グラフとネットワーク (第10回)

安藤 和敏

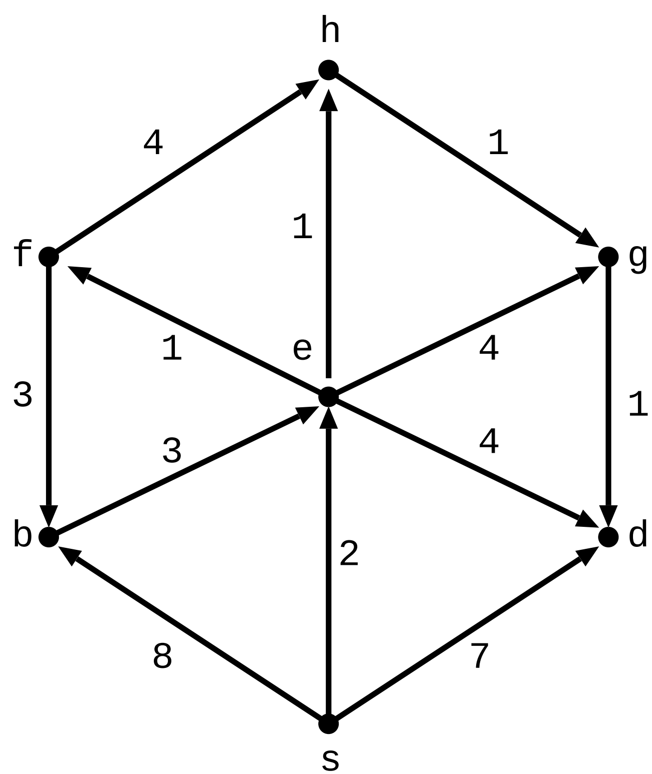
ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

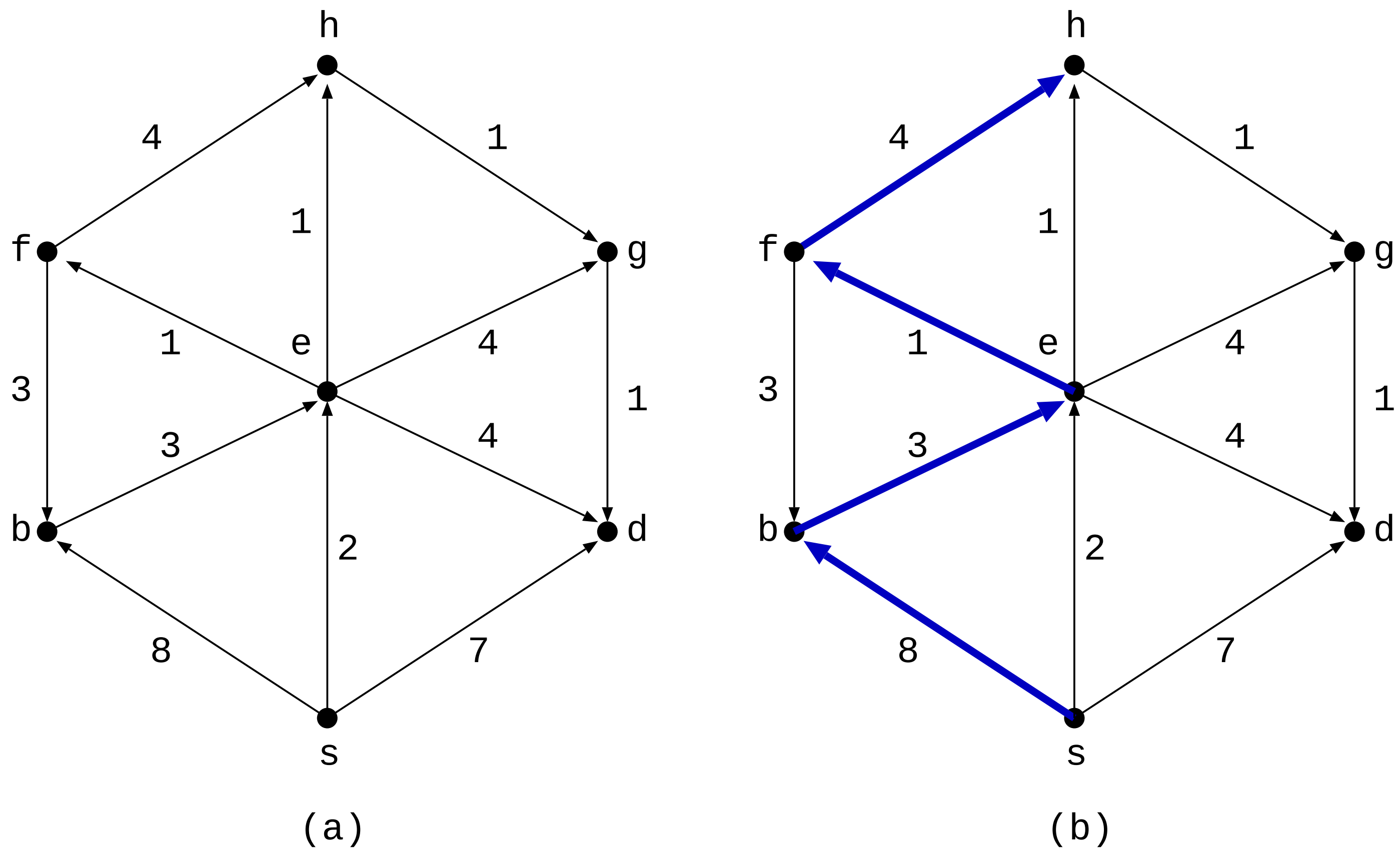
2.1.2 最短路問題

ネットワーク $N = (G = (V, A), l)$

有向グラフ $G = (V, A)$ の各枝 a に対して, その長さ $l(a)$ を指定する関数 $l \colon A \to \mathbf{R}$ が与えられている.



有向道



(a) ネットワーク $\mathcal{N}$

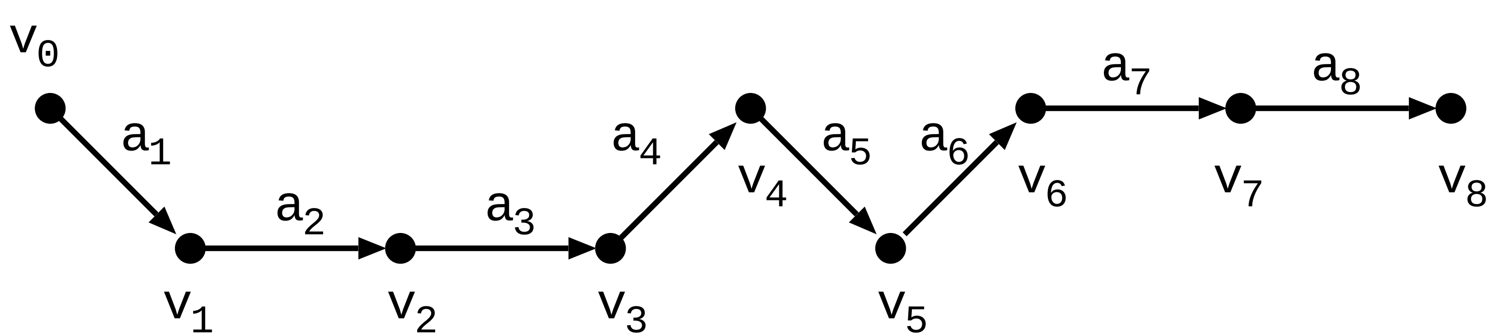
(b) $\mathcal{N}$ の s から h への有向道(青い枝)

有向道の長さ

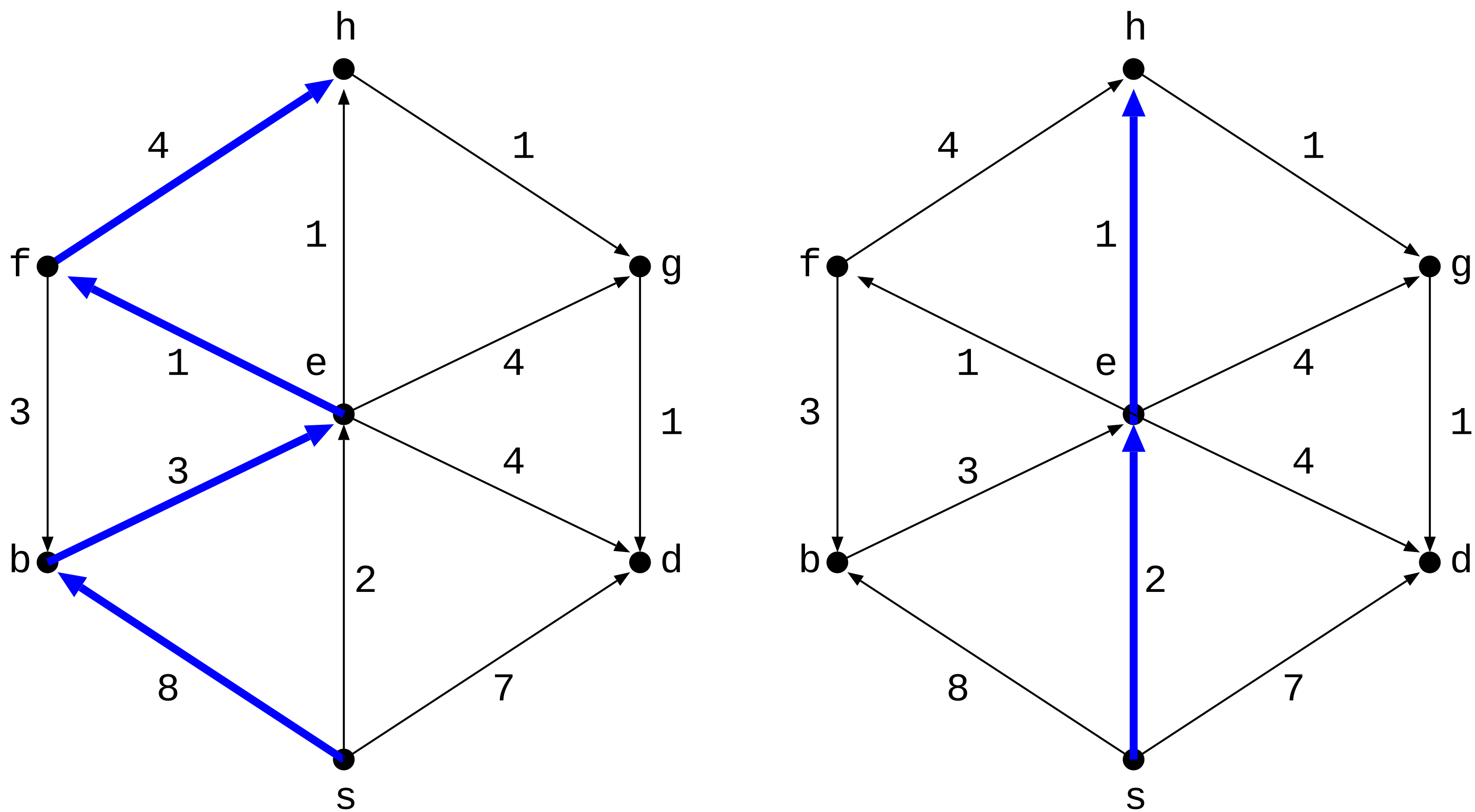
ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), l)$ が与えられているとする. G の中の有向道

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \cdots, a_k, v_k)$$

に対して, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} l(a_i)$ を P の**長さ**と呼ぶ.



