無秩序の代償 (price of anarchy) の理論入門

京都大学 大学院 情報学研究科
伊藤大雄

利己的ルーティングとは

左の道は 30分、右の道は 50分かかります。
全体の平均遅延を最小にするために、
あなたは右へ行ってください。

・ あなたはどちらへ行きますか？

利己的ルーティングとは

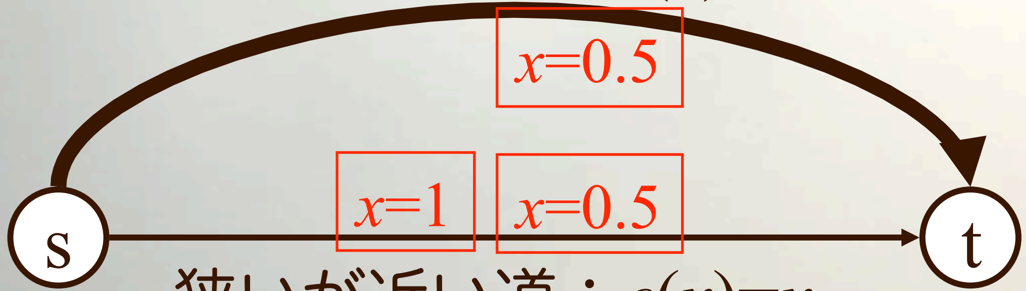
- 前提：皆、自分の利益を第一に考えて行動する。
- そのとき、全体としての利益はどうなるか？

- 「無秩序の代償 (price of anarchy)」の理論

ピグーの逆理
(Pigou's paradox)

- $s \to t$ に総量1の交通があるとする。
- $c(x)$: 交通量がxの時に、その道を通るのに要する時間

広いが遠い道：$c(x)=1$



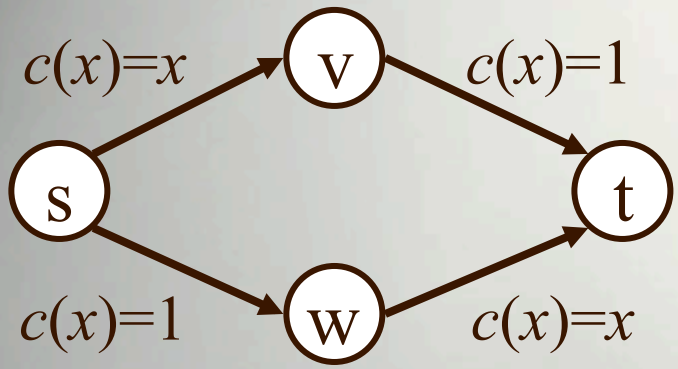
狭いが近い道：$c(x)=x$

- 利己的ルーティング：全員が下の道。→時間1。
- 最適ルーティング：上に0.5、下に0.5。
  →平均時間 (0.5+1)/2=0.75。

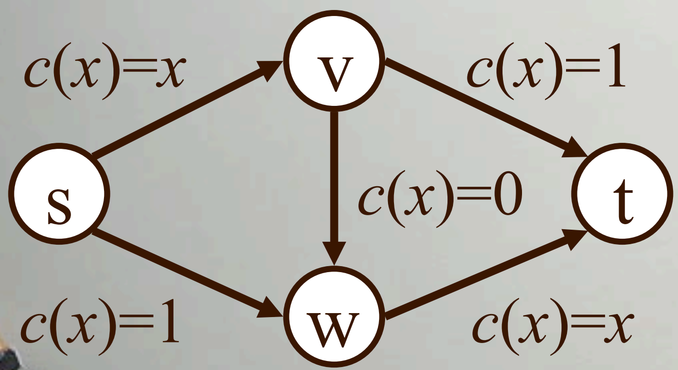
ピグーの逆理の教訓

- 利己的RT：全員が下の道。→時間1。
- 最適RT：上に0.5、下に0.5。→平均時間(0.5+1)/2=0.75。
- 利己的な振る舞いは、全体の利益を損なうのみならず、当人の利益にすらならない可能性が有る。

ブレースの逆理
(Braess's paradox)



