

# グラフとネットワーク (第6回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gnB/>

安藤和敏

静岡大学工学部

2006.05.26

## 1.0.1. 強連結性

(有向) グラフ  $G = (V, A)$  において, 任意な点から任意な点への有向道が存在するとき,  $G$  は強連結 (strongly connected) という.

例 1.1: 図 1.1 の (a) は強連結なグラフであるが, (b) は強連結ではない.  $\square$

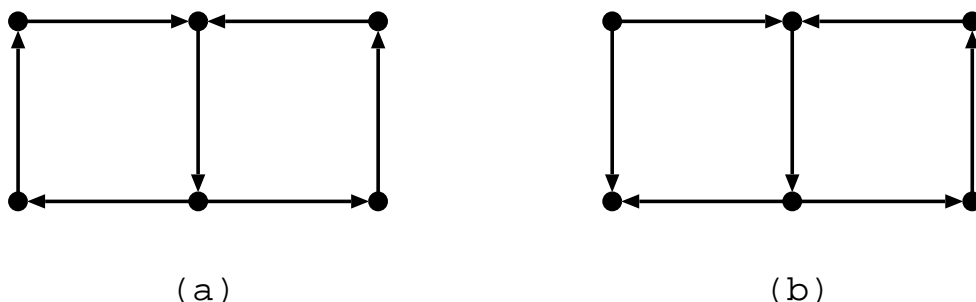


図 1.1: (a) 強連結なグラフ; (b) そうでないグラフ

(強連結でないかも知れない) グラフ  $G$  に対して,  $G$  の極大な強連結部分グラフを  $G$  の強連結成分 (strongly connected component) という.

例 1.2: 図 1.1 の (b) で表されるグラフの強連結成分は, 点線で囲まれた部分グラフ  $H_1, H_2, H_3$  である.  $\square$

直前の例から分かるように, グラフ  $G = (V, A)$  の強連結成分を  $H_i = (W_i, B_i)$  ( $i \in I$ ) としたとき,  $\{W_i \mid i \in I\}$  は  $V$  の分割になっている. (つまり,  $V = \bigcup_{i \in I} W_i$ , かつ, 相異なる  $i, j$  に対して  $W_i \cap W_j = \emptyset$ .) 一方で, 枝集合に対しては, 相異なる  $i, j$  に対して,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  であるが,  $A \neq \bigcup_{i \in I} B_i$  である.

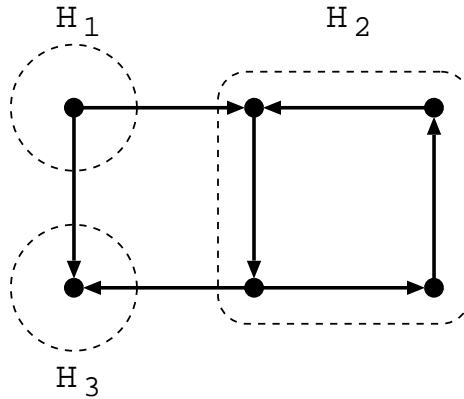


図 1.2: 強連結成分  $H_1, H_2, H_3$

2つの(等しいかもしれない)強連結成分  $H_i$  と  $H_j$  に対して,  $H_j$  の点から  $H_i$  の点へ有向道が存在するときに

$$H_i \preceq H_j$$

という記号を使って表現しよう. すると,  $\preceq$  には以下の性質がある.

- (i)  $H_i \preceq H_i$  ( $i \in I$ ),
- (ii)  $H_i \preceq H_j$  かつ  $H_j \preceq H_i$  ならば  $H_i = H_j$ ,
- (iii)  $H_i \preceq H_j$  かつ  $H_j \preceq H_k$  ならば  $H_i \preceq H_k$ .

### 1.0.2. 半順序集合とそのハッセ図

一般に (i) ~ (iii) を満足する 2 項関係  $\preceq$  は半順序 (partial order) と呼ばれる. このとき, 対  $\mathcal{H} = (\{H_i \mid i \in I\}, \preceq)$  は, 半順序集合 (partially ordered set) と呼ばれる.

$H_i \preceq H_j$  かつ  $H_i \neq H_j$  であるときに,  $H_i \prec H_j$  と書く. 一般の半順序集合  $\mathcal{H} = (\{H_i \mid i \in I\}, \preceq)$  が与えられたときに, 有向グラフを以下のように構成しよう. 点集合は  $\{H_i \mid i \in I\}$  で,

$$H_i \prec H_j, \text{ かつ, } H_i \prec H_k \prec H_j \text{ であるような } H_k \text{ は存在しない}$$

ときに,  $H_j$  から  $H_i$  への枝を張る. このグラフを,  $H_i \prec H_j$  のときに  $H_j$  は  $H_i$  より上にあるように描いたものをハッセ図 (Hasse diagram) という. ハッセ図においては, 上下関係で枝の向きが表現できるので, 無向グラフとして描く.

例 1.3:  $X$  を有限集合として,  $X$  の 2 つの部分集合の間の包含関係  $\subseteq$  は, 半順序である. 図 1.3 は, 半順序集合  $(2^X, \subseteq)$  のハッセ図である.  $\square$

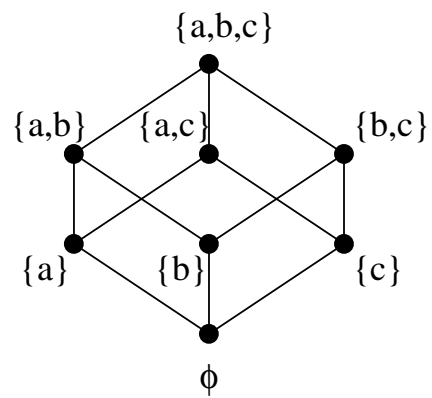


図 1.3: 半順序集合  $(2^X, \subseteq)$  のハッセ図. ここで,  $X = \{a, b, c\}$ .