グラフとネットワーク (第14回)

安藤 和敏

ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

アルゴリズムの正当性

以下では, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性について説明する.

ネットワークのカット

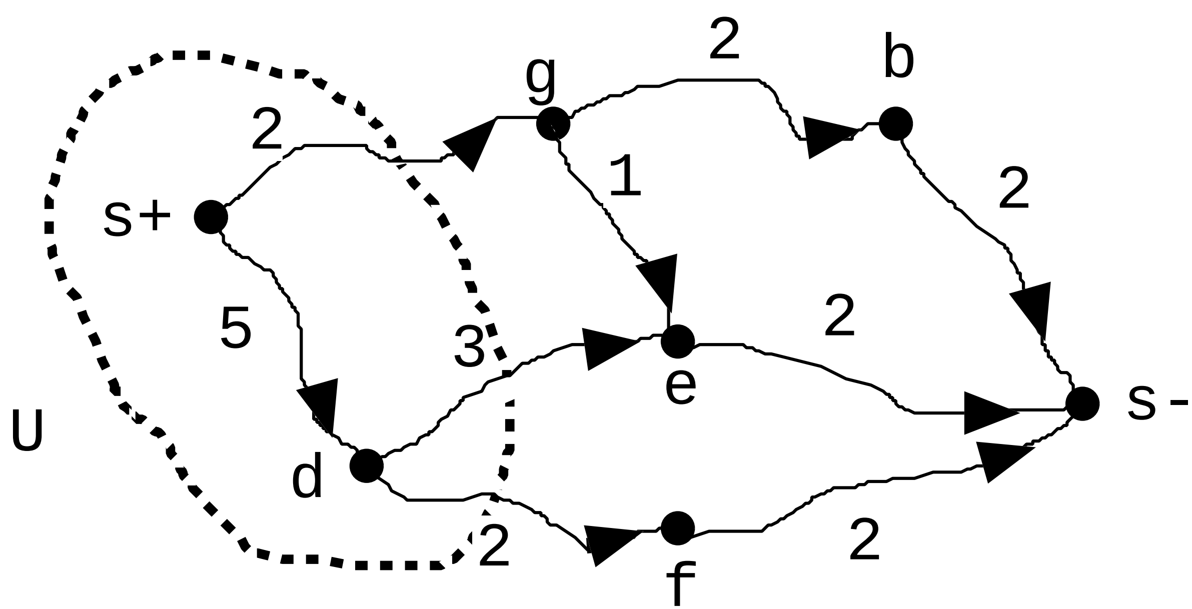
$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ をネットワークとする.

ネットワークのカット

$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ をネットワークとする.
$s^+ \in U,\ s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことをカット (cut) と呼ぶ.

ネットワークのカット

$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ をネットワークとする.
$s^+ \in U$, $s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことをカット (cut) と呼ぶ.



カット $U = \{s^+, d\}$

カットの容量

カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は次式で定義される:

カットの容量

カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は次式で定義される:

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \tag{2.29}$$

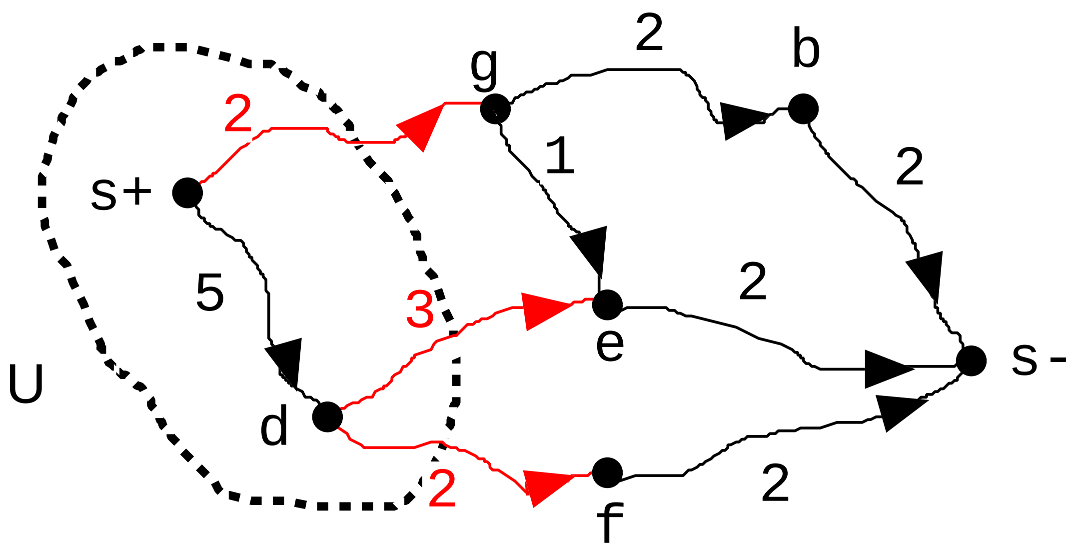
($\Delta^+ U$ は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体.)