- 利己的RTも最適RTも、上下に0.5ずつ→平均時間1.5

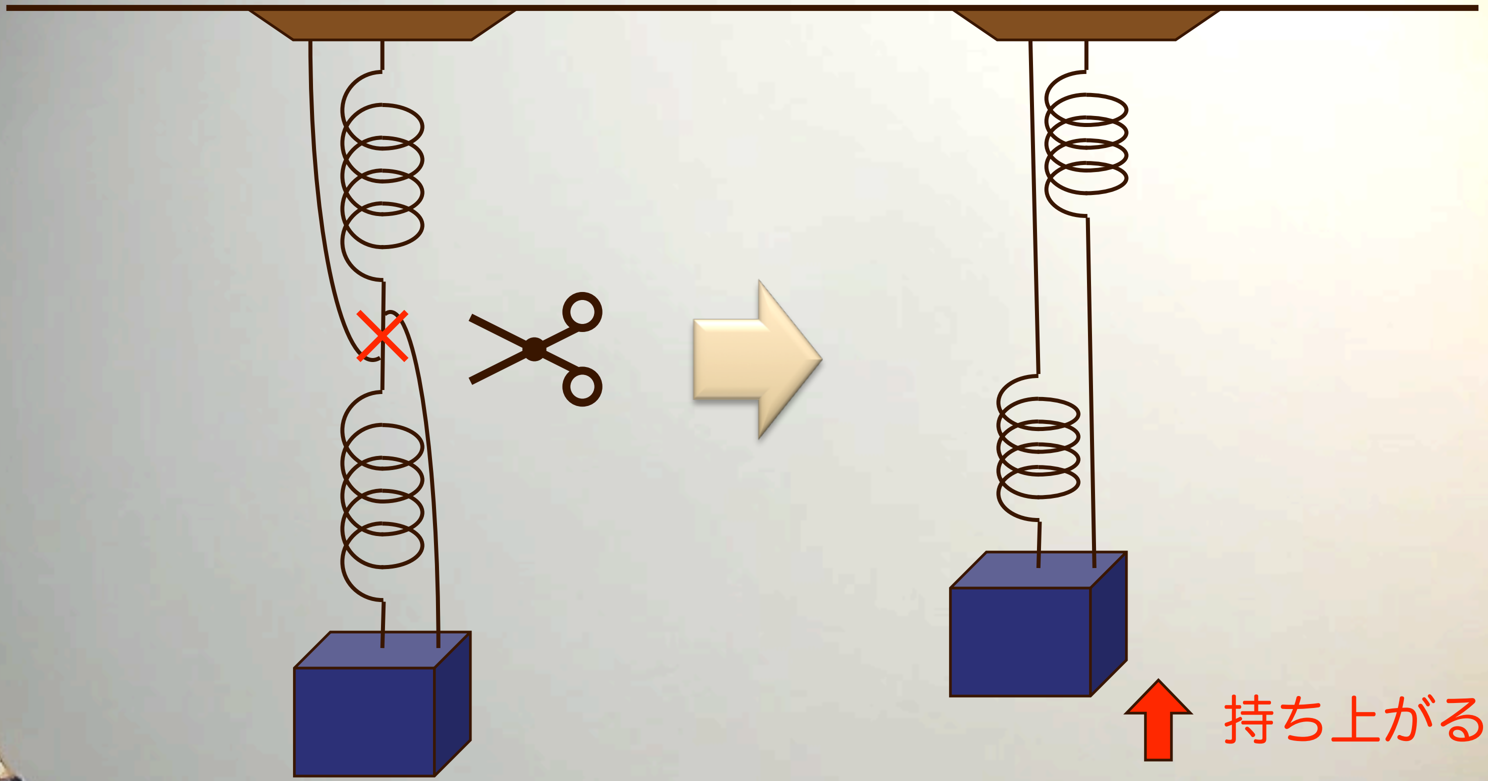


- 利己的RT:
  「s→v→w→t」に全員。
  →平均時間2

ブレースの逆理の教訓

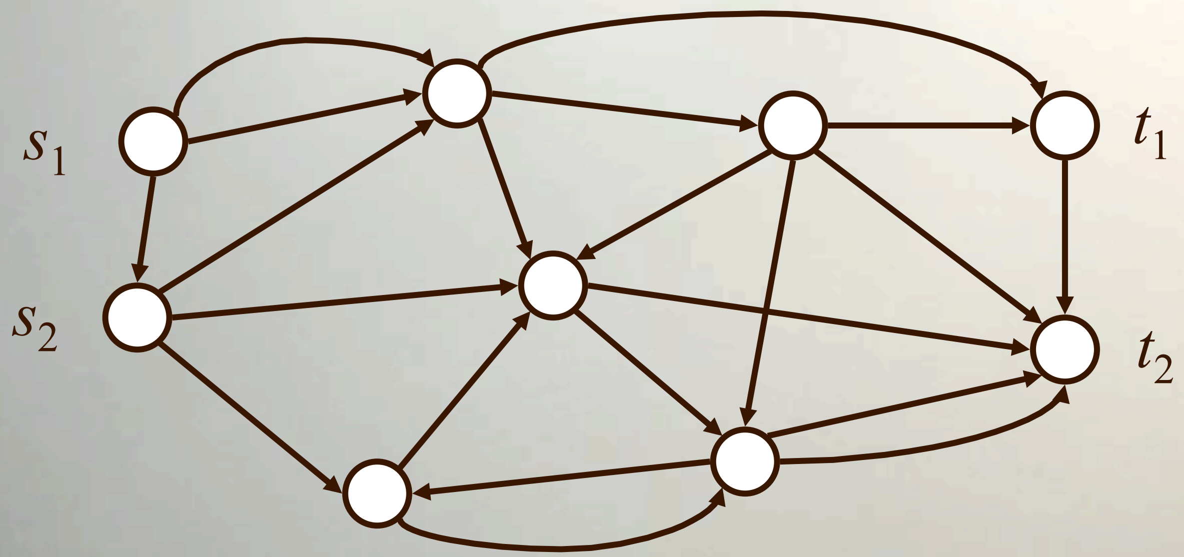
- 利己的振る舞いの結果、全員が最適行動より真に悪化することもある。
- 利己的振る舞いに対しては、ネットワークを改善しても、かえって性能を悪化させ、しかも、各々の利益も真に悪化していることがある。

