

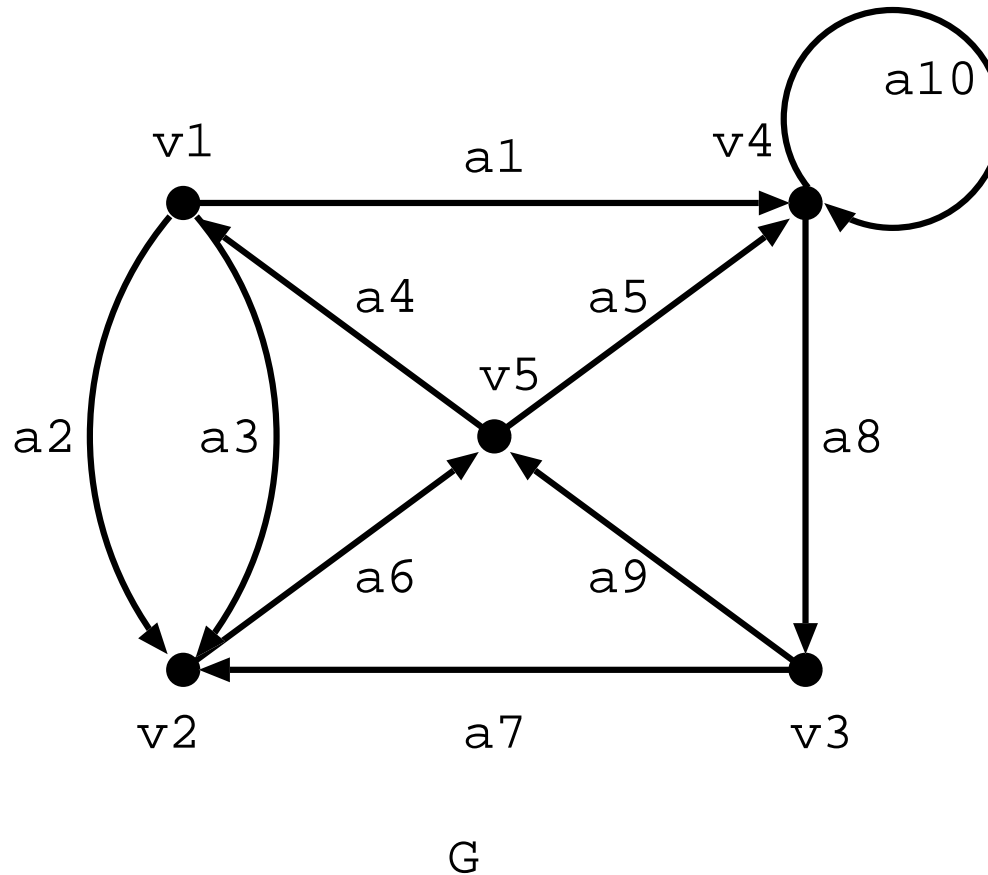
グラフとネットワーク (第1回)