カットの容量

カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は次式で定義される:

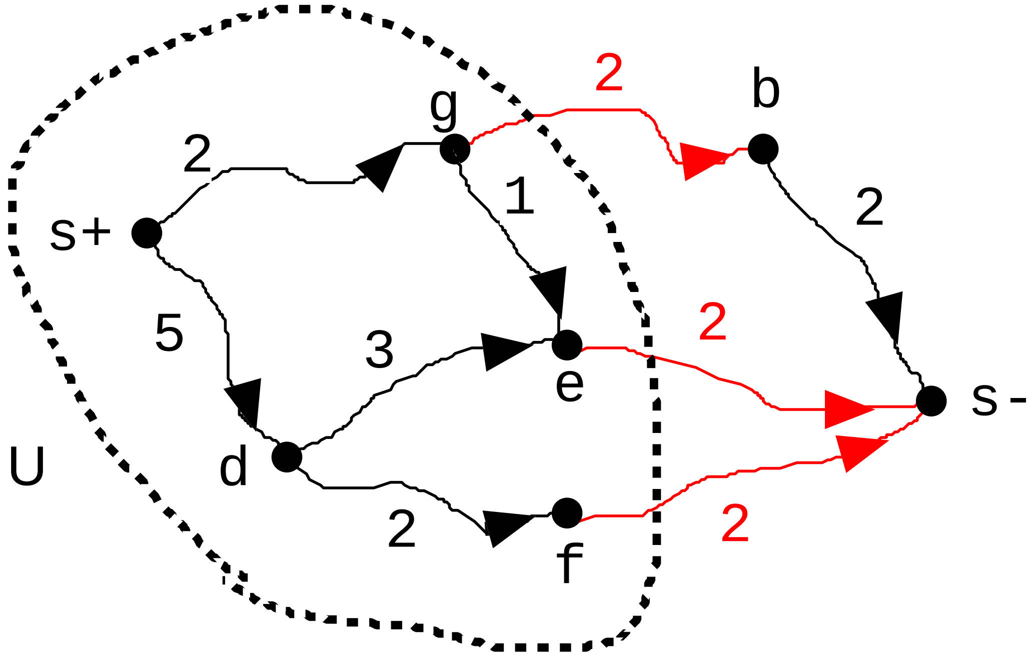
$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \tag{2.29}$$

($\Delta^+ U$ は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体.)



$\kappa_c(U) = 7$

最小カット



$\kappa_c\,(U) = 6$

容量が最小のカットを最小カットと呼ぶ.

補題2.7

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \le \kappa_c(U) \tag{2.30}$$

が成り立つ.
(別の言い方をすると,

「任意のフローの流量は, 任意のカットの容量以下」

.)

(補題 2.7 の証明)

$$\begin{aligned} v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\ &= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\ &\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\ &= \kappa_c(U). \end{aligned}$$

(黒板で説明)

式(2.32)

補題2.7から,

$$\begin{aligned}&\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N}\text{中のフロー}\}\\ &\leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N}\text{のカット}\}\end{aligned} \tag{2.32}$$

を得る.

定理 2.a (アルゴリズムの正当性)

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(定理2.aの証明)

もし, $\mathcal{N}$ の**ある**カット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \qquad (*)$$