有向道の長さ (例)



(a)

長さ= 16

(b)

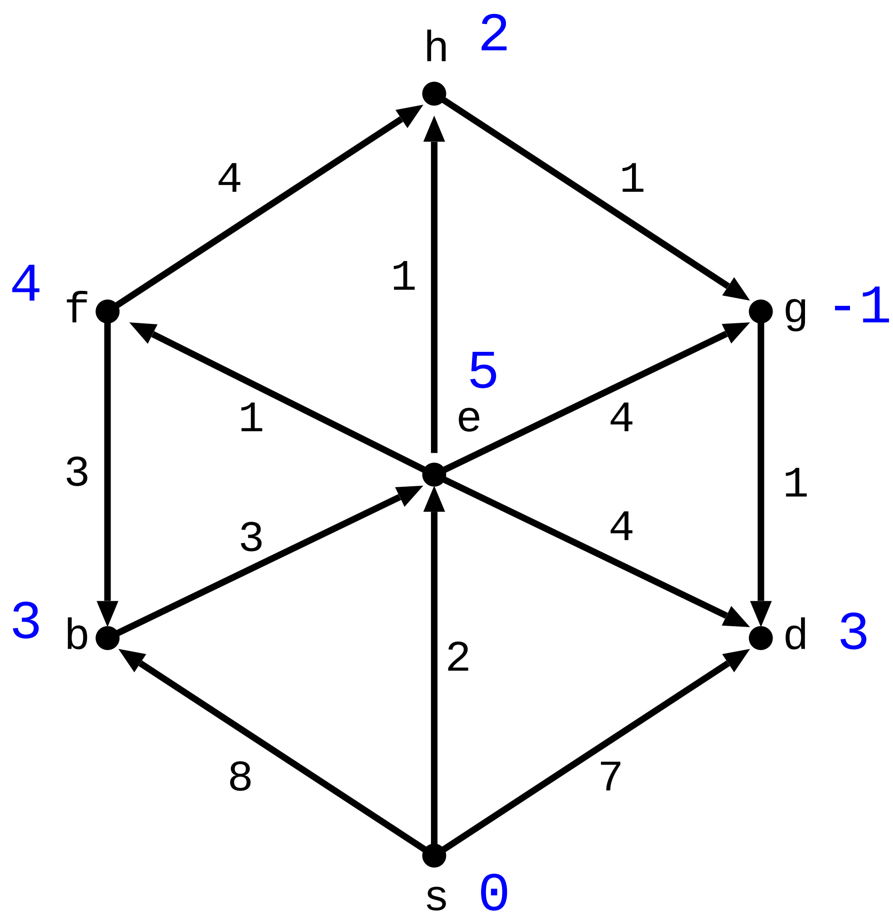
長さ= 3

最短路問題

最短路問題とは, 与えられた 2 点 $u, v \in V$ に対して, u から v への長さが最小の有向道を見付ける問題である.

ポテンシャル

点集合上で定義された関数 $p\colon V \to \mathbf{R}$ をポテンシャルと呼ぶ.

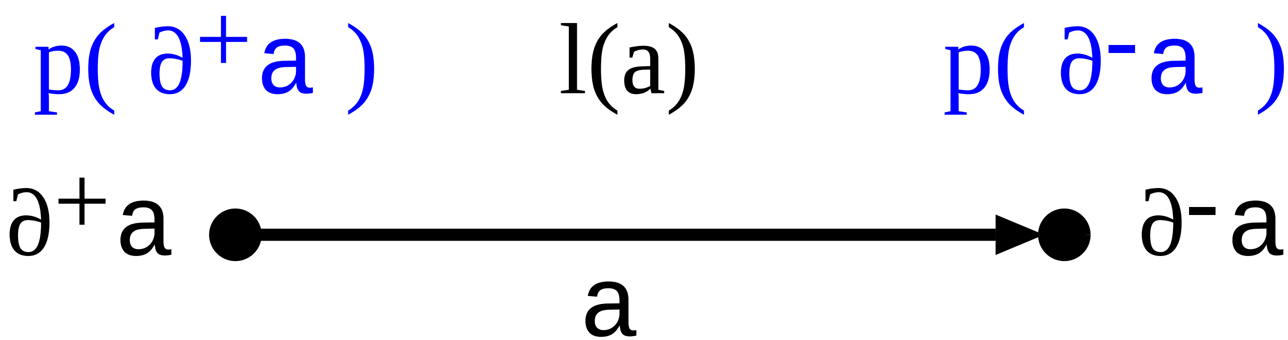


l_p

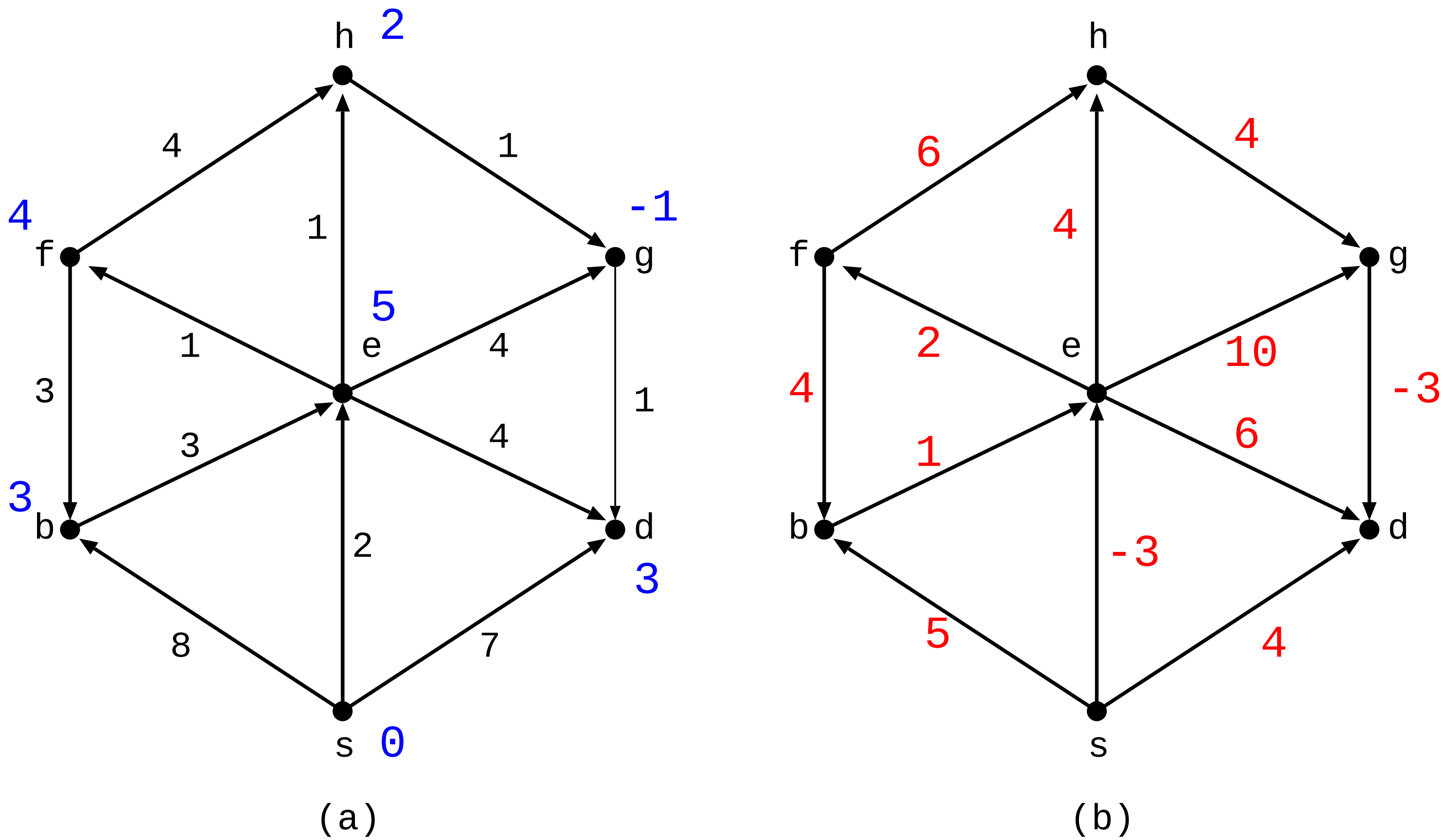
任意なポテンシャル $p\colon V \to \mathbf{R}$ に対して,
$l_p\colon A \to \mathbf{R}$ を

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \qquad (2.11)$$

で定義する.



