple strategies. Proc. 4th EC (2004) 36–41.

[17] N. Megiddo, C.H. Papadimitriou. A note on total functions, existence theorems, and computational complexity. Theoretical Computer Science **81** (1991) 317–324.

[18] J. Nash. Noncooperative games. Annals of Mathematics **54** (1951) 289–295.

[19] C.H. Papadimitriou. On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. Journal of Computer and System Sciences **48** (1994) 498–532.

[20] C.H. Papadimitriou. Algorithms, games, and the internet. Proc. 33rd STOC (2001) 749–753.

[21] C.H. Papadimitriou. The complexity of finding Nash equilibria. In: N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. Vazirani, eds. *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007, Chapter 2, pp. 29–51.

[22] R. Savani, B. von Stengel. Hard-to-solve bimatrix games. Econometrica **74** (2006) 397–429. Erratum available at the author's webpage.

[23] P. Spirakis. Approximate equilibria for strategic two person games. Proc. 1st SAGT (2008) 5–21.

[24] H. Tsaknakis, P. Spirakis. An optimization approach for approximate Nash equilibria. Proc. 3rd WINE (2007) 42–56.

[25] M. Yannakakis. Computational Complexity. In: E. Aarts, J.K. Lenstra eds., *Local Search in Combinatorial Optimization*, Princeton University Press, 2003 (originally published by John Wiley & Sons, 1997), pp. 19–55.

[26] B. von Stengel. New maximal numbers of equilibria in bimatrix games. Discrete & Computational Geometry **21** (1999) 557–568.

[27] B. von Stengel. Computing equilibria for two-person games. In: R.J. Aumann, S. Hart, eds., *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 3, Elsevier, 2002, pp. 1723–1759.