静岡大学システム工学科

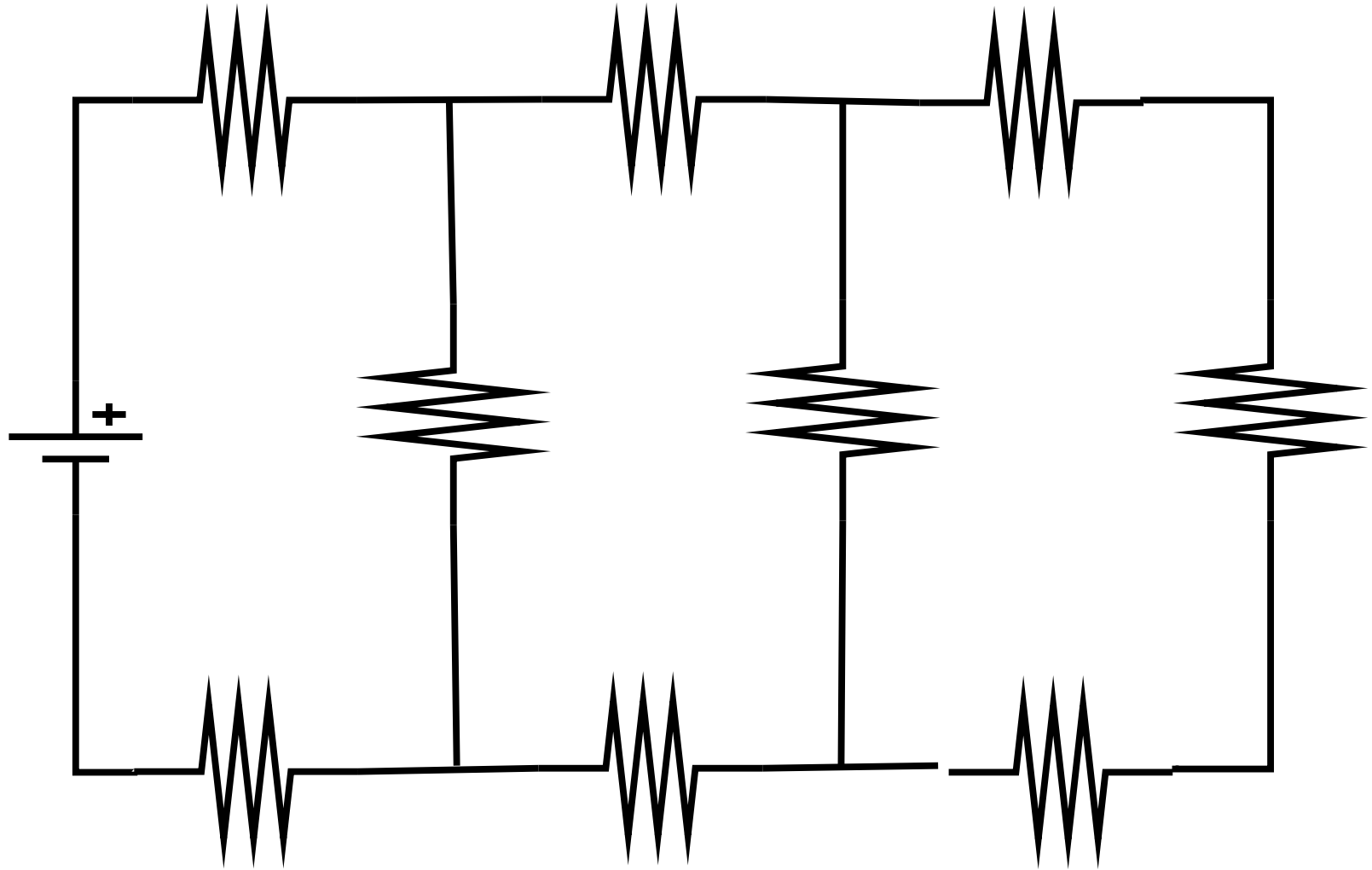
安藤 和敏

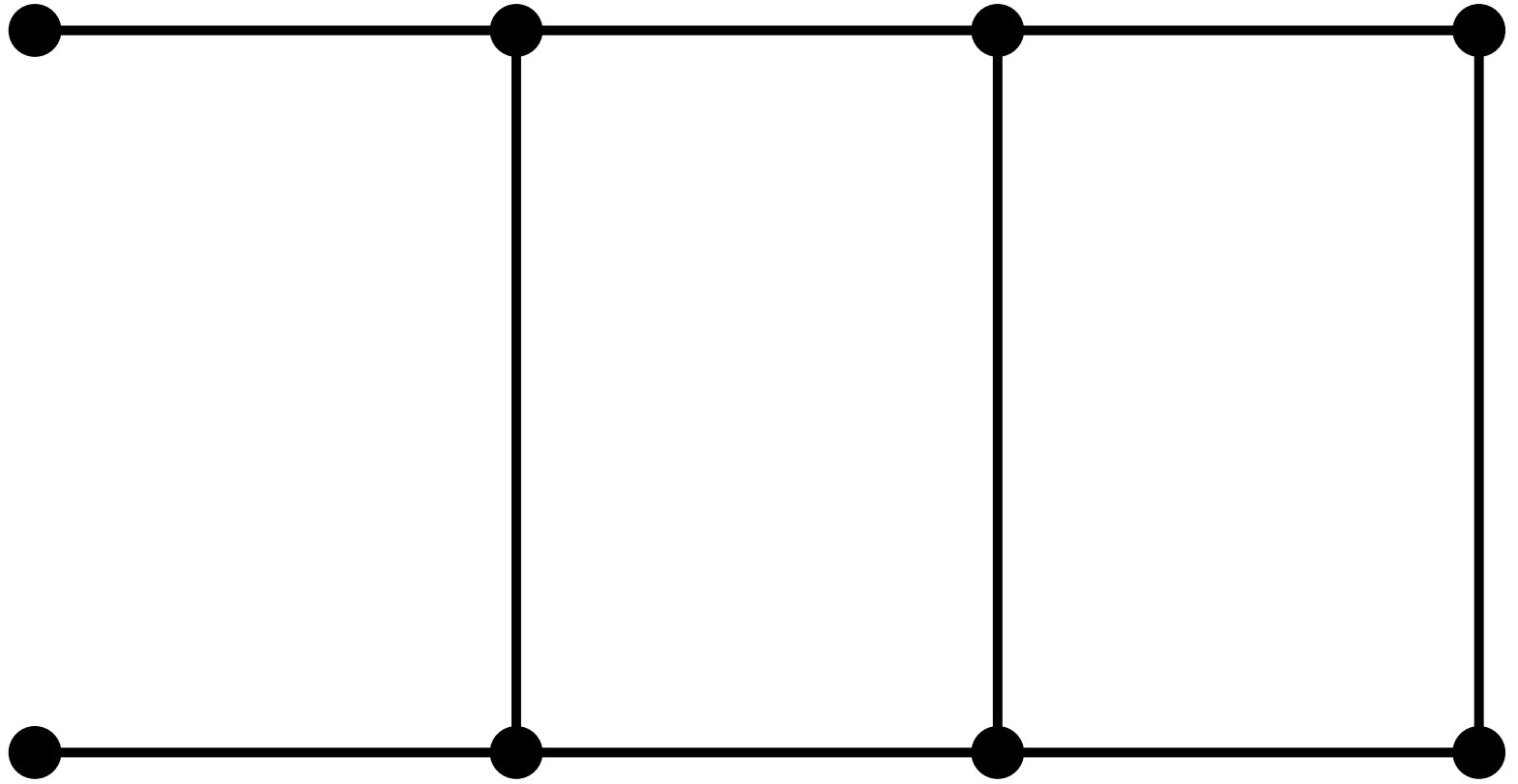
グラフ, ネットワークとは何か?

システムにおける構成要素間の「つながり」を抽象化した概念.

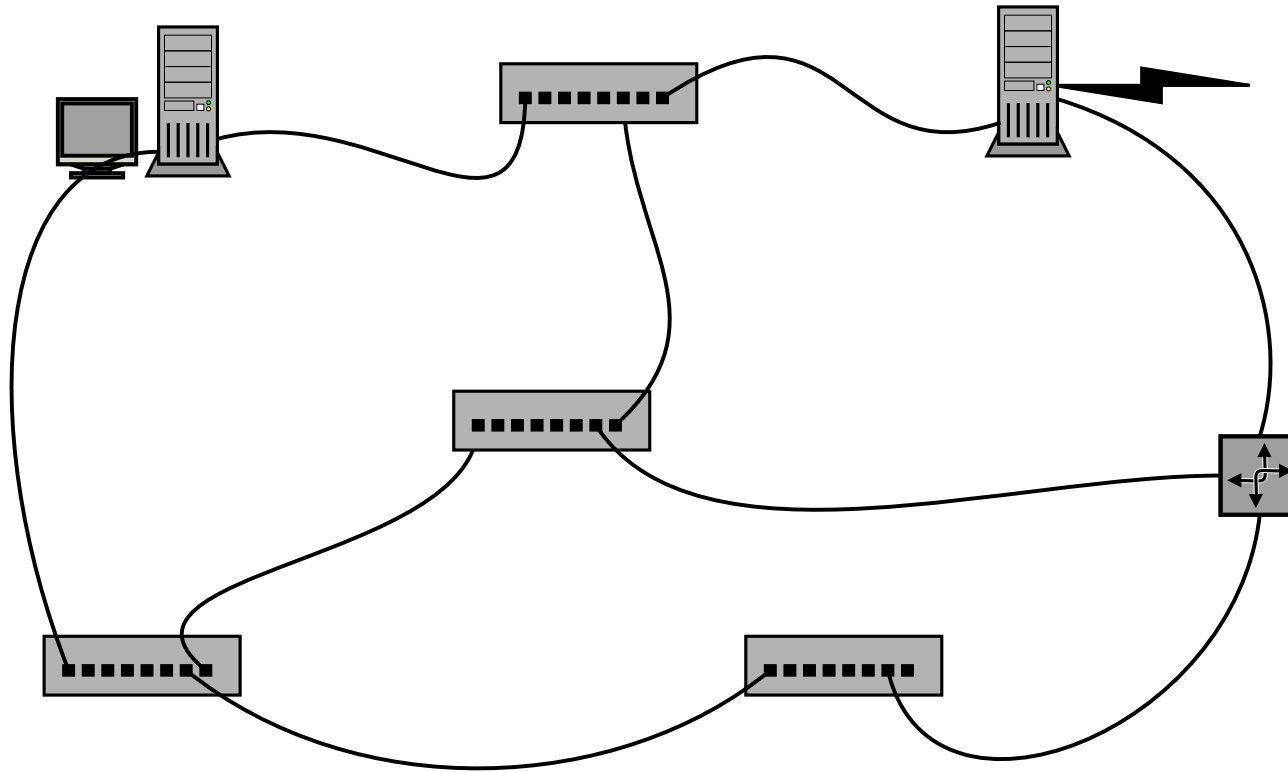


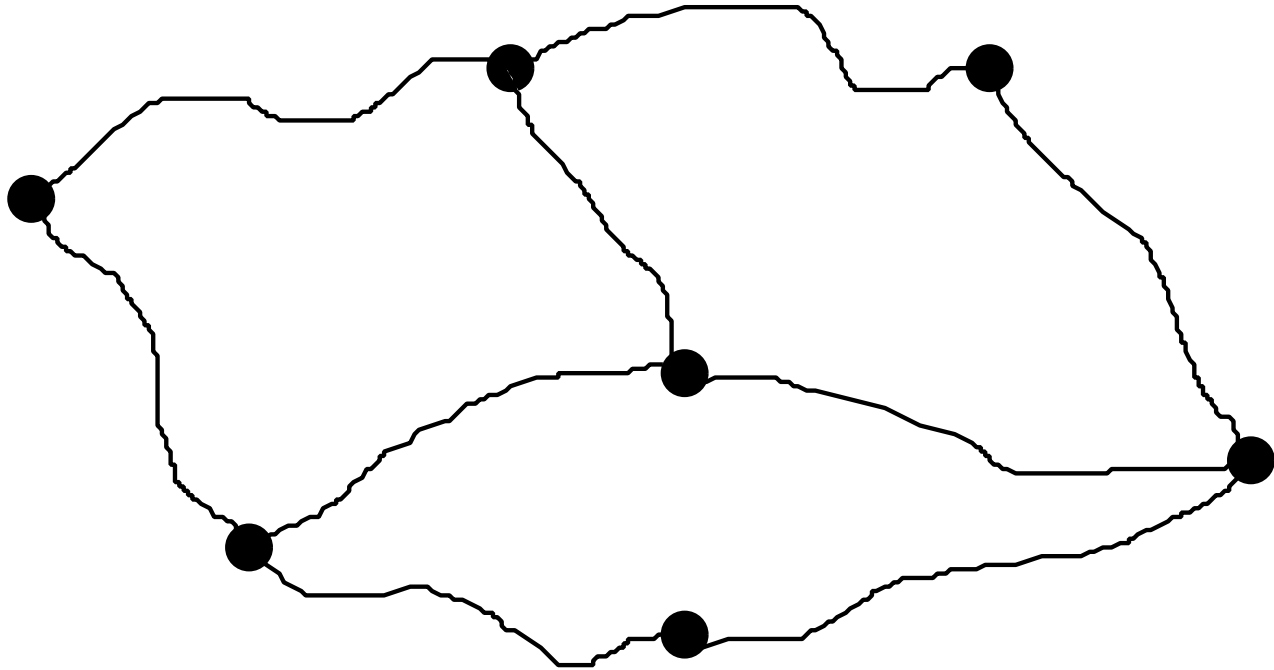
グラフの例1 (電気回路)