l_pの例



(a) ネットワーク $\mathcal{N}$ とポテンシャル p;
(b) $l_p\colon A \to \mathbf{R}$

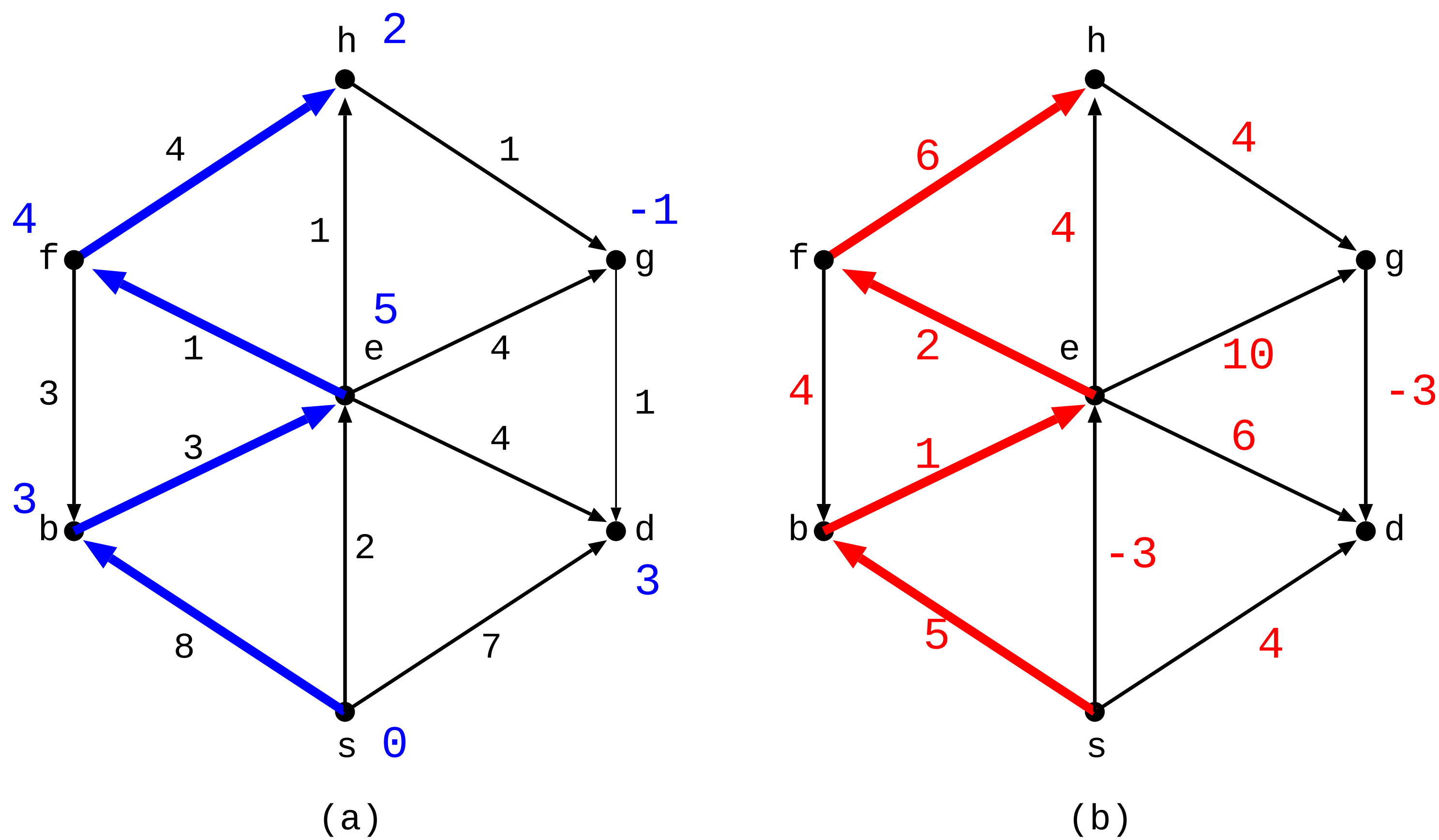
補題 2.1

N の中の点 u から点 v への任意な有向道 P に対して,

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v) \qquad (2.12)$$

が成りたつ.

補題2.1の説明



(a) $l(P) = 16$;

(b) $l_p(P) = l(P) + p(a) - p(h)$

注意 2.a

道 P があるポテンシャル p に対する l_p に関しての点 u から点 v への最短路であれば, P は l に関して u から v への最短路である.

補題 2.2

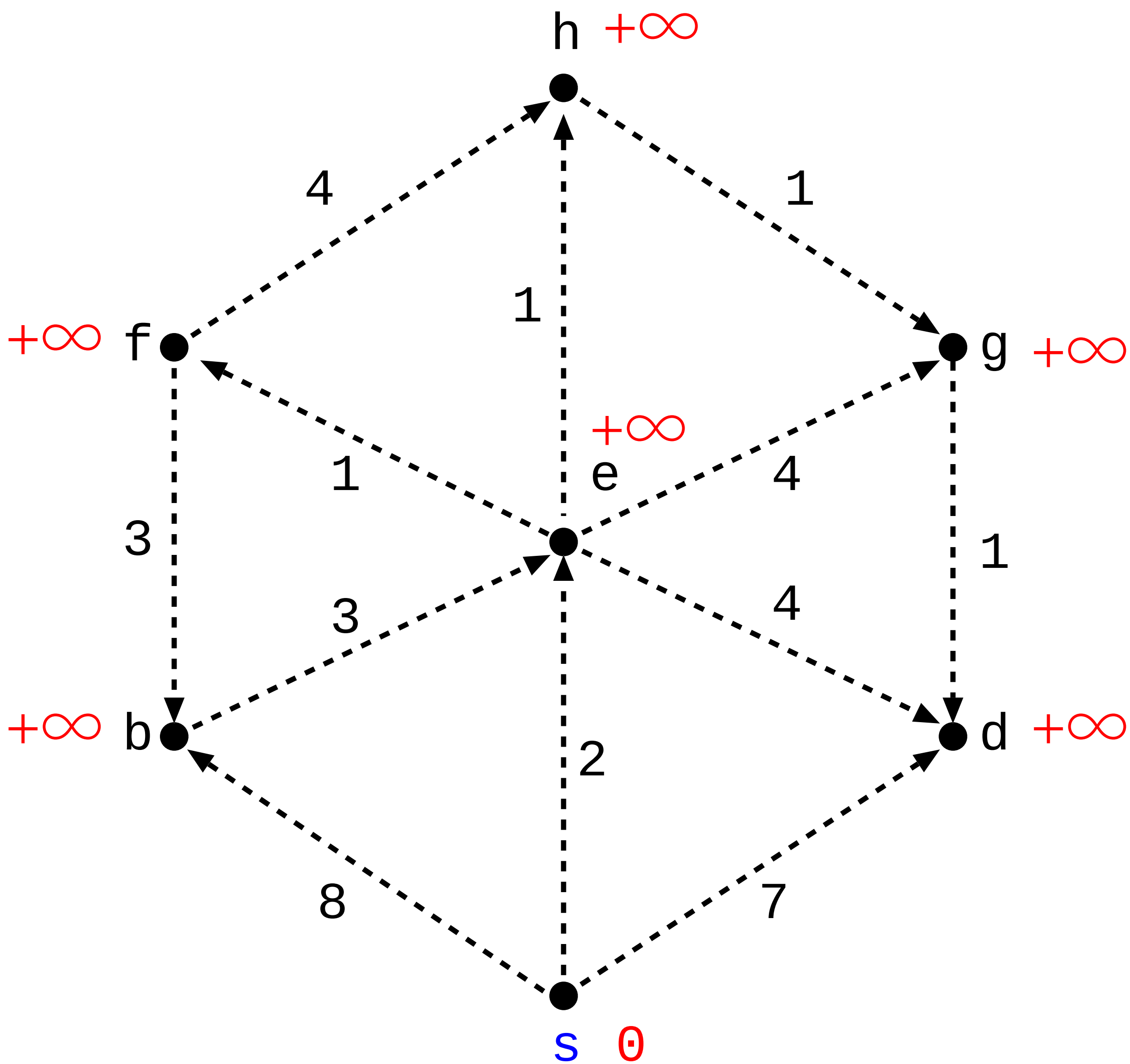
点 u から点 v への有向道 P に対して, あるポテンシャル $p\colon V \to \mathbf{R}$ が存在して, (2.11) で定義される l_p が非負関数であり, かつ, P 上の各枝 a に対して $l_p(a) = 0$ であるとすると, P は点 u から点 v への最短路である.

ダイクストラ法

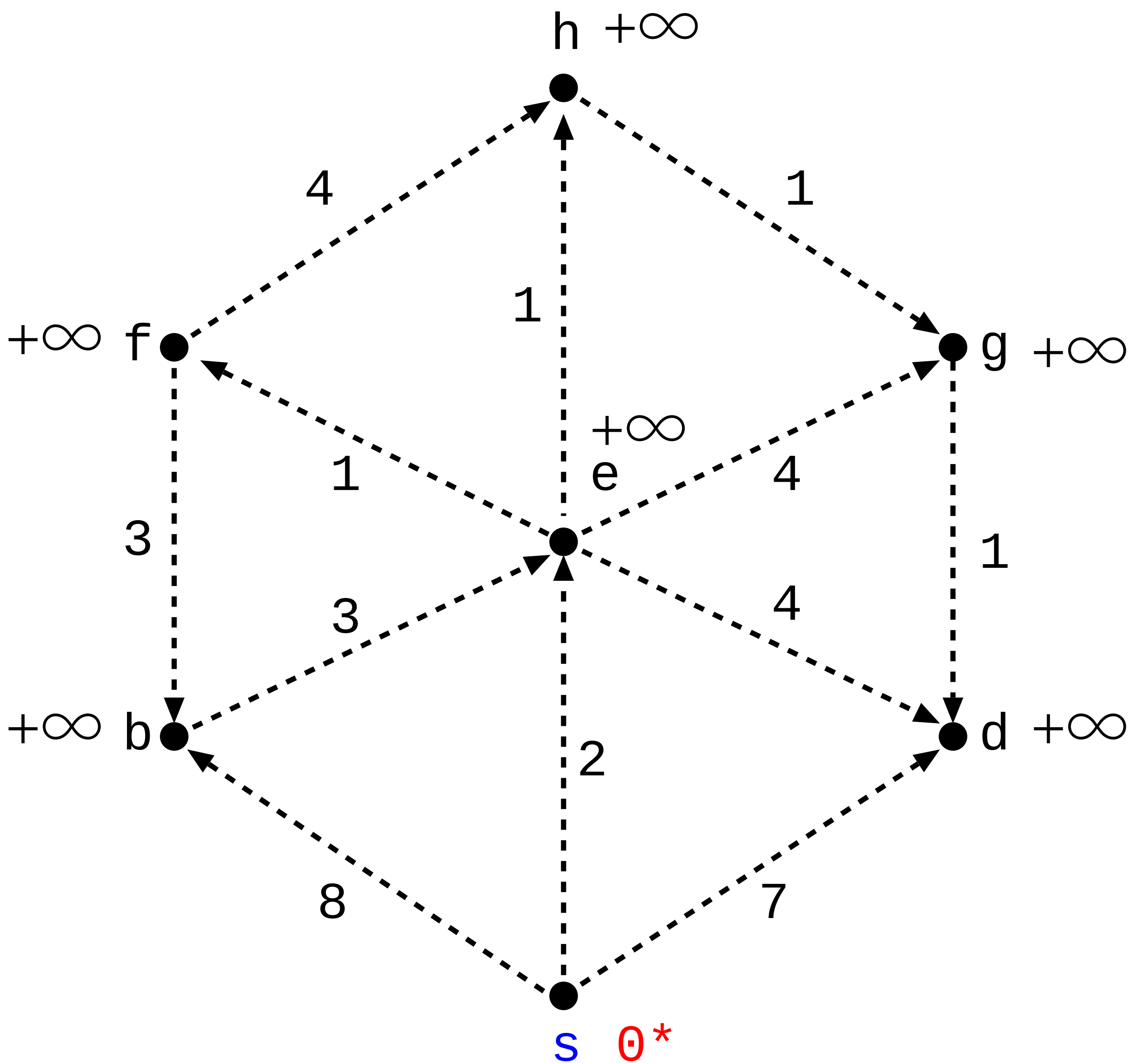
全ての枝の長さが非負の場合, 即ち
$l(a) \geq 0 \; (a \in A)$ の場合には, ダイクストラ法を
用いることができる.

ダイクストラ法は, 与えられた1点から他の全ての点への最短路を求める.