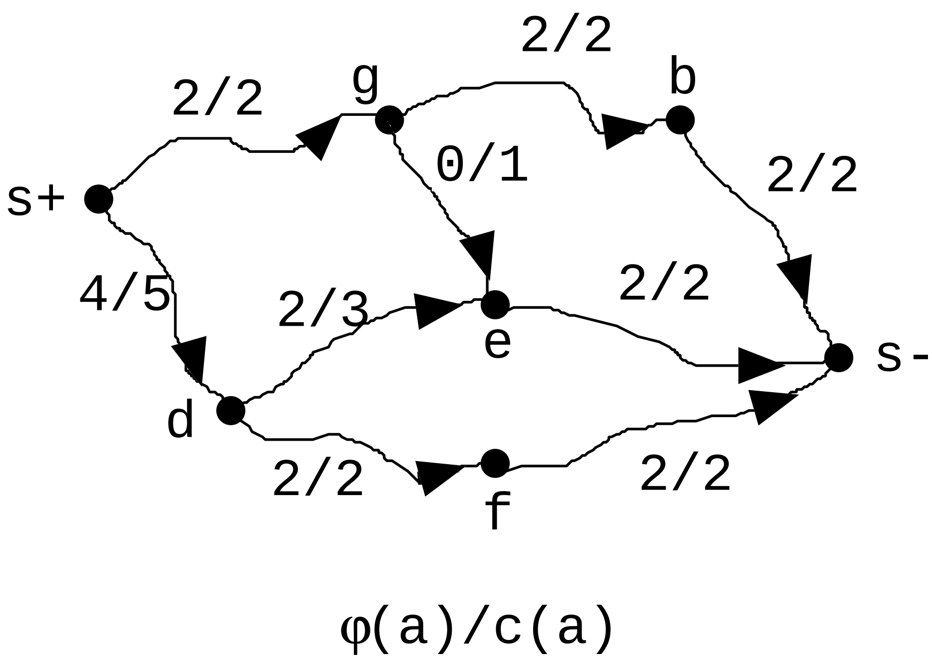
が成り立つのならば,

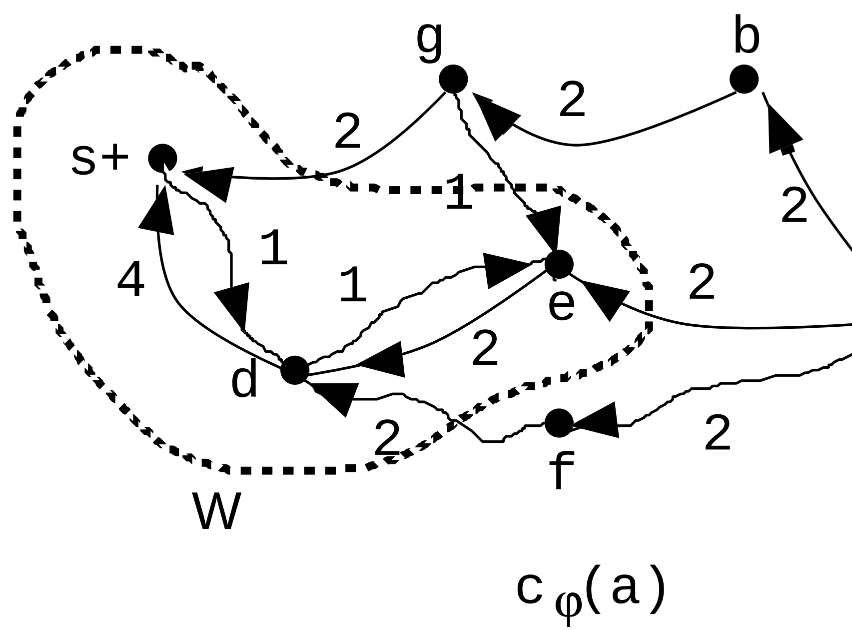
$$\begin{aligned} &\min\{\kappa_c(U) \,|\, U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \\ &\le \ \kappa_c(W) \\ &= \ v^*(\varphi) \\ &\le \ \max\{v^*(\varphi) \,|\, \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} \end{aligned}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大流であり, W は最小カットである.

(定理 2.a の証明)

W を, s^+ を始点とする N_φ の有向道で到達可能な点全体とする. $s^+ \in W$ かつ $s^- \notin W$ なので, W はカットである.





アルゴリズムが終了したときの φ と補助ネットワーク N_φ

(定理 2.a の証明)