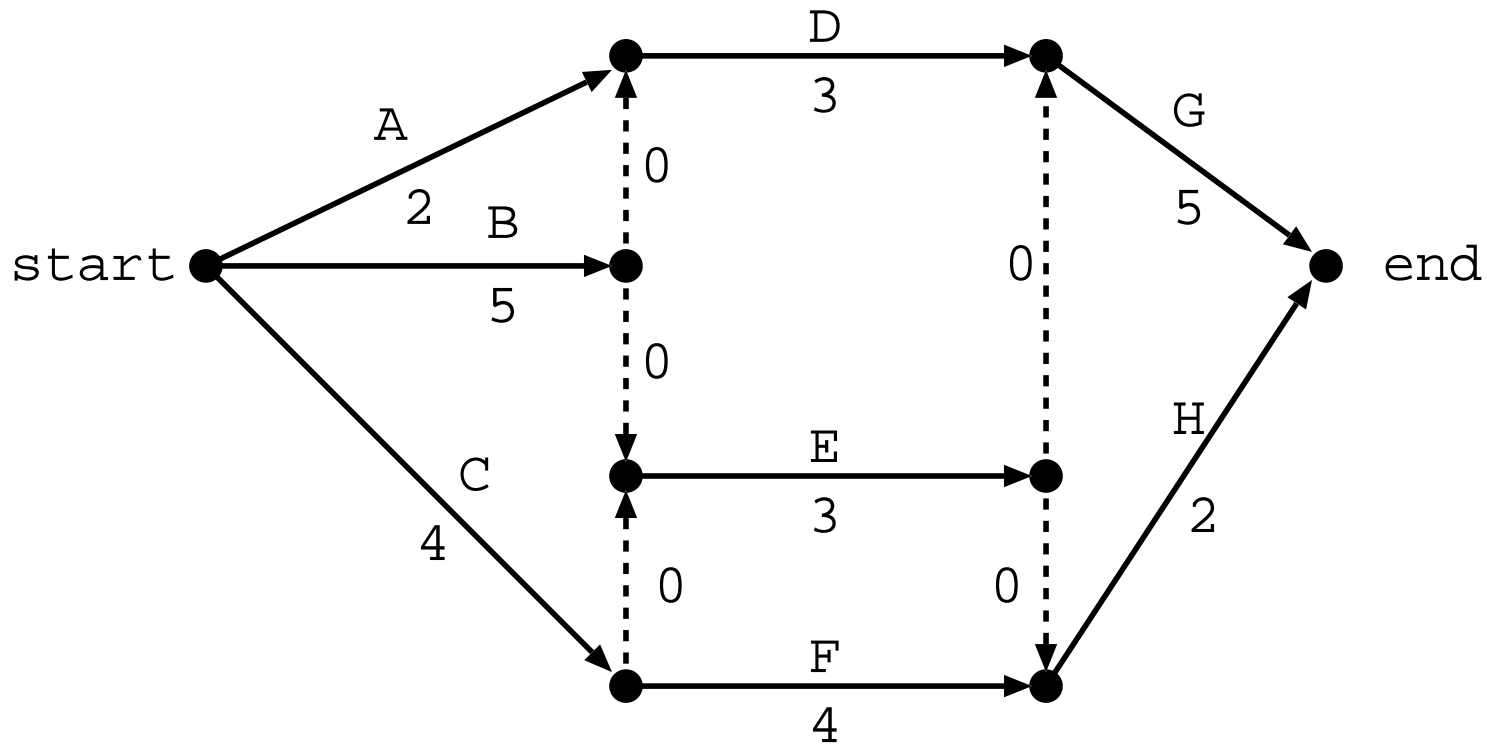
グラフの例2 (コンピュータネットワーク)





グラフの例3 (アローダイヤグラム)

作業	処理時間	先行作業
A	2	—
B	5	—
C	4	—
D	3	A,B
E	3	B,C
F	4	C
G	5	D,E
H	2	E,F



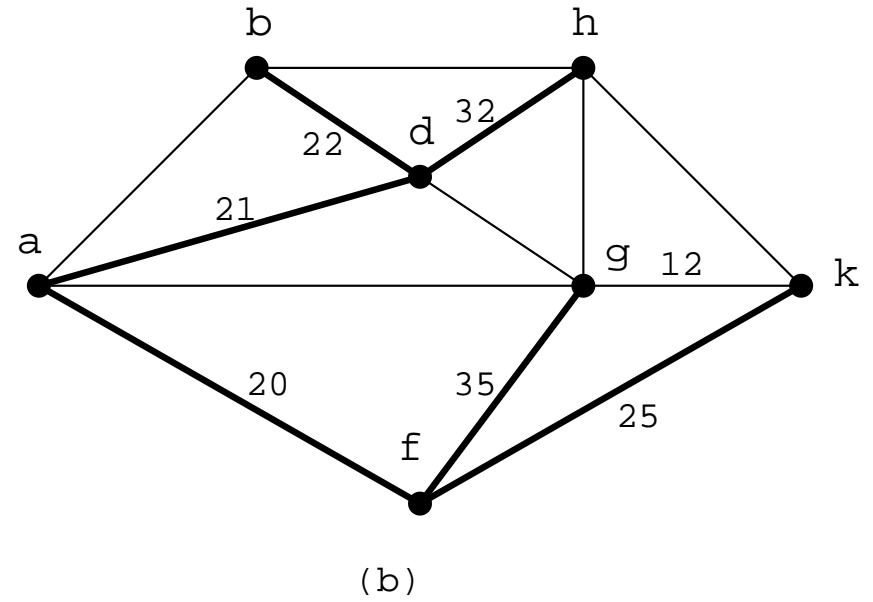
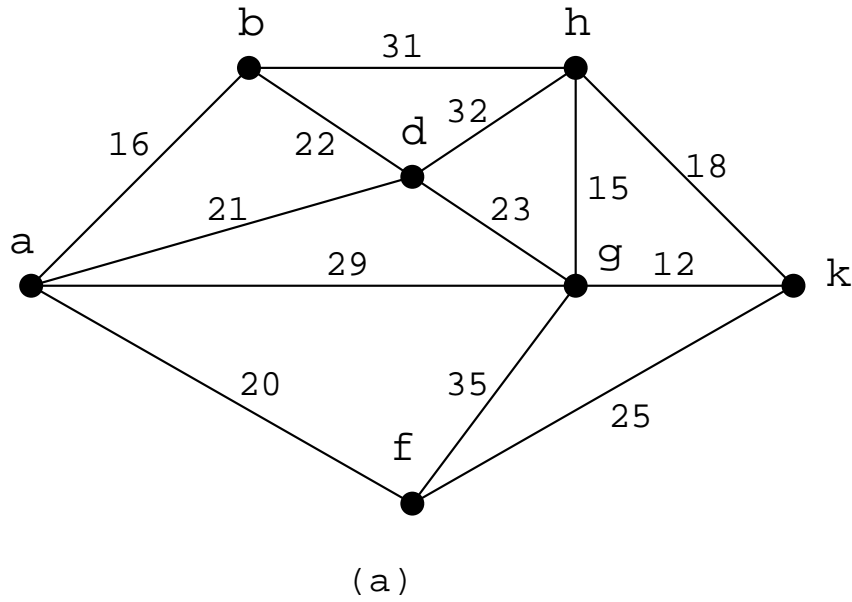
本講義で学べること