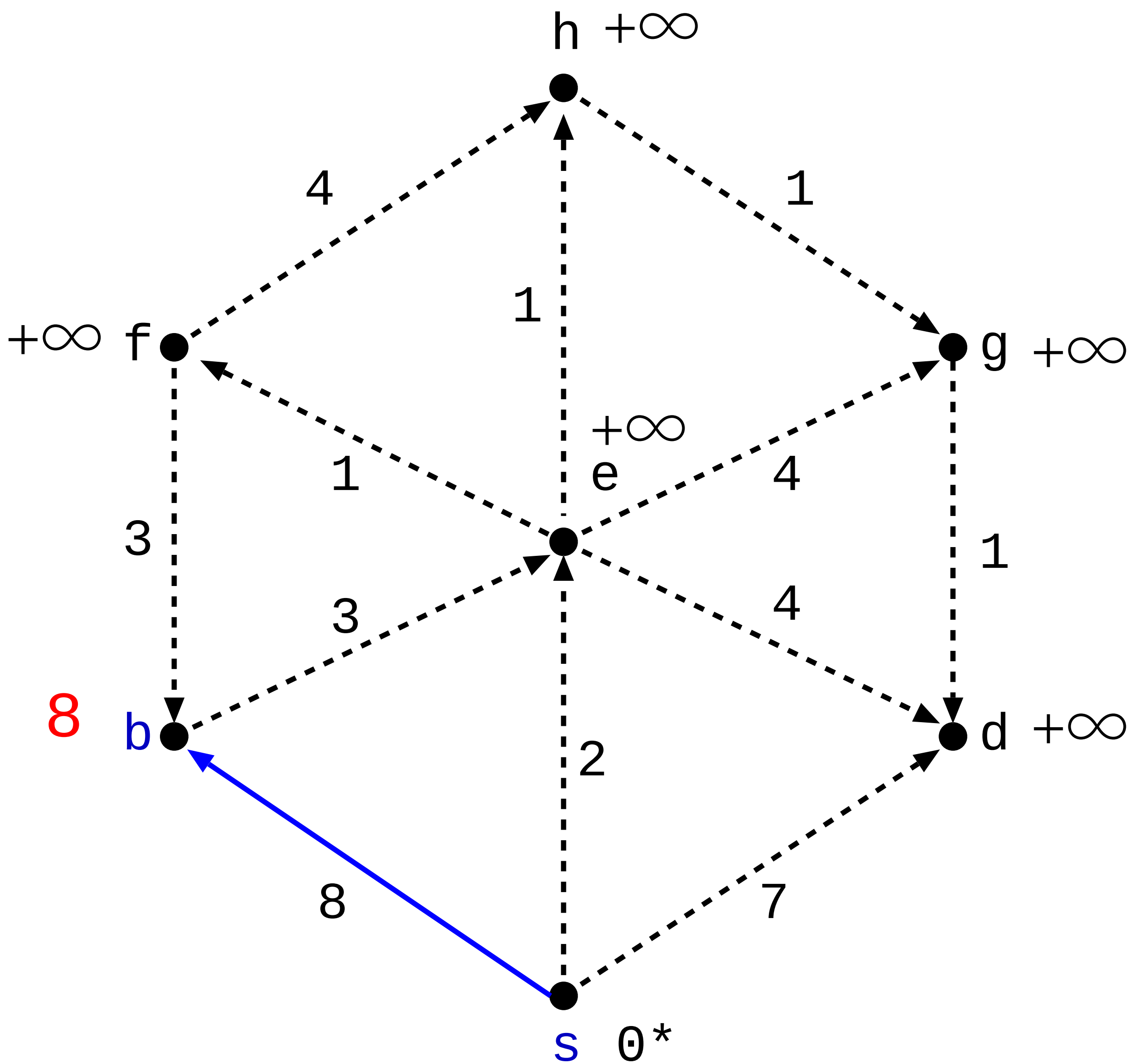
Step 1 終了時



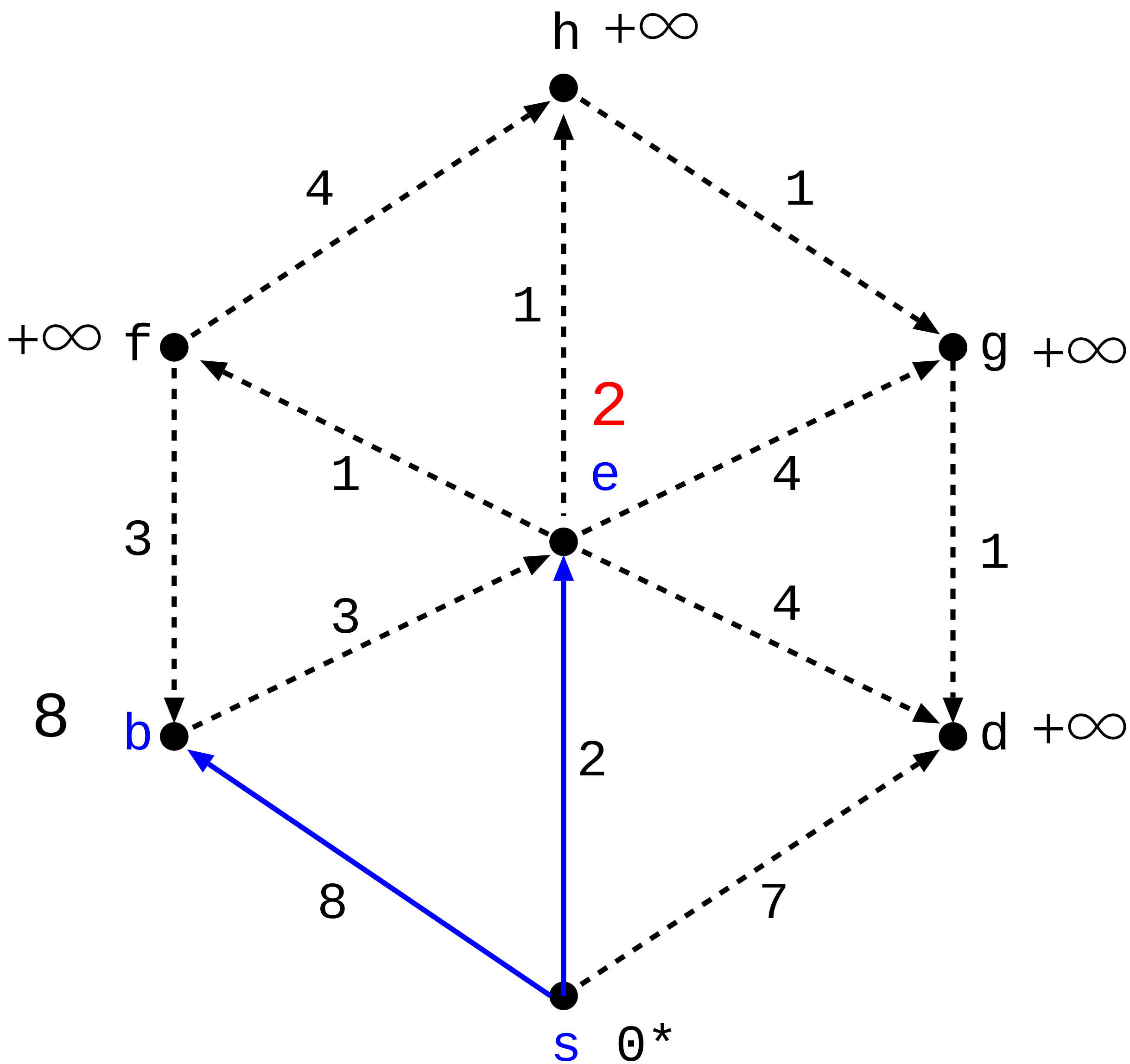
1 回目の Step 2 で w として s が選ばれたとき



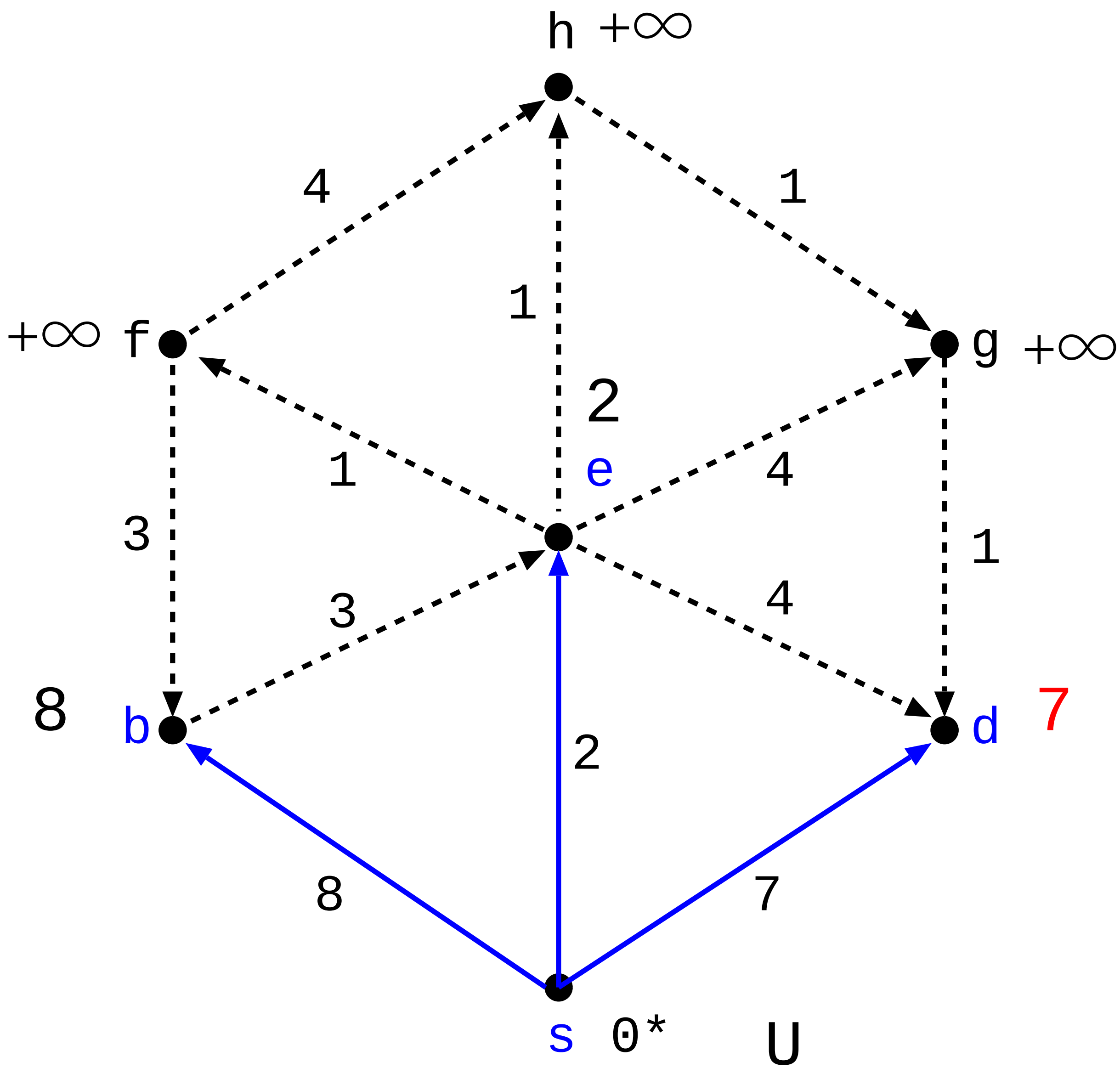
1回目のStep 2: $a = (s, b)$