ブレースの逆理と類似の物理現象



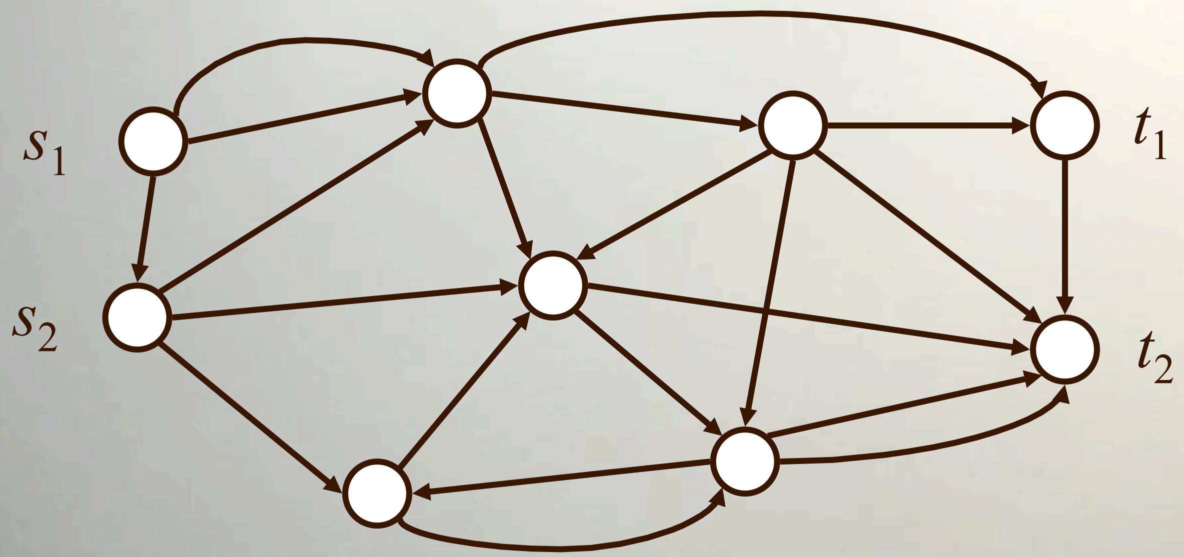
モデル

- 交通網：有向グラフG=(V,E),
  - V: 節点集合、E: (有向)枝集合（多重枝可）
  - $\{s_i, t_i\}$ ($i \in \{1,...,k\}$): 流出点-流入点の組（k=1のときは単品種、k>1のとき多品種）



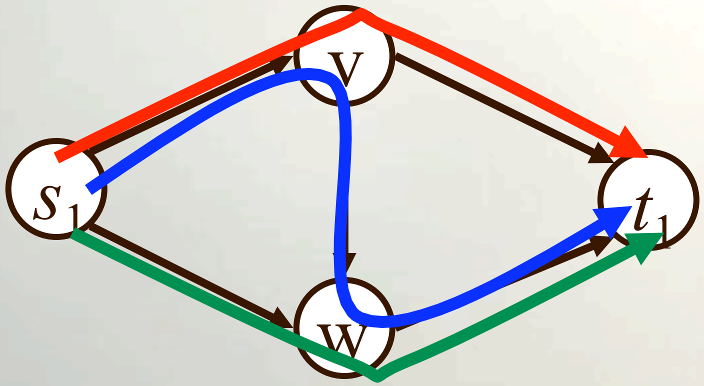
モデル

- Π_i: 品種iの経路(path)の集合
- $\Pi = \cup_i \Pi_i$



パス集合の例

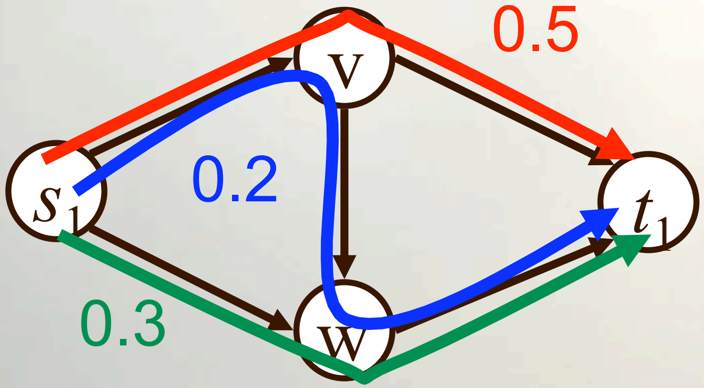
- Π_i: 品種iの経路(path)の集合



$$\Pi_1=\{<s_1,v,t_1>, <s_1,v,w,t_1>, <s_1,w,t_1>,\}$$

フロー

- f: フロー（交通流）
- f_P: パス$P \in \Pi$を流れるフローの量

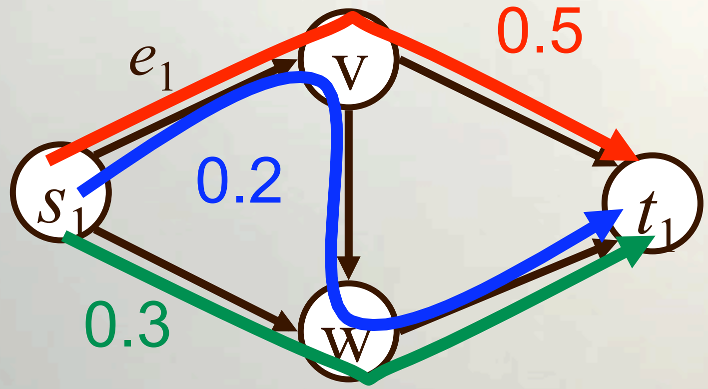


$$\Pi_1 = \{P_1 = <s_1, v, t_1>,$$
$$P_2 = <s_1, v, w, t_1>,$$
$$P_3 = <s_1, w, t_1>,\}$$

$$f_{P1} = 0.5$$
$$f_{P2} = 0.2$$
$$f_{P3} = 0.3$$

フロー

- $\Sigma_{P\in\Pi i}\ f_P = r_i$: 品種$i$の総流量
- $f_e=\Sigma_{e\in P\in\Pi}\ f_P$: 枝$e\in E$を流れるフローの量