グラフについての諸概念を学んだ後, グラフやネットワーク上で定義される以下の問題

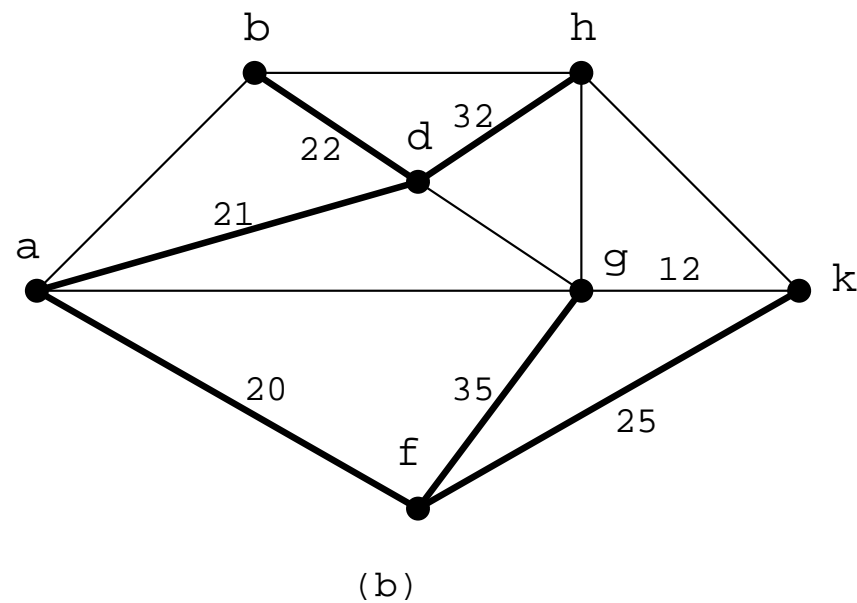
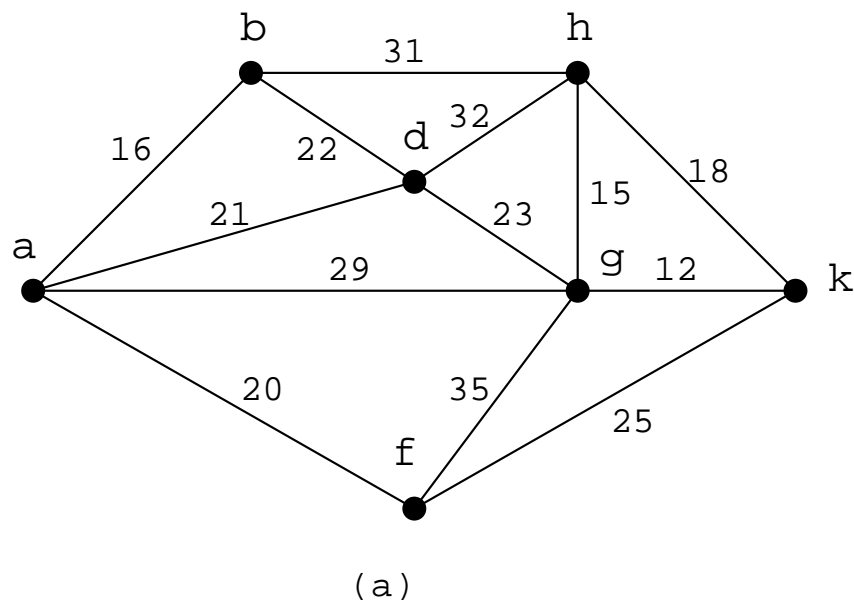
- 最小木問題
- 最短路問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

に対するアルゴリズムについて学ぶ.

最小木問題



木



(a) グラフ G と $w: A \rightarrow \mathbf{R}$; (b) G の木 T (太字の枝)

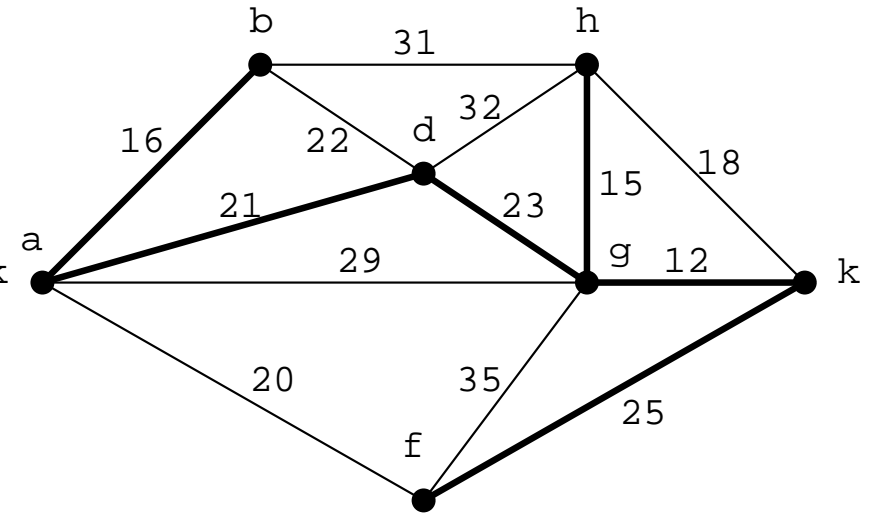
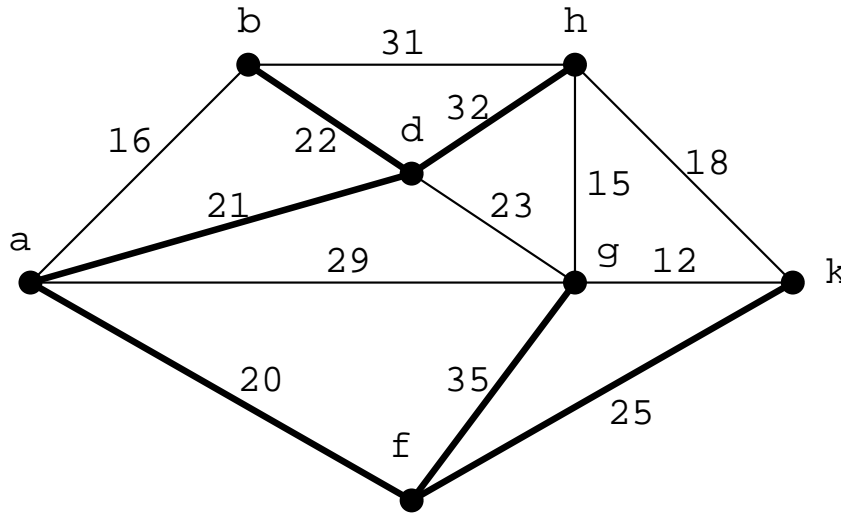
木の重み

グラフ $G = (V, A)$ と枝の重み $w: A \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているとする。 G の木 T に対して、

$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a) \quad (2.1)$$

を木 T の重みという。

木の重み (例)