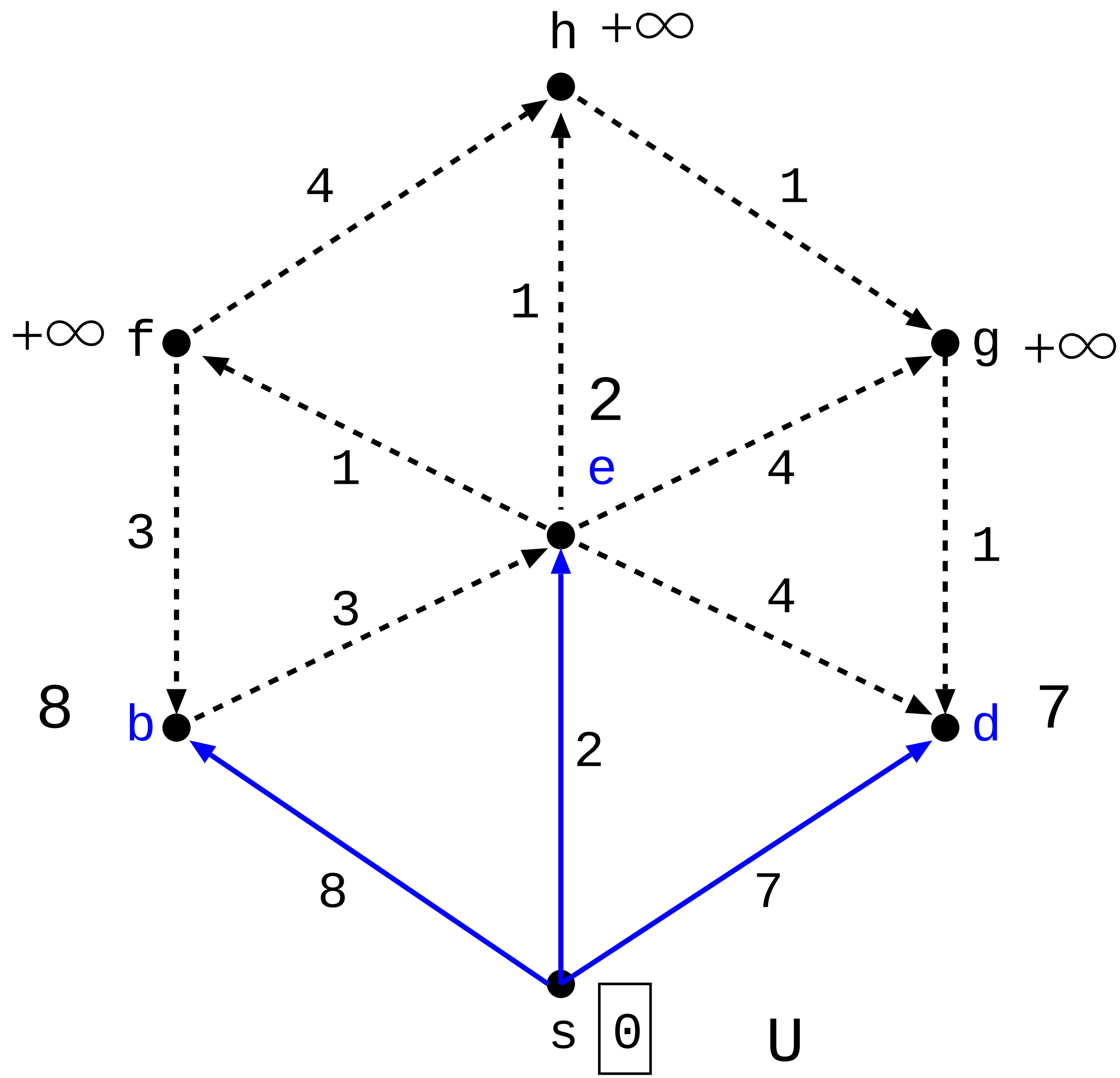
1回目のStep 2: $a = (s, e)$



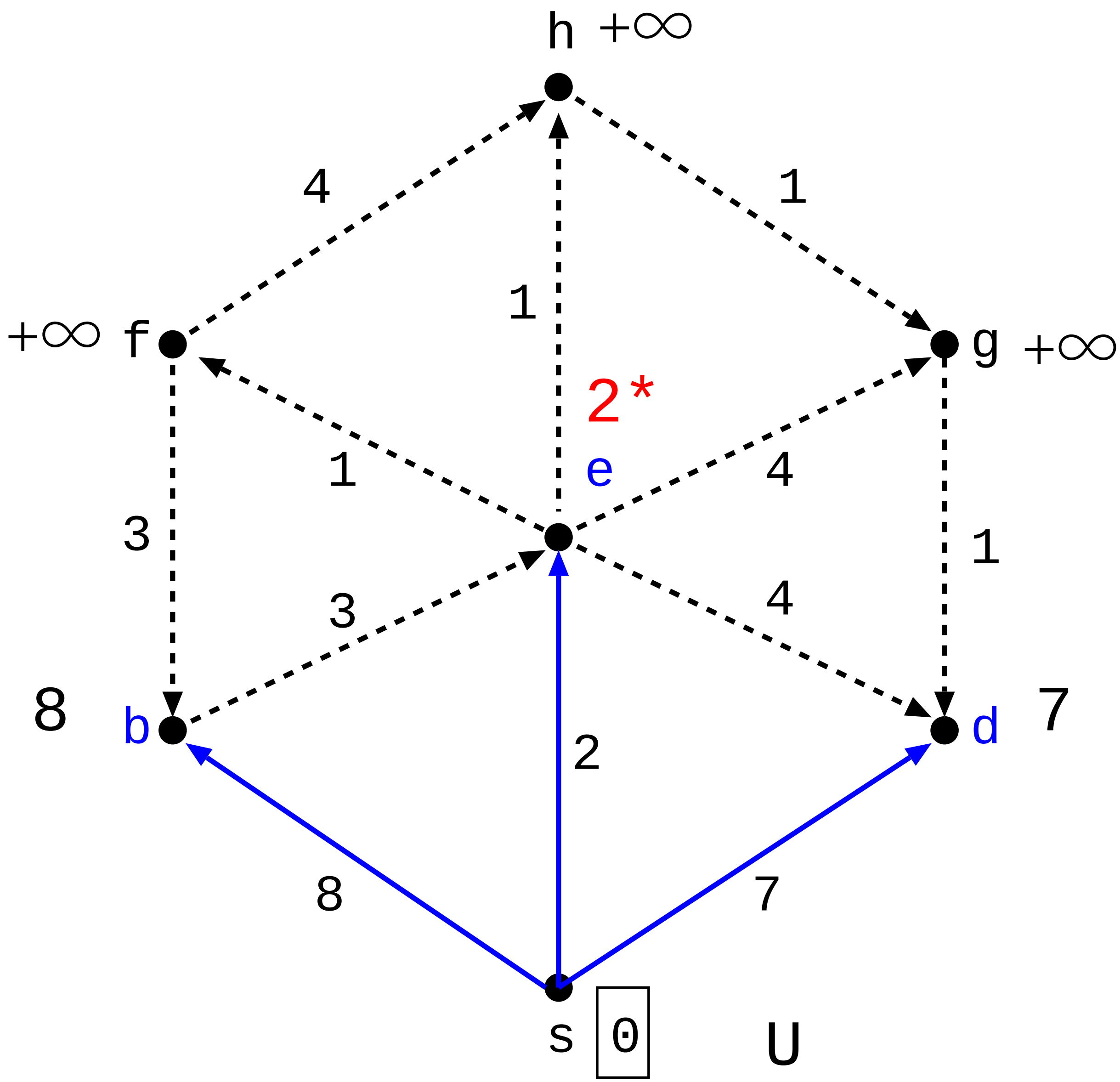
1回目のStep 2: $a = (s, d)$



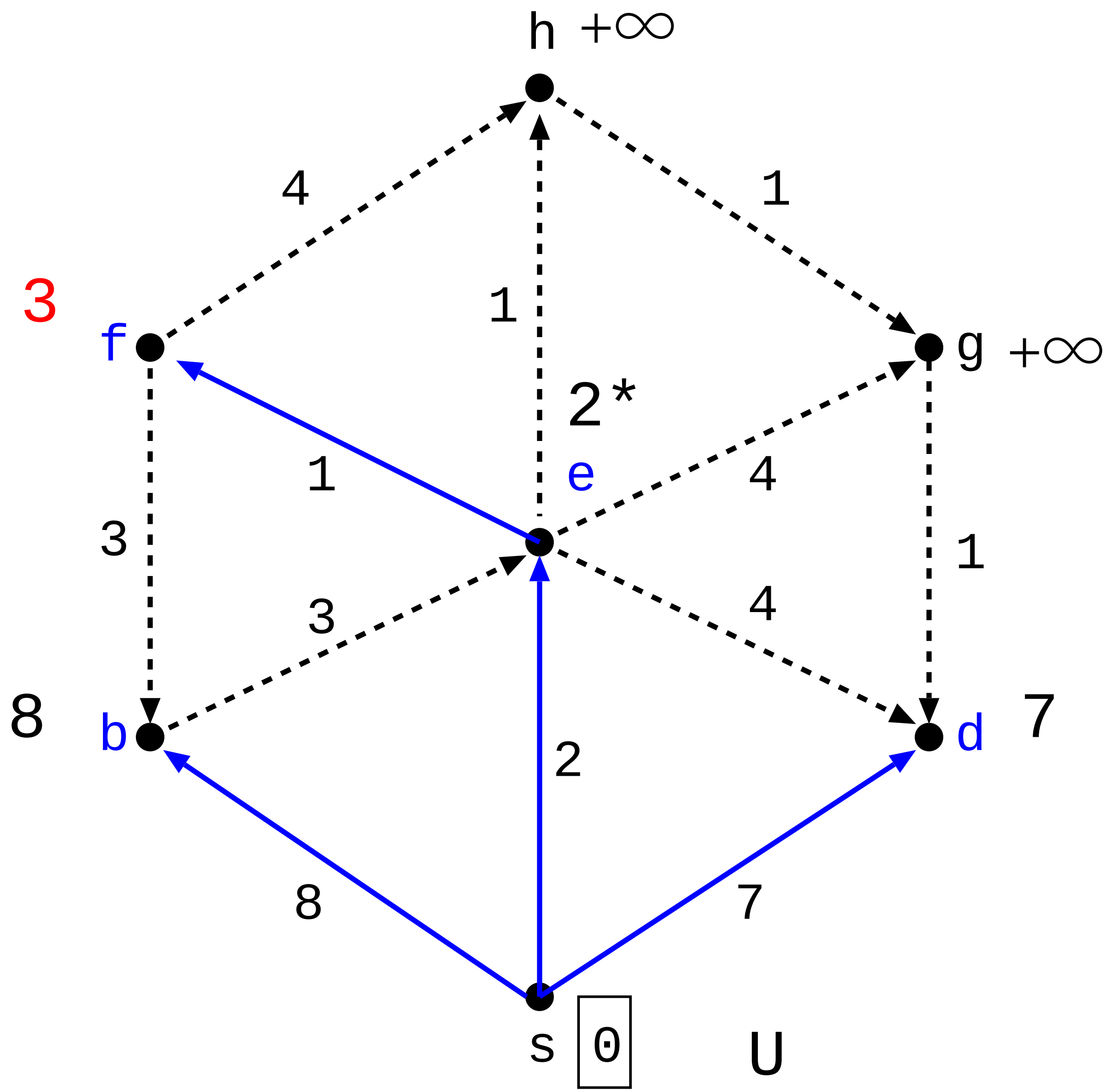
1 回目の Step 3 終了時: $W = \{s\}$, $U = \{b, e, d\}$