$r_1=1$ $f_{e1}=0.5+0.2=0.7$

フロー

- $c_e(x)$: 枝$e\in E$の費用関数（フローfに対し、$c_e(f_e)$がeの費用となる）
- $c_e(x)$は、非負・連続・非減少とする。
- $c_P(f)=\Sigma_{e\in P}\, c_e(f_e)$：パス$P\in\Pi$の費用
- $C(f)=\Sigma_{P\in\Pi}\, c_P(f)\, f_P$：NWの総費用
- （$C(f)=\Sigma_{e\in E}\, c_e(f_e)\, f_e$とも書ける。）
- ネットワーク(G,r,c)に対し$C(f)$を最小化するfを最適フローと言う。

ナッシュフロー (Nash flow)

- フローfは、任意の品種$i \in \{1, ..., k\}$と、$f_{P1}>0$である任意の$P_1 \in \Pi_i$、任意の$P_2 \in \Pi_i$、任意の実数$0<\delta \leq f_P$に対し、次の条件が成立するとき、ナッシュ均衡である、あるいはナッシュフローと言う。
- 条件：$c_{P_1}(f) \leq c_{P_2}(\tilde{f})$ 、ただし

$$\tilde{f}_P = \begin{cases} f_P - \delta & \text{if } P = P_1 \\ f_P + \delta & \text{if } P = P_2 \\ f_P & \text{otherwise} \end{cases}$$

P_1のフローをちょっとだけP_2に移す。

ナッシュフロー (Nash flow)

- ナッシュフローの条件において$\delta \to 0$とすると、費用関数の単調性と連続性より以下を得る。

命題 1: フローfがネットワーク(G,r,c)のナッシュフローであるならば、かつその時に限り、任意の品種$i \in \{1, ..., k\}$と、$f_{P1}>0$である任意の$P_1 \in \Pi_i$、任意の$P_2 \in \Pi_i$、に対し次式が成立する。

$$c_{P_1}(f) \leq c_{P_2}(f)$$

ナッシュフロー (Nash flow)

- つまり、「ナッシュフローは最小費用パスのみを通る」ということである。よって、
- **命題 2:** フローfがネットワーク(G,r,c)のナッシュフローであるならば、任意の品種$i \in \{1, ..., k\}$に対し、fのすべてのs_i-t_i流は等しい費用値（$c_i(f)$とする）を持つ。
- よってナッシュフローの費用総量は以下のように書くことが出来る。

$$C(f) = \sum_{i=1}^{k} c_i(f) r_i$$

ナッシュフローの基本性質

- 命題３（存在性）：任意のネットワーク (G,r,c)に対して、ナッシュフローが存在する。

- 命題４（目的関数値の唯一性）：任意のネットワーク(G,r,c)の二つのナッシュフローfとf'に対し、$C(f)=C(f')$が成立する。

無秩序の代償 (price of anarchy)

定義: ネットワーク(G,r,c)の最適フローをf^*、ナッシュフローをfとするとき、(G,r,c)の無秩序の代償(price of anarchy)は

$$\rho(G,r,c) = \frac{C(f)}{C(f^*)} \ (\geq 1)$$

と定義される。ネットワークの集合Nの無秩序の代償(price of anarchy)は

$$\rho(\mathrm{N}) = \sup_{(G,r,c)\in N} \rho(G,r,c)$$

で定義される。

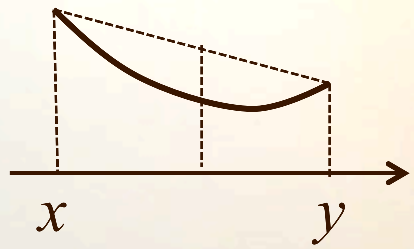
最適フローの性質

- 最適フローは次の非線形最適化問題(NLP)の解である。

$$
\begin{aligned}
&\text{Min} \quad \sum_{e \in E} h_e(f_e) \\
&\text{subject to :} \quad \sum_{P \in \Pi_i} f_P = r_i \qquad \forall i \in \{1,\ldots,k\} \\
&\qquad f_e = \sum_{P \in \Pi : e \in P} f_P \qquad \forall e \in E \\
&\qquad f_P \geq 0 \qquad \forall P \in \Pi \\
&(\text{where} \quad h_e(f_e) = c_e(f_e) f_e).
\end{aligned}
$$

凸性

- 領域$S(\subseteq \mathbf{R}^n)$は、“$x,y\in S$,” $0\le\lambda\le 1$に対し$\lambda x+(1-\lambda y)\in S$となる時凸(convex)であると言う（$\mathbf{R}^n$はn次元実数空間）。
- 凸領域S上の関数$h: S\to\mathbf{R}$は、“$x,y\in S$,” $0\le\lambda\le 1$に対し$h(\lambda x+(1-\lambda y))\le\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$であるとき凸であると言う。