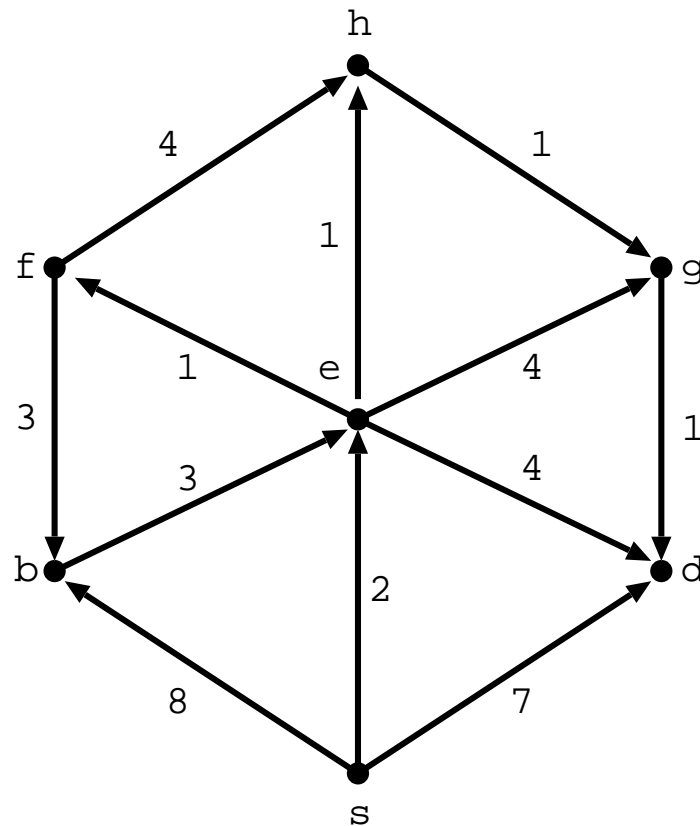
最小木問題

最小木問題とは、重みが最小である木を見つける問題である。

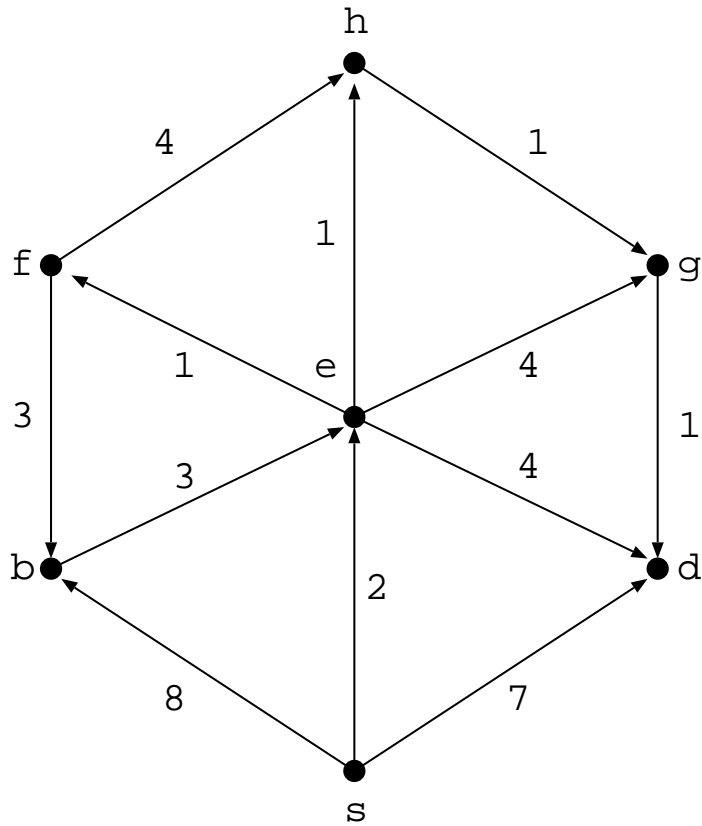
最小木問題を解くためのアルゴリズムには、貪欲アルゴリズムとヤルニーク-プリムのアルゴリズムが良く知られている。

最短路問題

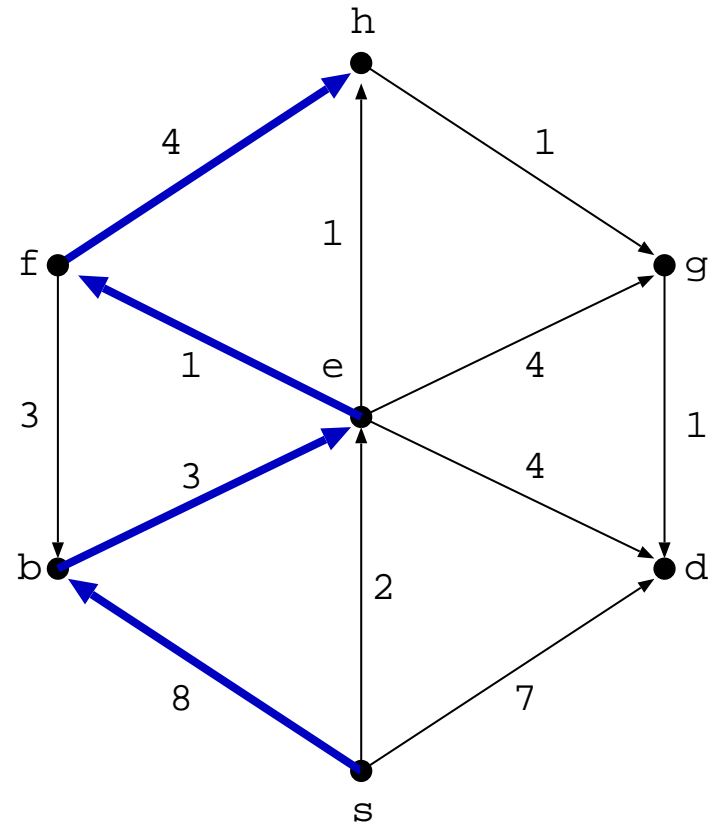
有向グラフ $G = (V, A)$ の各枝 a に対して, その長さ $l(a)$ を指定する関数 $l: A \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられている.



有向道



(a)



(b)

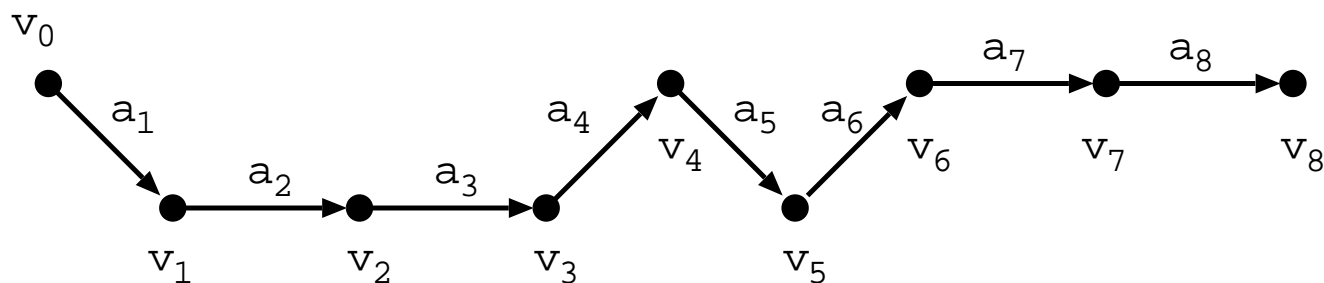
(a) ネットワーク \mathcal{N} ; (b) \mathcal{N} の s から h への有向道 (青い枝)

有向道の長さ

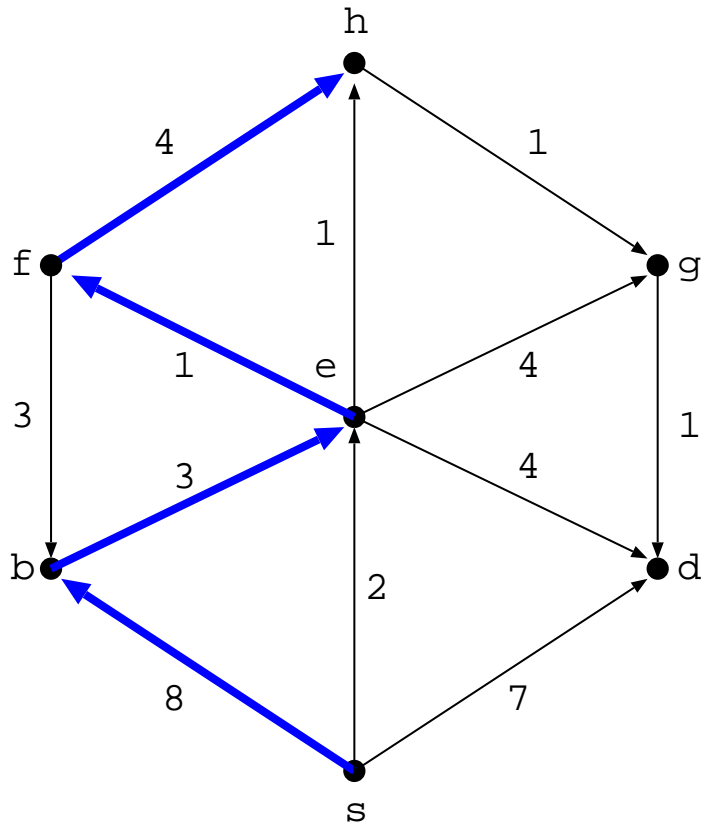
ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), l)$ が与えられているとする. G 中の有向道

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \dots, a_k, v_k)$$

に対して, $\sum_{i=1}^k l(a_i)$ を P の長さと呼ぶ.