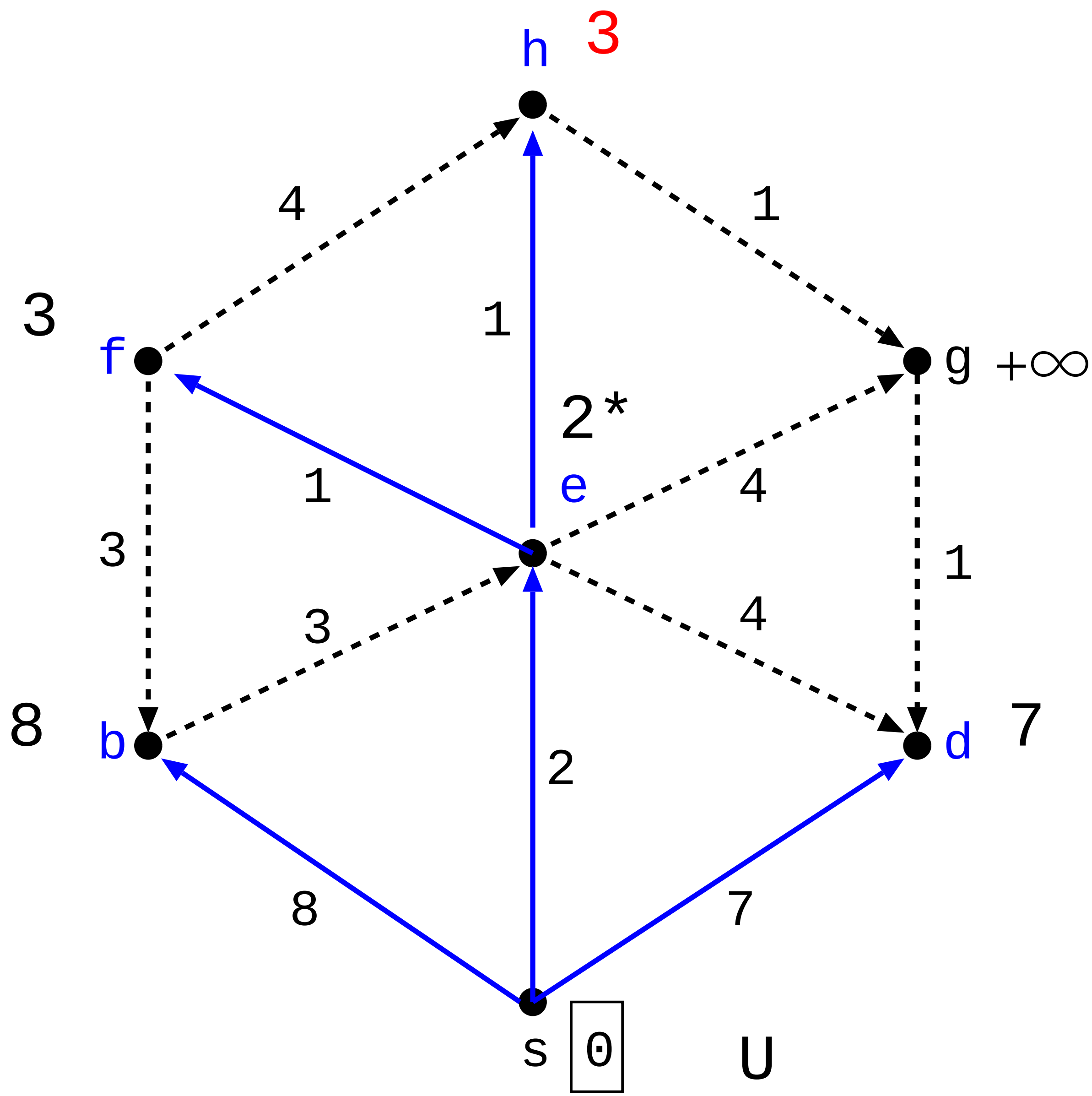
2 回目の Step 2: w として e が選ばれたとき



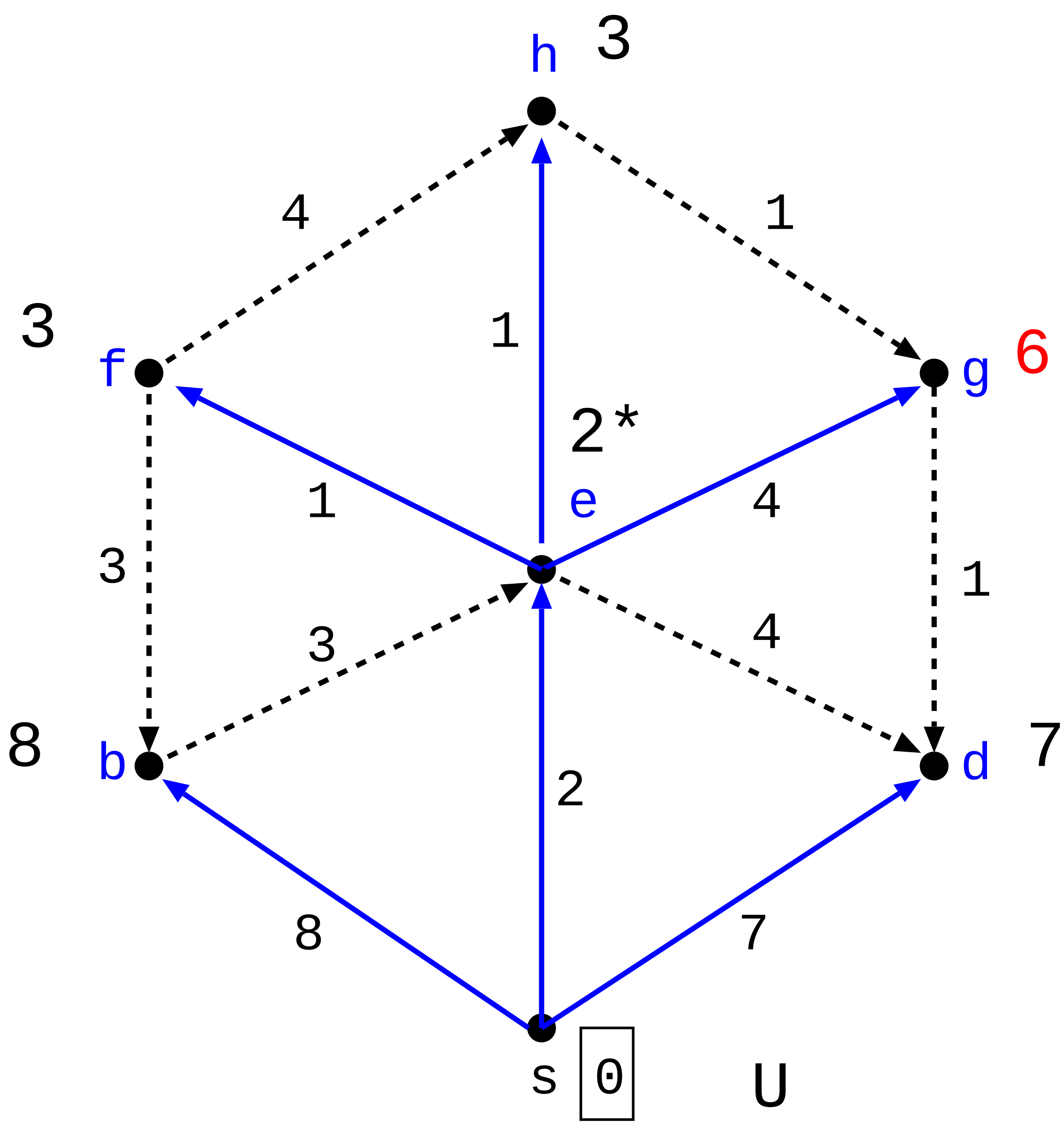
2回目の Step 2: $a = (e, f)$



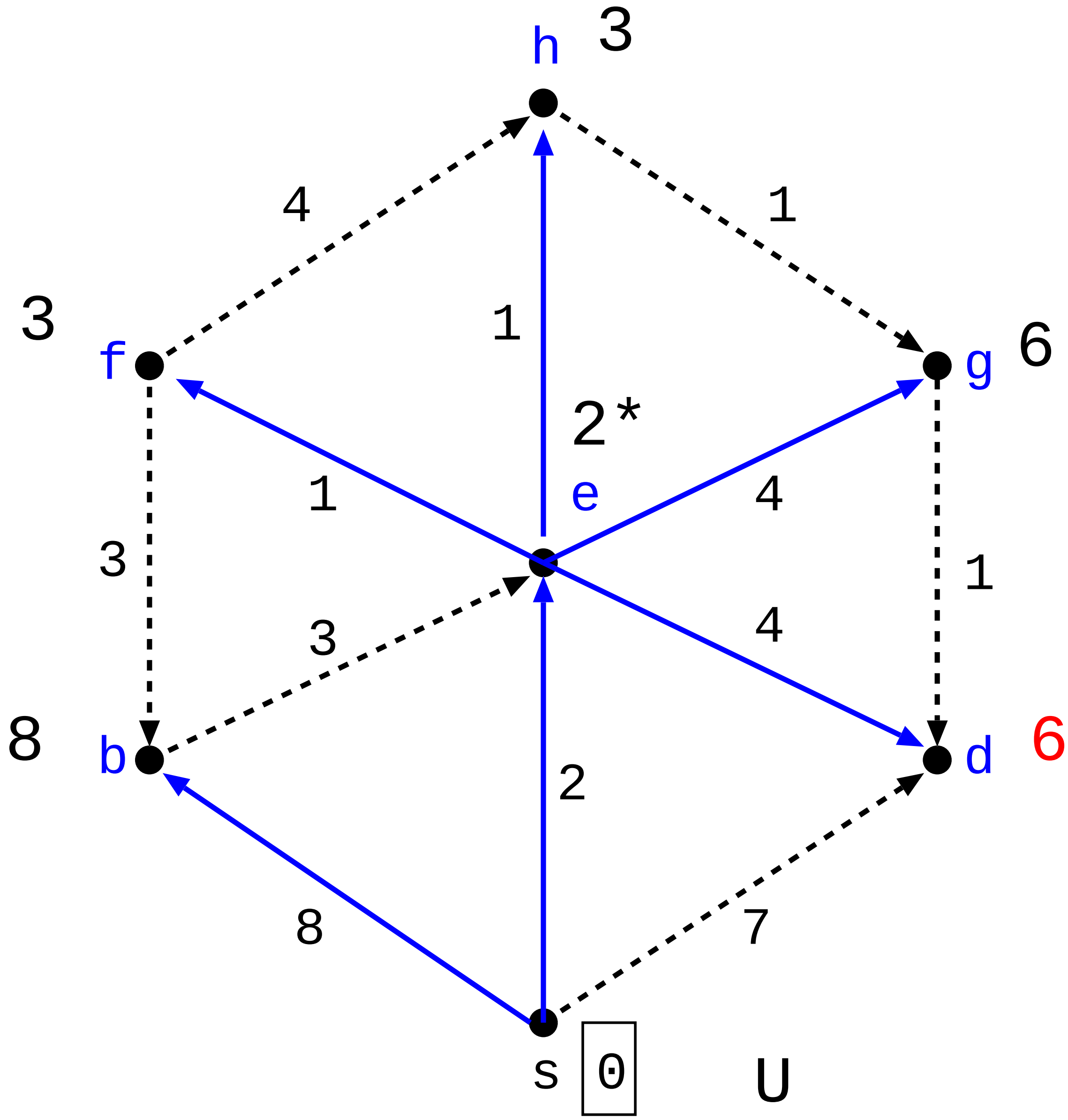
2回目のStep 2: $a = (e, h)$