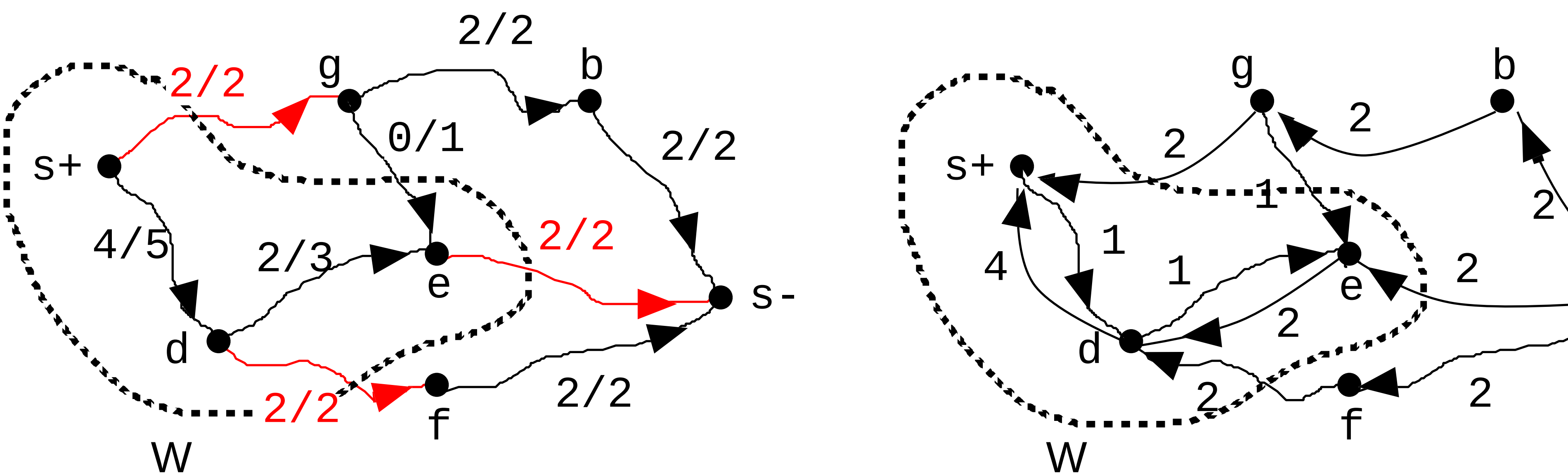
この W に対して,

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \qquad (*)$$

を示せば証明は終りである.

(定理 2.a の証明)

(ア) ネットワーク N において W から出る枝 a は, 補助ネットワーク N_φ の中には存在しないから, $\varphi(a) = c(a)$.

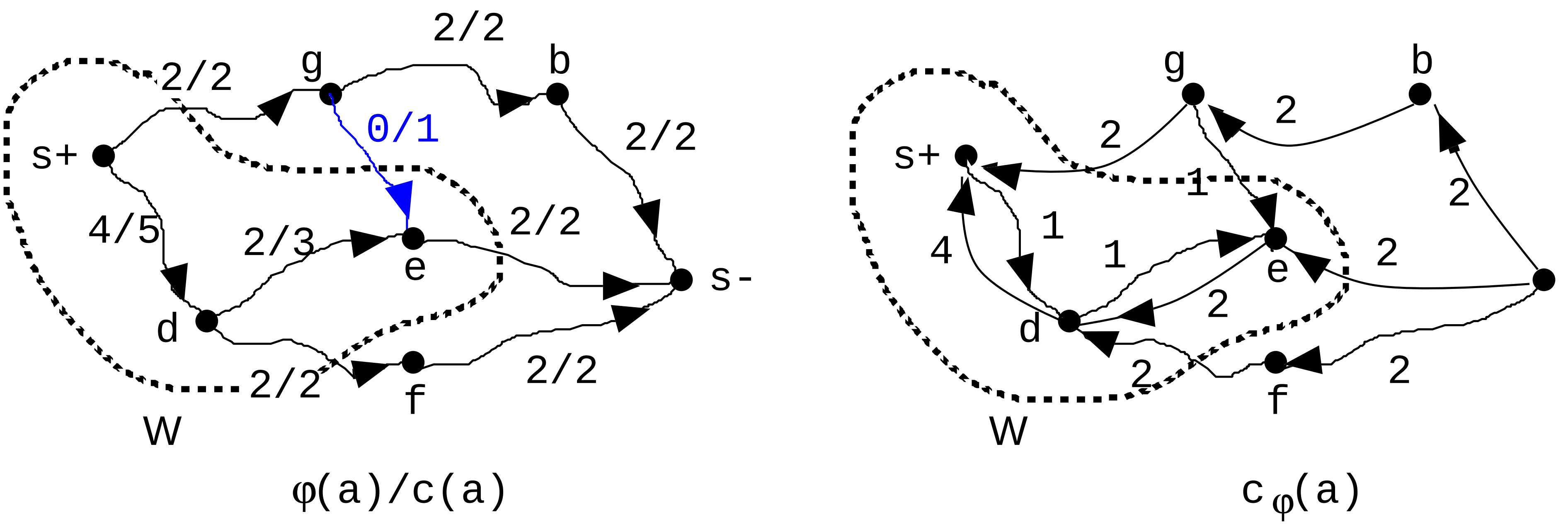


φ(a)/c(a)

$c_\varphi(a)$

(定理2.aの証明)

(イ) ネットワーク N において W に入る枝 a' に対して, その逆向き枝 $\bar{a}'$ は補助ネットワーク N_φ の中には存在しないから, $\varphi(a') = 0$.



$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} 0 \\
&= \kappa_c(W)
\end{aligned}
$$

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理)

$$\begin{aligned}&\max\{v^*(\varphi)\,|\,\varphi:\mathcal{N}\text{ 中のフロー }\}\\&=\min\{\kappa_c(U)\,|\,U:\mathcal{N}\text{ のカット }\}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

注意 2.b

全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの各反復においてフローの流量は少くとも 1 ずつ増加する．したがって, 有限回で最大流に到達する.

定理 2.6

容量関数 $c\colon A \to \mathbf{R}$ が整数値関数であるとき, 整数値 (各枝のフローの値が整数) の最大フローが存在する.