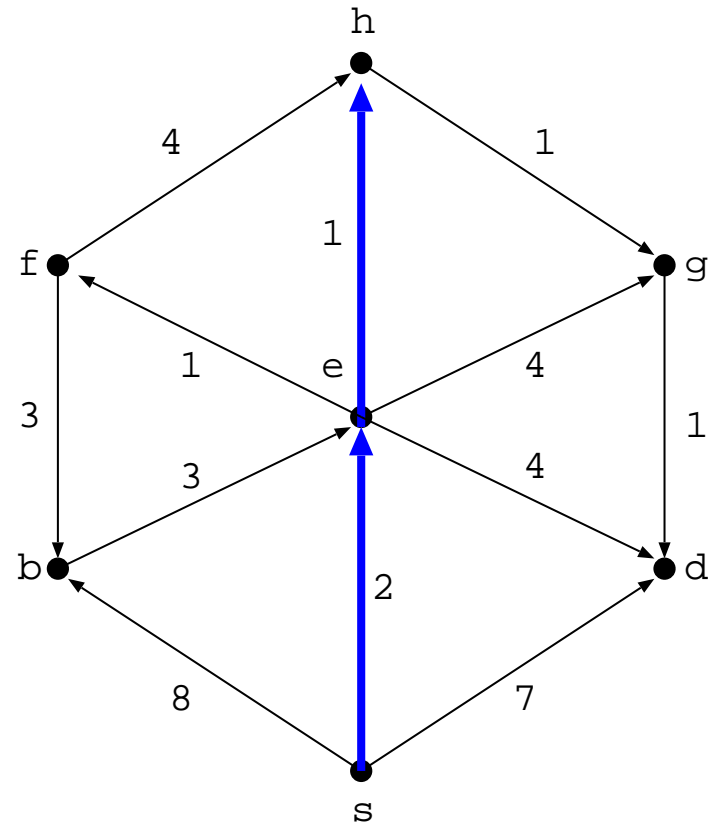


有向道の長さ (例)



(a)

長さ = 16



(b)

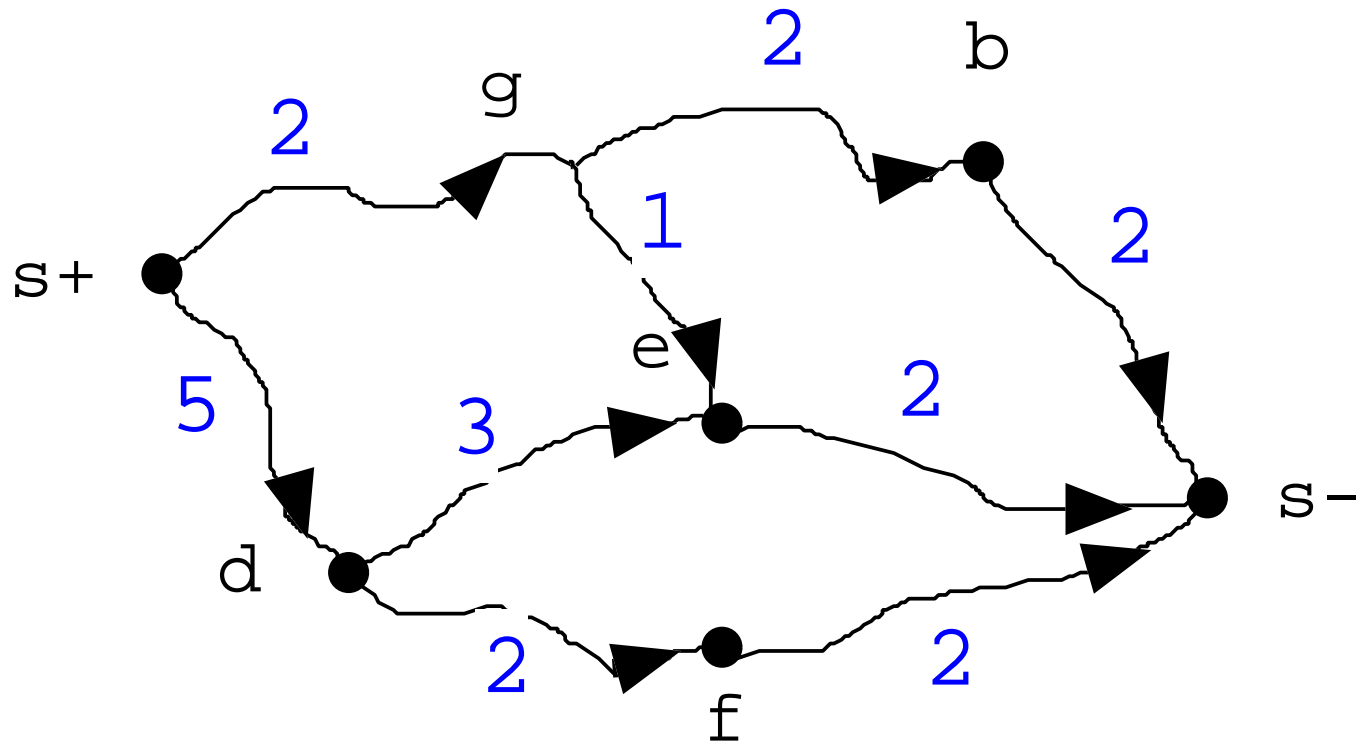
長さ = 3

最短路問題

最短路問題とは、与えられた2点 $u, v \in V$ に対して、 u から v への長さが最小の有向道を見つける問題である。

最大流問題

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$



ネットワークには、特別な2点: s^+ と s^- がある。さらに、各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ が与えられている。

ネットワーク \mathcal{N} 中のフロー

ネットワーク \mathcal{N} 中のフロー (flow) とは, つぎの (i), (ii) を満足する枝集合上の実数値関数 $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}$ のことである.

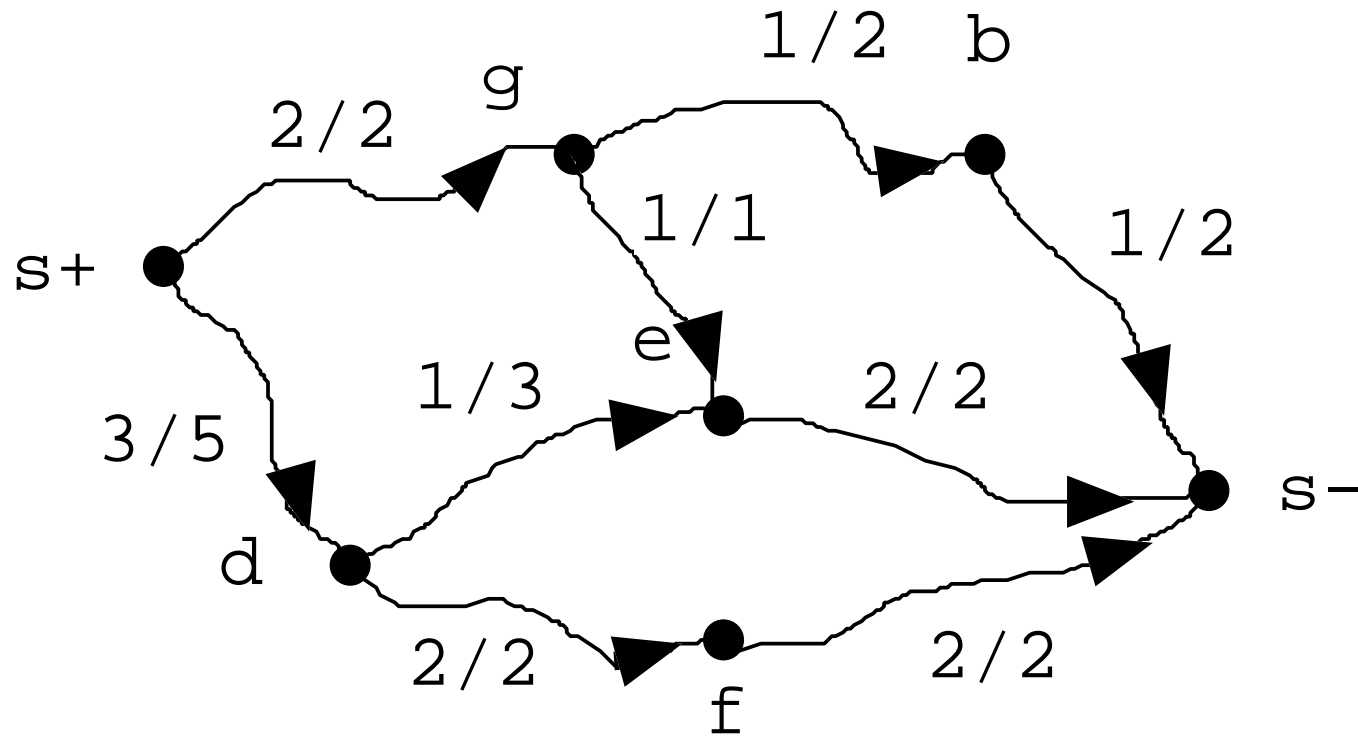
(i) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \quad (2.25)$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点 $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0. \quad (2.26)$$