- 関数c: $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$は$xc(x)$が凸であるとき、準凸(semiconvex)であると言う。
- これより費用関数は準凸と仮定する。

命題 5: NLPにおいて全てのh_eが凸かつ連続微分可能とする。NLPの実行可能フローf^*について、以下の４条件は同値である。

(a) f^*は最適フローである。

(b) $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $f_{P1}>0$である$\forall P_1 \in \Pi_i$, $\forall P_2 \in \Pi_i$に対し、

$$h'_{P_1}(f^*) \leq h'_{P_2}(f^*).$$

命題1と同じ形

(c) 任意の実行可能フローfに対し、

$$\sum_{P \in \Pi} h'_{P_1}(f^*) f_P^* \leq \sum_{P \in \Pi} h'_{P_1}(f^*) f_P \ .$$

(d) 任意の実行可能フローfに対し、

$$\sum_{e \in E} h'_e(f_e^*) f_e^* \leq \sum_{e \in E} h'_e(f_e^*) f_e \ .$$

ナッシュフローと最適フローの関係

定義: 微分可能な費用関数cに対し、

$$c^* = \frac{d}{dx}\left(x \cdot c(x)\right)$$

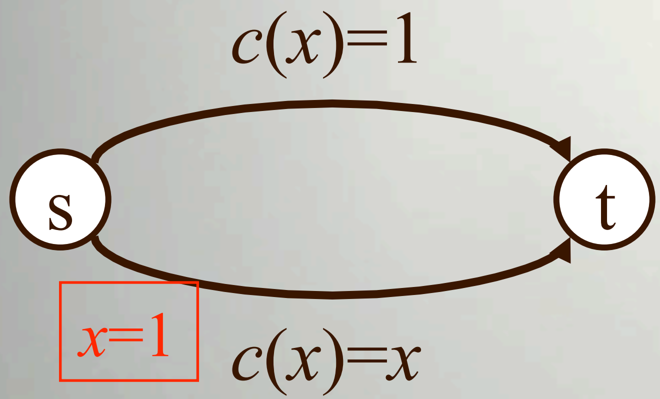
を限界費用関数(marginal cost function)と言う。

・ 命題1と5より以下が成立する。

定理6: (G,r,c)に対し以下の二つは同値である。

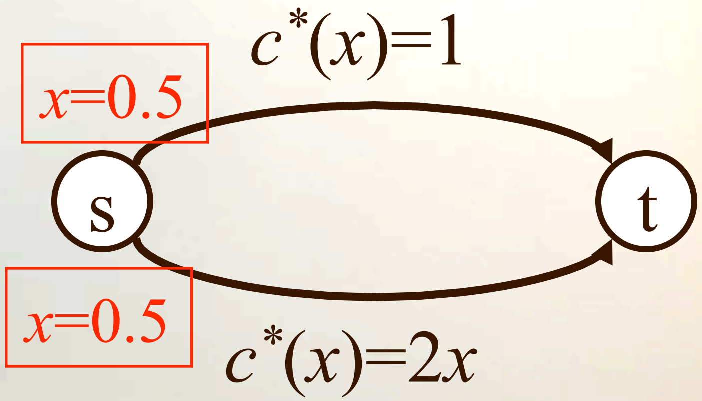
- f は(G,r,c)の最適フロー。
- f は(G,r,c^*)のナッシュフロー。