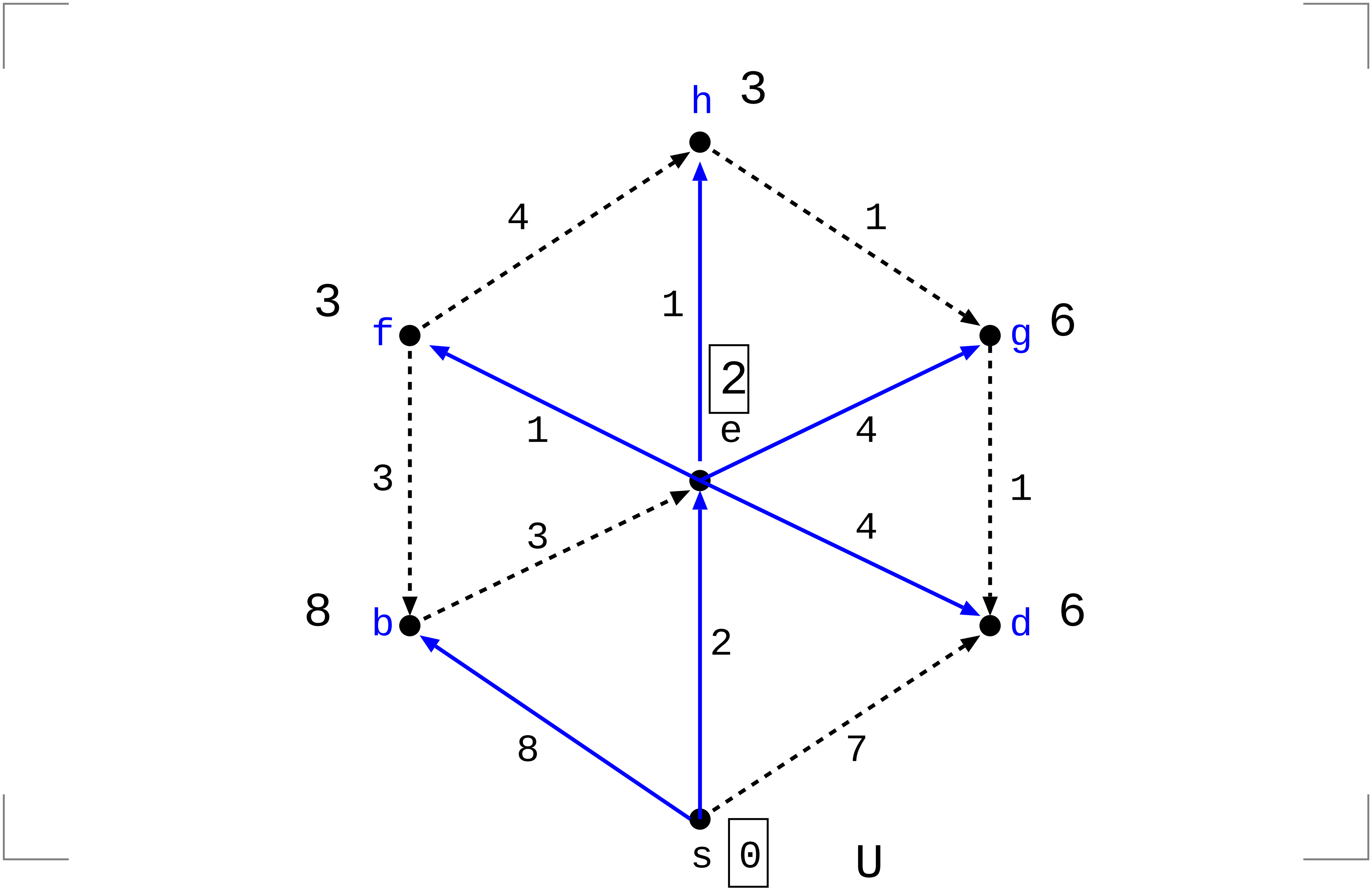
2回目のStep 2: $a = (e, g)$



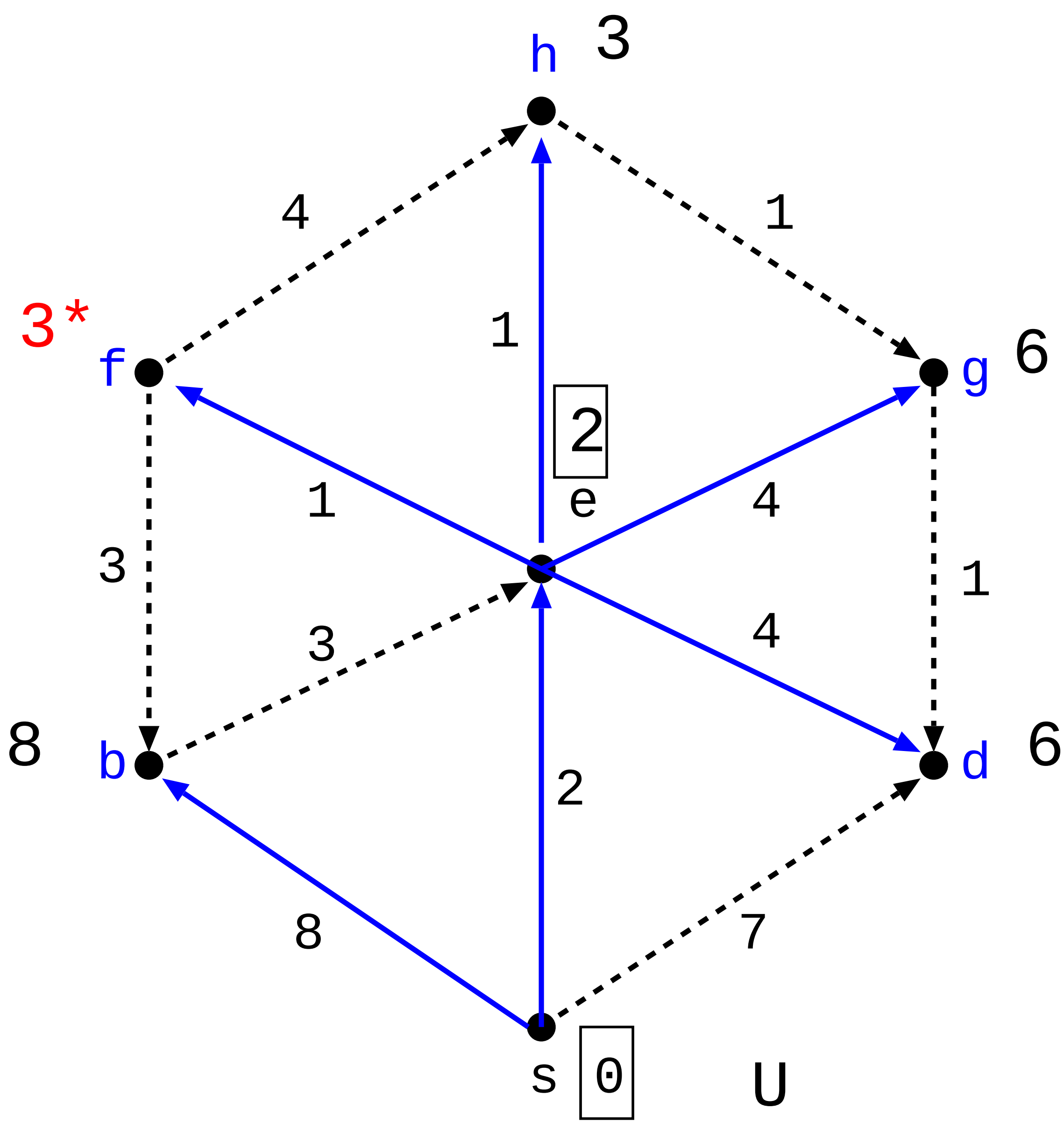
2回目のStep 2: $a = (e, d)$



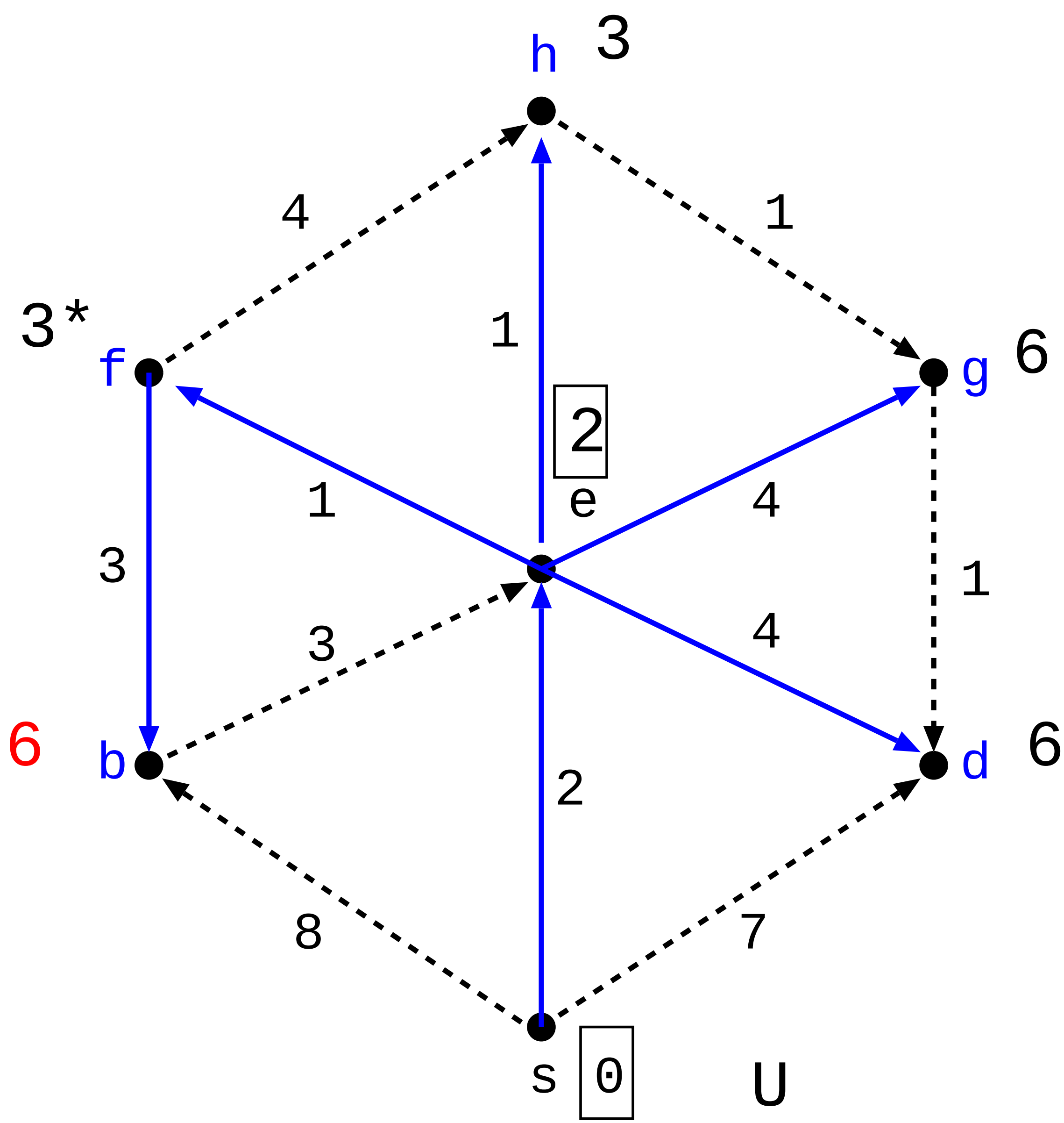