フローの例



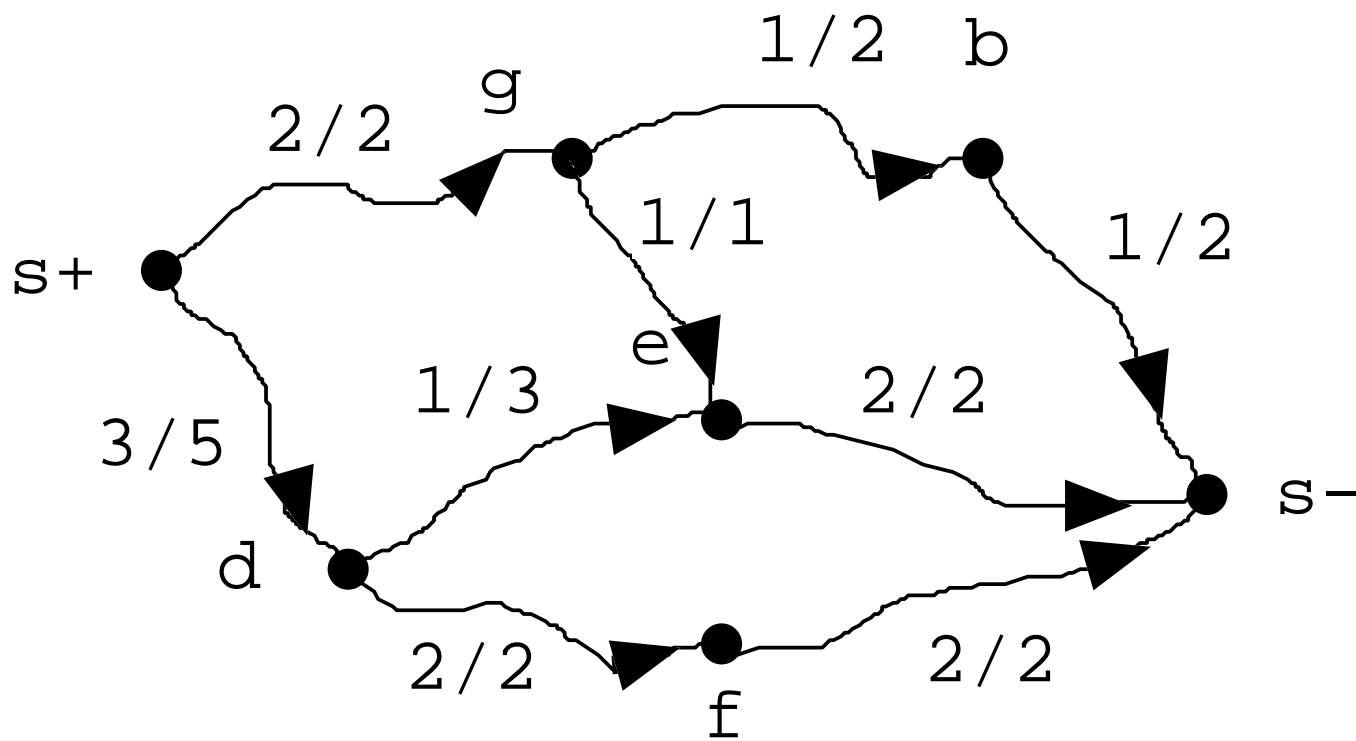
各枝 a に付された数は, $\varphi(a)/c(a)$ を意味する.

フローの流量

流量保存則によって,

$$v^*(\varphi) = \sum_{a \in \delta^+v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^-v} \varphi(a)$$

をフロー φ の流量 (value, flow value) という.