例：ピグーの例題



費用関数

ナッシュフロー

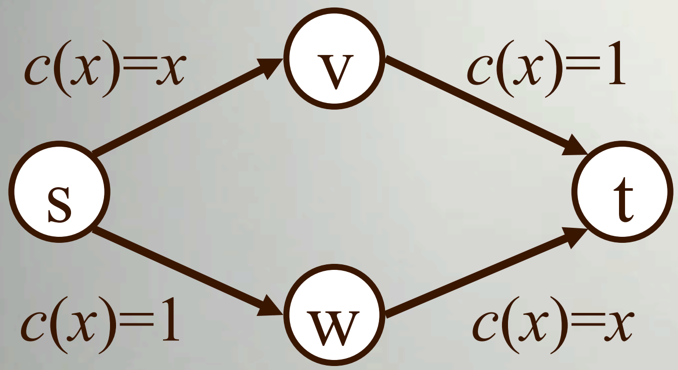


限界費用関数

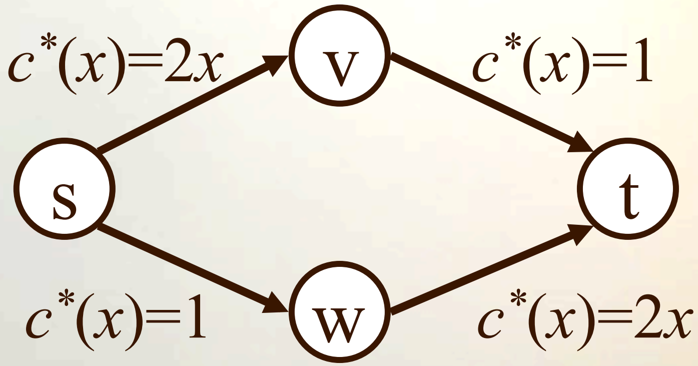
c^*のナッシュフロー

$=c$の最適フロー

例：ブレースの例題（枝付与前）

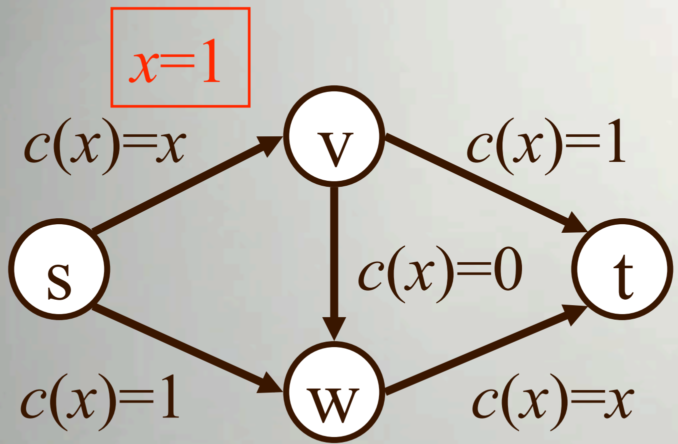


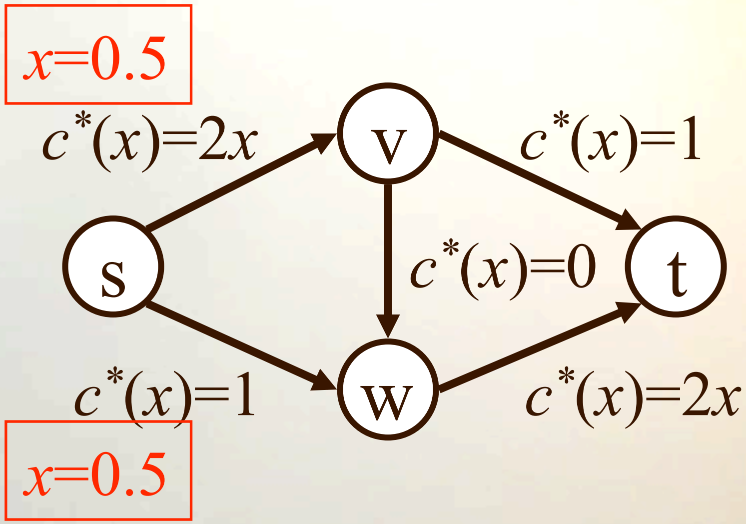
費用関数



限界費用関数

例：ブレースの例題（枝付与後）





費用関数

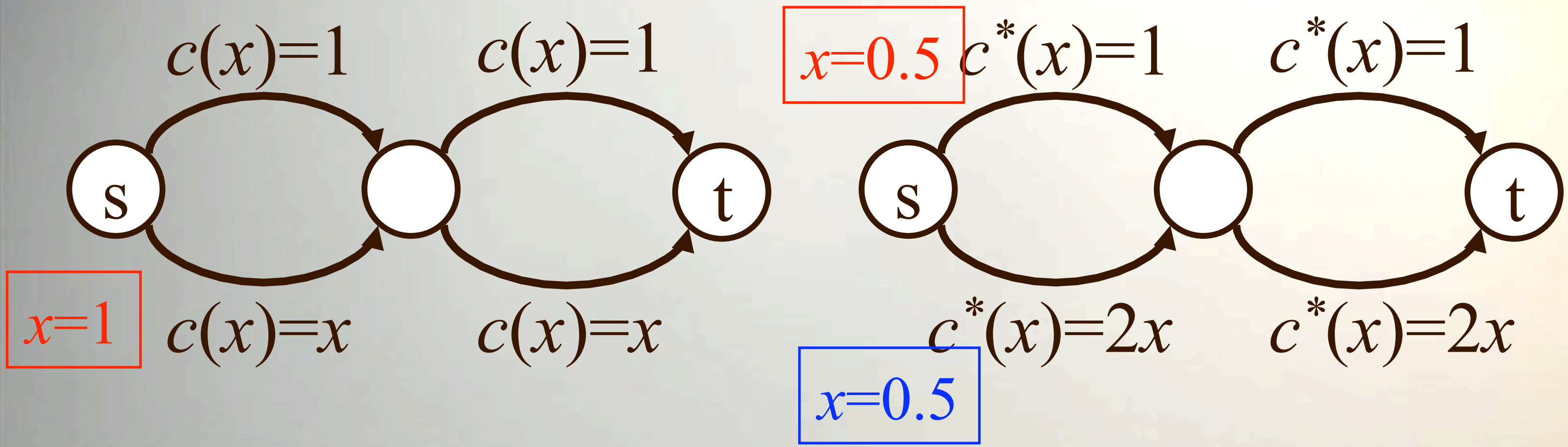
ナッシュフロー

限界費用関数

c^*のナッシュフロー

$=c$の最適フロー

枝の削除でナッシュフローを改善できない例



費用関数

ナッシュフロー

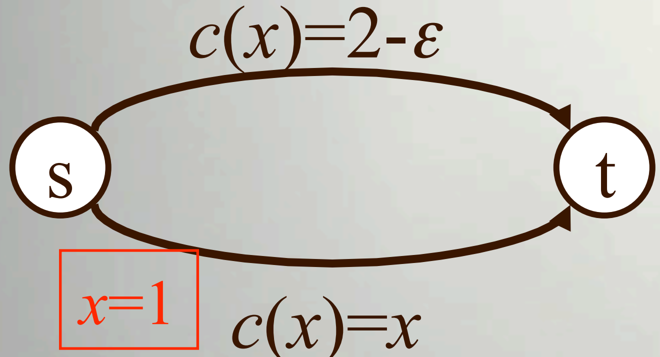
限界費用関数

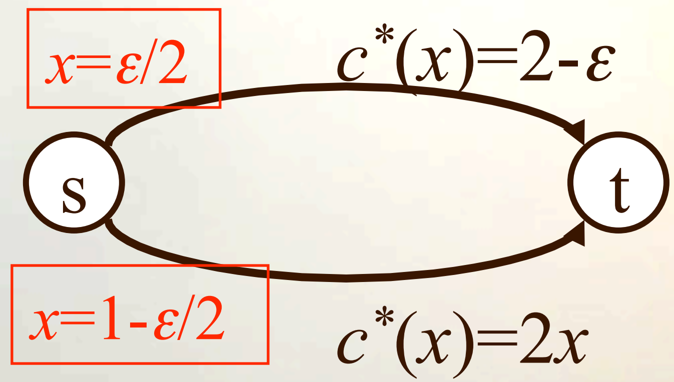
c^*のナッシュフロー

$=c$の最適フロー

犠牲を出す最適解

- 最適フローにおいて、一部はナッシュフローより悪化している例もある。

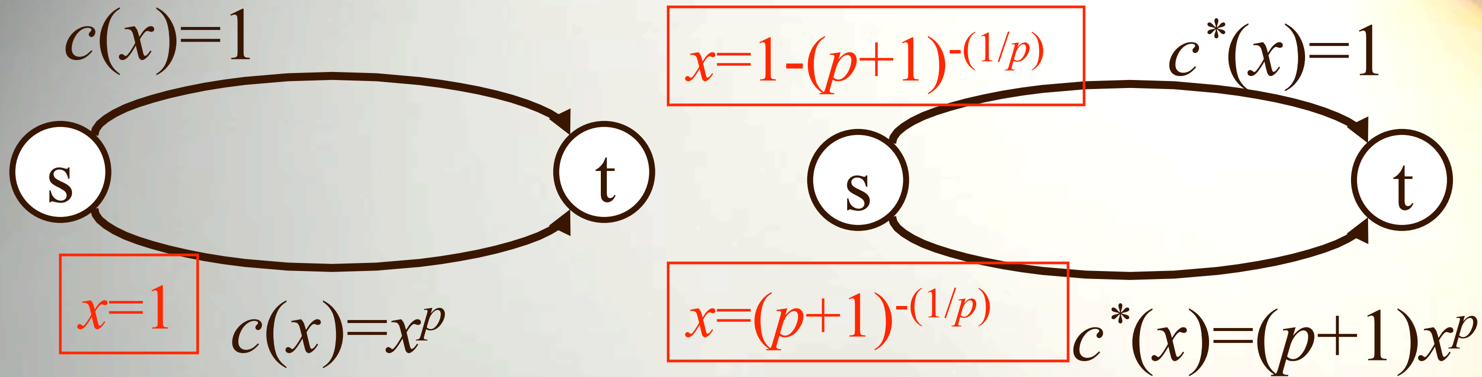




$$C(f^*) = \left\{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\} + \left\{\frac{\varepsilon}{2}(2-\varepsilon)\right\} = 1-\frac{\varepsilon^2}{4}$$

しかし、上の道の費用は2-ε

非線形費用の場合



- $(p+1)x^p=1$を解いて$x=(p+1)^{-(1/p)}$。したがって、最適フローf^*は下の道に$(p+1)^{-(1/p)}$流す。

$$C(f^*) = \left\{1-(p+1)^{-\frac{1}{p}}\right\} + \left\{(p+1)^{-\frac{1}{p}} \cdot \left((p+1)^{-\frac{1}{p}}\right)^p\right\}$$

$$= 1 - p(p+1)^{-\frac{p+1}{p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1-1=0.$$

POA→∞

無秩序の代償の上限

- 先の例で見たように、費用関数が非線形の場合は、「無秩序の代償」はいくらでも大きく成り得る。
- しかし、費用関数が線形の場合は（ピグーの例題等で得られた）4/3が上界値であることが分かっている。
- 以下でそれを証明していく。

線形費用の場合

- 各枝$e \in E$の費用関数は　$c_e(x)=a_e x+b_e$　と表すことができる。
- その限界費用関数は　$c^*_e(x)=2a_e x+b_e$　となる。

補題7: 線形費用関数cをもつネットワーク(G,r,c)のナッシュフローをfとすると、以下が成立する。

(a) $\forall e \in E$に対し、 $c^*_e(f_e/2)=c_e(f_e)$.

(b) フロー$f/2$は$(G,r/2,c)$の最適フロー。

証明　(a) $c_e(x)=a_e x+b_e$のとき$c^*_e(x)=2a_e x+b_e$ となることから自明。

(b) 上の性質から$f/2$ は$(G,r/2,c^*)$のナッシュフローであり、定理6より、これは$(G,r/2,c)$の最適フローでもある。□

補題8: 線形費用のネットワーク(G,r,c)とそのフローfに対し以下が成立する。

$$C(f/2) \geq \frac{1}{4}C(f).$$

証明

$$C(f/2) = \sum_{e\in E}\left(a_e\frac{f_e}{2}+b_e\right)\frac{f_e}{2}$$

$$\geq \frac{1}{4}\sum_{e\in E}(a_e f_e + b_e)f_e$$

$$= \frac{1}{4}C(f).$$

□

補題9: 線形費用のネットワーク(G,r,c)の最適フローをf^*、任意の正実数を$\delta>0$とすると、$(G,(1+\delta)r,c)$の実行可能フローの費用は少なくとも