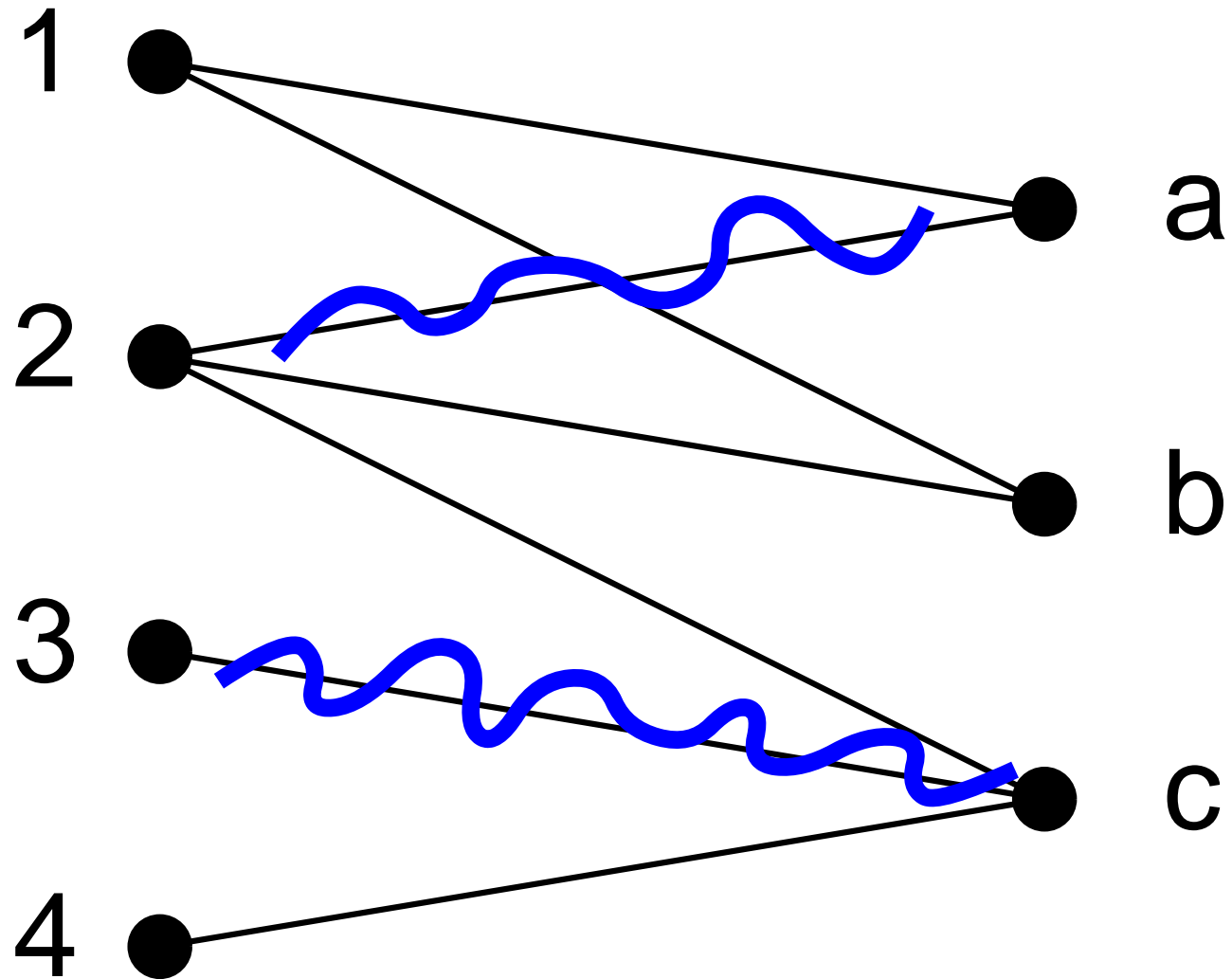
$$v^*(\varphi) = 5.$$

最大流問題

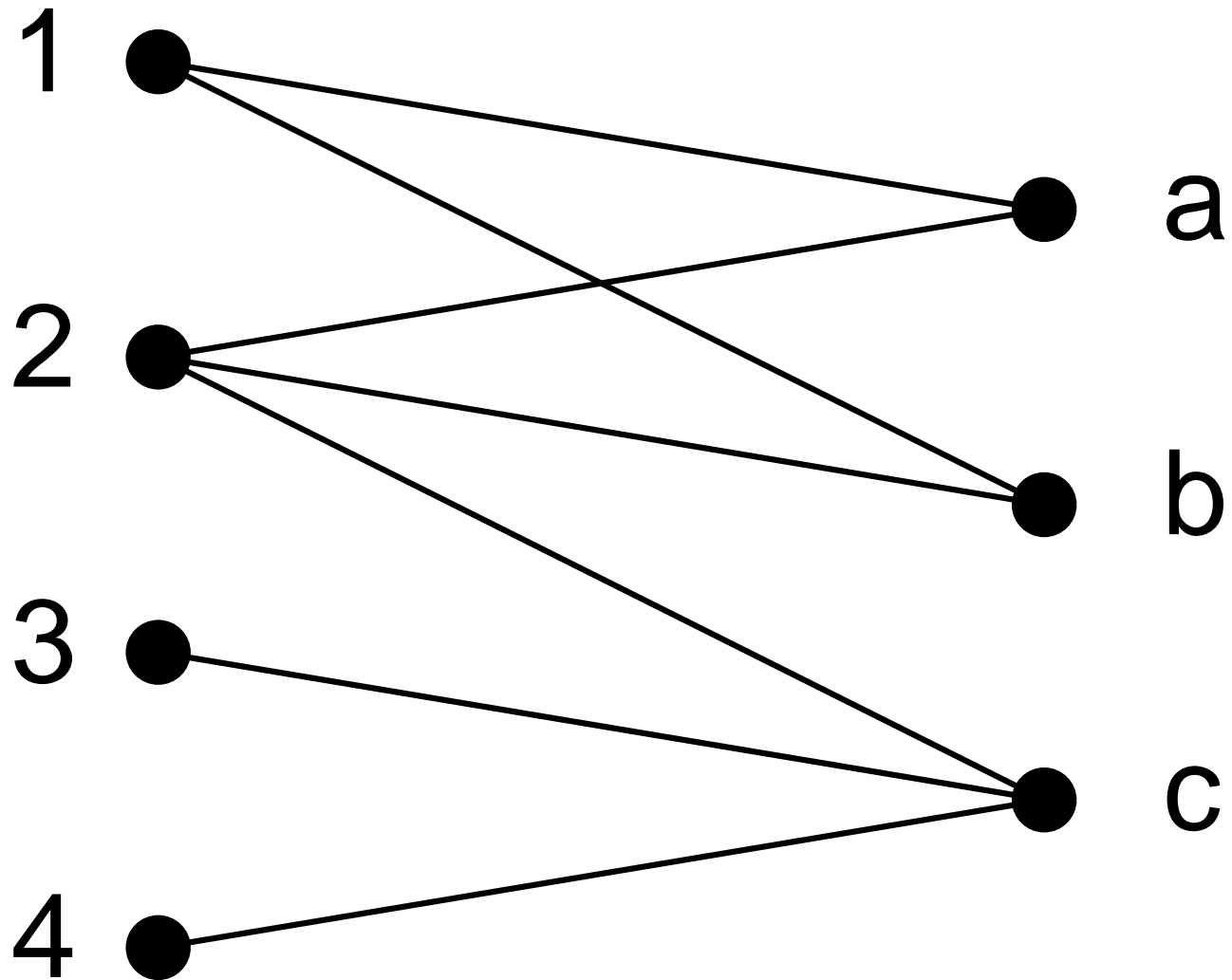
与えられたネットワーク

$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して, \mathcal{N} 上の
フロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるような
ものを**最大フロー (最大流) (maximum flow)** と
呼び, 最大フローを求める問題を**最大フロー問題**
(maximum flow problem) と呼ぶ.

最大マッチング問題

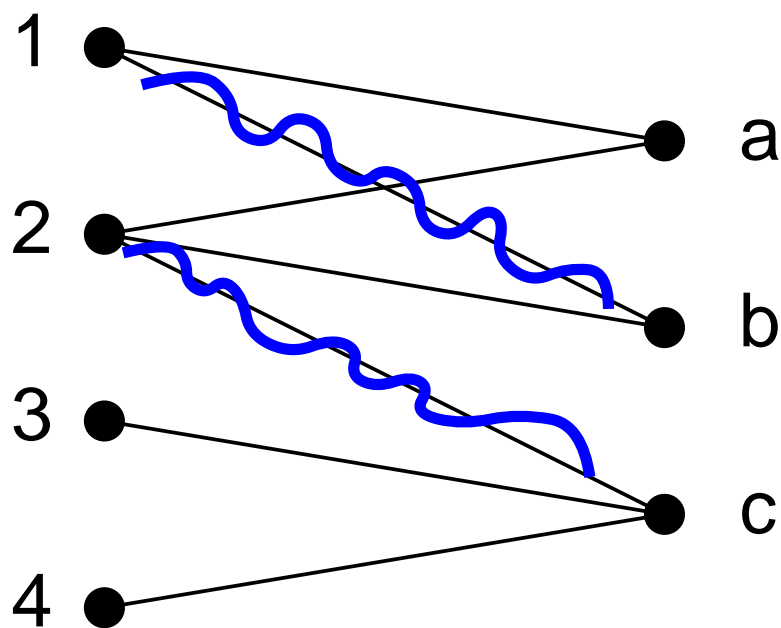


2部グラフ G

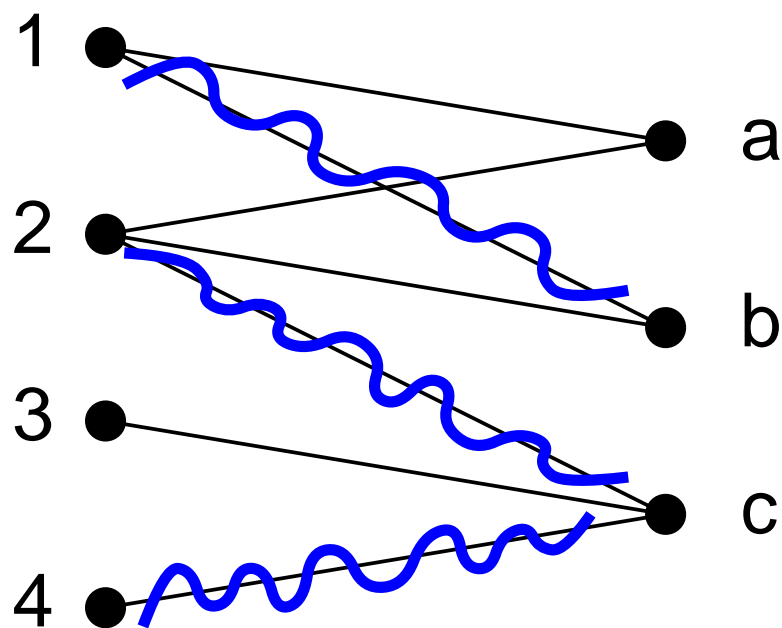


マッチング

枝の部分集合 M は, M のどの2本の枝も点を共有しないとき, G のマッチングと呼ばれる.



M (青い枝たち) は G のマッチング



この M (青い枝たち) は, G のマッチングではない

最大マッチング問題

枝の本数 $|M|$ が最大の G のマッチングを最大マッチングと呼び, 最大マッチングを求める問題を最大マッチング問題と呼ぶ.

テキスト

藤重悟: グラフ・ネットワーク・組合せ論. 共立出版, 2002年.

本講義の URL

http://

coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gnB/