$$C(f^*)+\delta\sum_{e\in E}c_e^*\left(f_e^*\right)f_e^*$$

以上である。

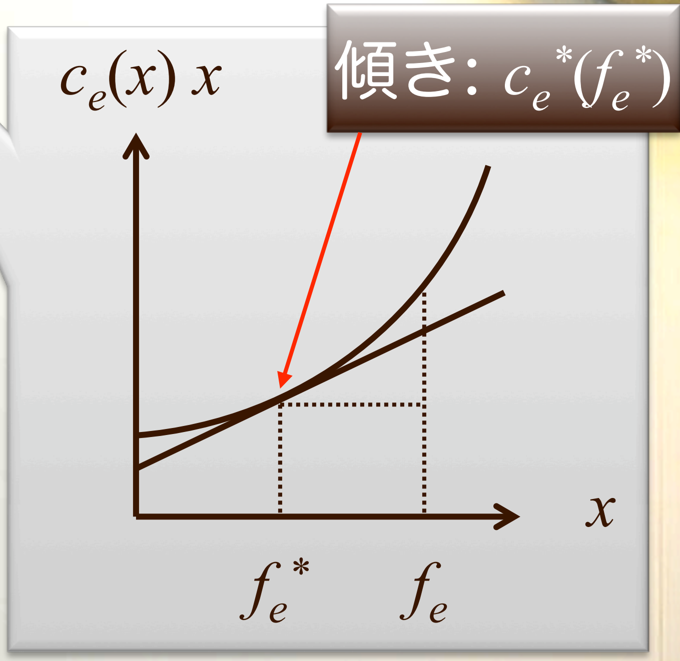
証明　fを$(G,(1+\delta)r,c)$の最適フローと仮定する。任意の枝$e\in E$のfによる費用は$xc_e(x)=a_e x^2+b_e x$の凸性から、以下のように近似できる。

$$c_e(f_e)f_e \ge c_e(f_e^*)f_e^* + (f_e - f_e^*)c_e^*(f_e^*)$$

従って次を得る。

$$C(f) = \sum_{e\in E} c_e(f_e)f_e$$

$$\ge C(f^*) + \sum_{e\in E}(f_e - f_e^*)c_e^*(f_e^*).$$



また、f^*は(G,r,c)の最適フローなので命題5(d)より

$$\sum_{e\in E} h'_e(f_e^*)f_e^* \le \sum_{e\in E} h'_e(f_e^*)\frac{f_e}{1+\delta}.$$

$$\sum_{e\in E} c_e^*(f_e^*)f_e^* \le \frac{1}{1+\delta}\sum_{e\in E} c_e^*(f_e^*)f_e.$$

$$C(f) \geq C(f^*) + \sum_{e\in E}(f_e - f_e^*)c_e^*(f_e^*).$$

$$\sum_{e\in E} c_e^*(f_e^*)f_e^* \leq \frac{1}{1+\delta}\sum_{e\in E} c_e^*(f_e^*)f_e.$$

この２式より

$$C(f) \geq C(f^*) + \sum_{e\in E} c_e^*\left(f_e^*\right)f_e - \sum_{e\in E} c_e^*\left(f_e^*\right)f_e^*$$

$$\geq C(f^*) + (1+\delta)\sum_{e\in E} c_e^*\left(f_e^*\right)f_e^* - \sum_{e\in E} c_e^*\left(f_e^*\right)f_e^*$$

$$\geq C(f^*) + \delta\sum_{e\in E} c_e^*\left(f_e^*\right)f_e^*$$

を得る。 □

定理10: 線形費用のネットワーク(G,r,c)の無秩序の代償は4/3以上である。すなわち、

$$\rho(G,r,c) \le \frac{4}{3}.$$

証明　ナッシュフローをfとする。補題7(b)より$f/2$は$(G,r/2,c)$の最適フローであり、さらに(a)より$\forall e \in E$に対し、$c^*_e(f_e/2)=c_e(f_e)$である。補題9を$\delta=1$として適用すると

$$C(f^*) \ge C(f/2) + \sum_{e \in E} c_e^*\left(f_e/2\right)\frac{f_e}{2}$$

(補題8より)

$$\ge \frac{1}{4}C(f) + \frac{1}{2}\sum_{e \in E} c_e\left(f_e\right)f_e$$

$$= \frac{3}{4}C(f).$$

□

多項式の場合

- 費用関数が一般のp次の多項式の場合の無秩序の代償は以下の式で表される。

$$\frac{(p+1)\sqrt[p]{p+1}}{(p+1)\sqrt[p]{p+1}-p} = \Theta\left(\frac{p}{\ln p}\right).$$

まとめ

- 利己的ルーティングによってどれだけ全体の利益が損なわれる危険性があるかを測る指標として「無秩序の代償 (price of anarchy)」がある。
- 利己的ルーティングの安定解としてナッシュ均衡解である「ナッシュフロー」がある。
- 最適フローは、限界費用関数の下でのナッシュフローと同値である。
- 費用関数が線形式である場合の無秩序の代償の上限は4/3である。
- 費用関数がp次多項式である場合の無秩序の代償の値は$\Theta(p/\ln p)$である。

参考文献

- Tim Roughgarden, Selfish Routing and the Price of Anarchy, MIT Press, 2005.