2 回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e\}$, $U = \{b, d, f, g, f\}$



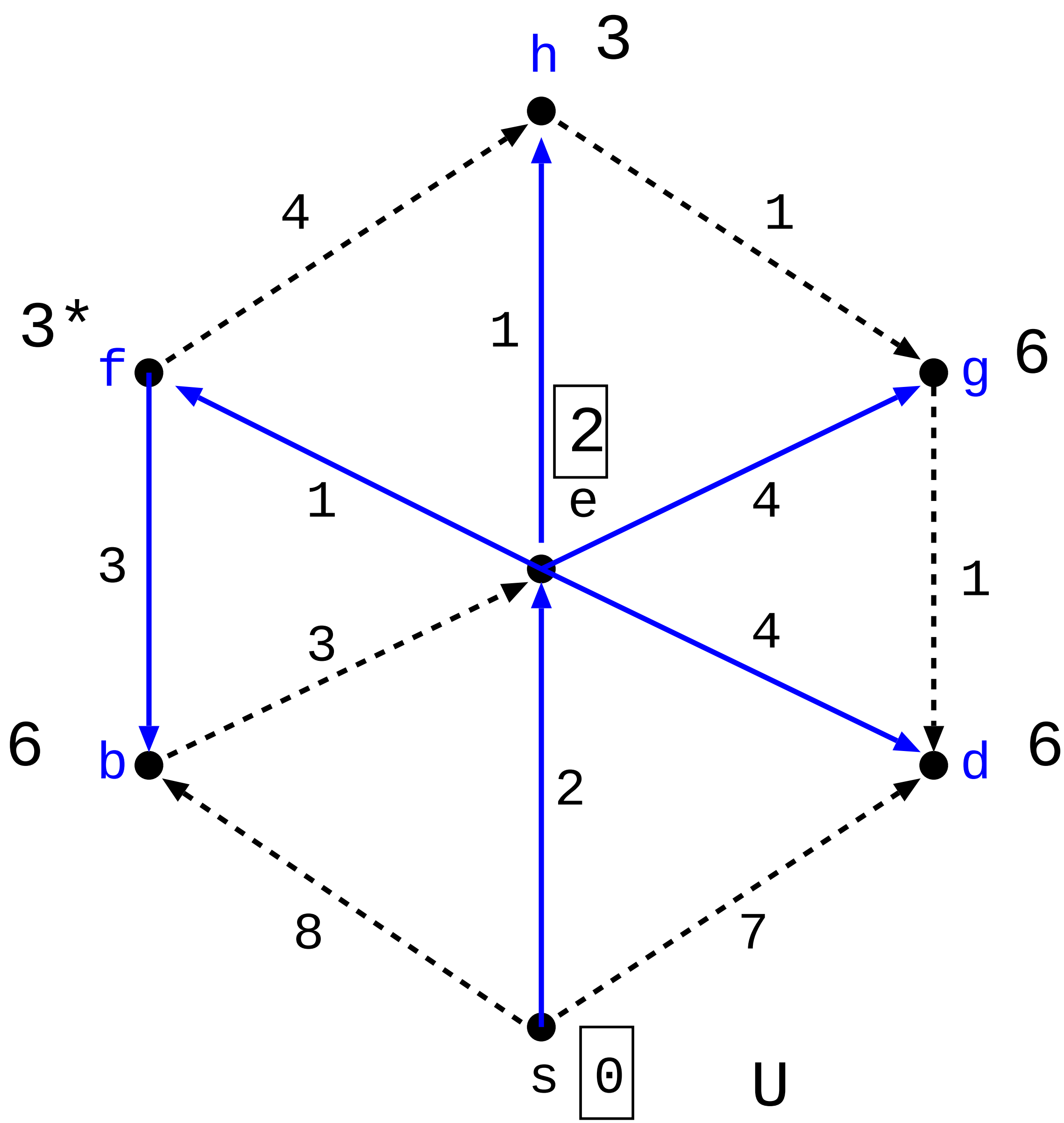
3 回目の Step 2: w として f が選ばれたとき



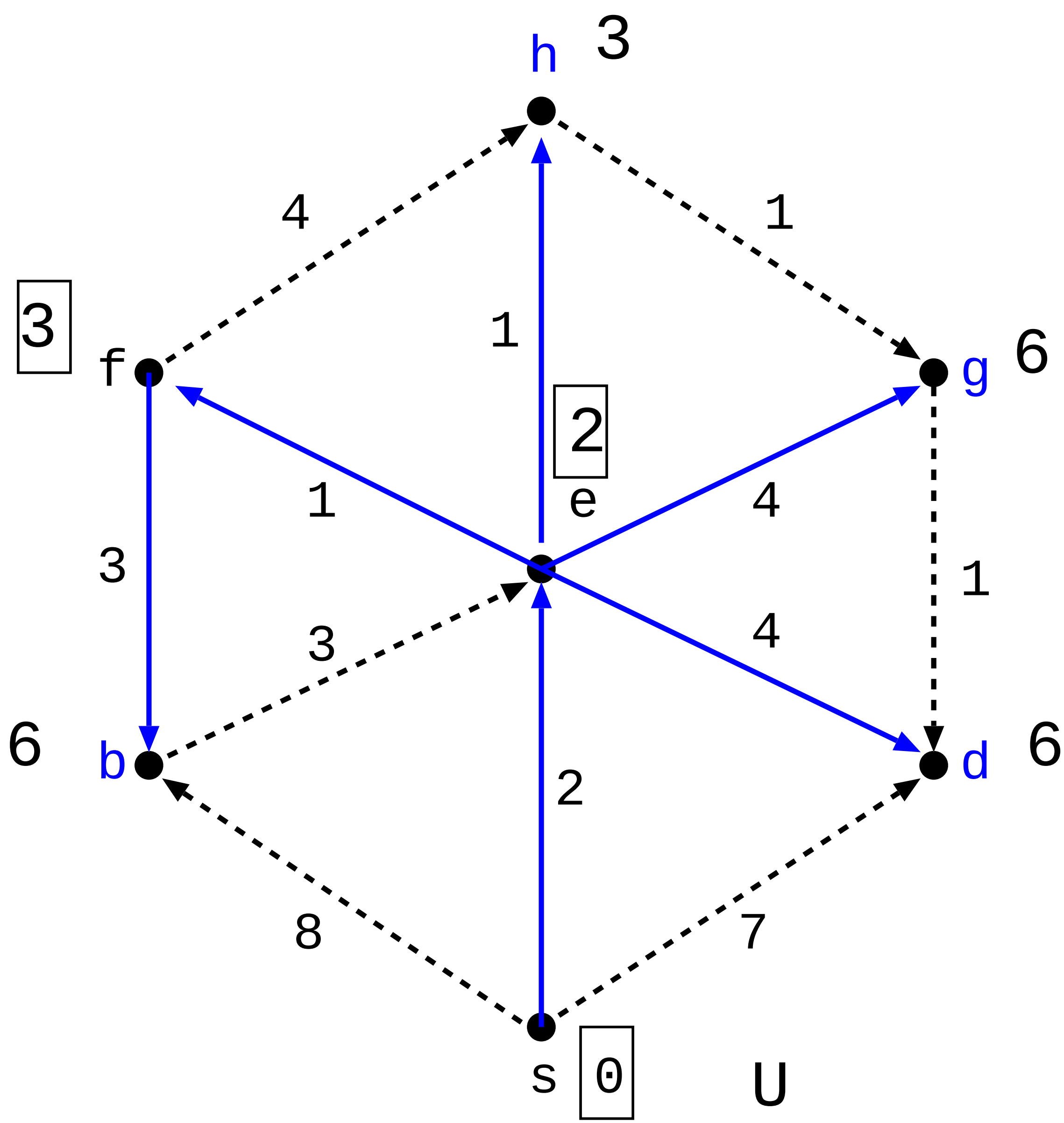
3回目のStep 2: $a = (f, b)$



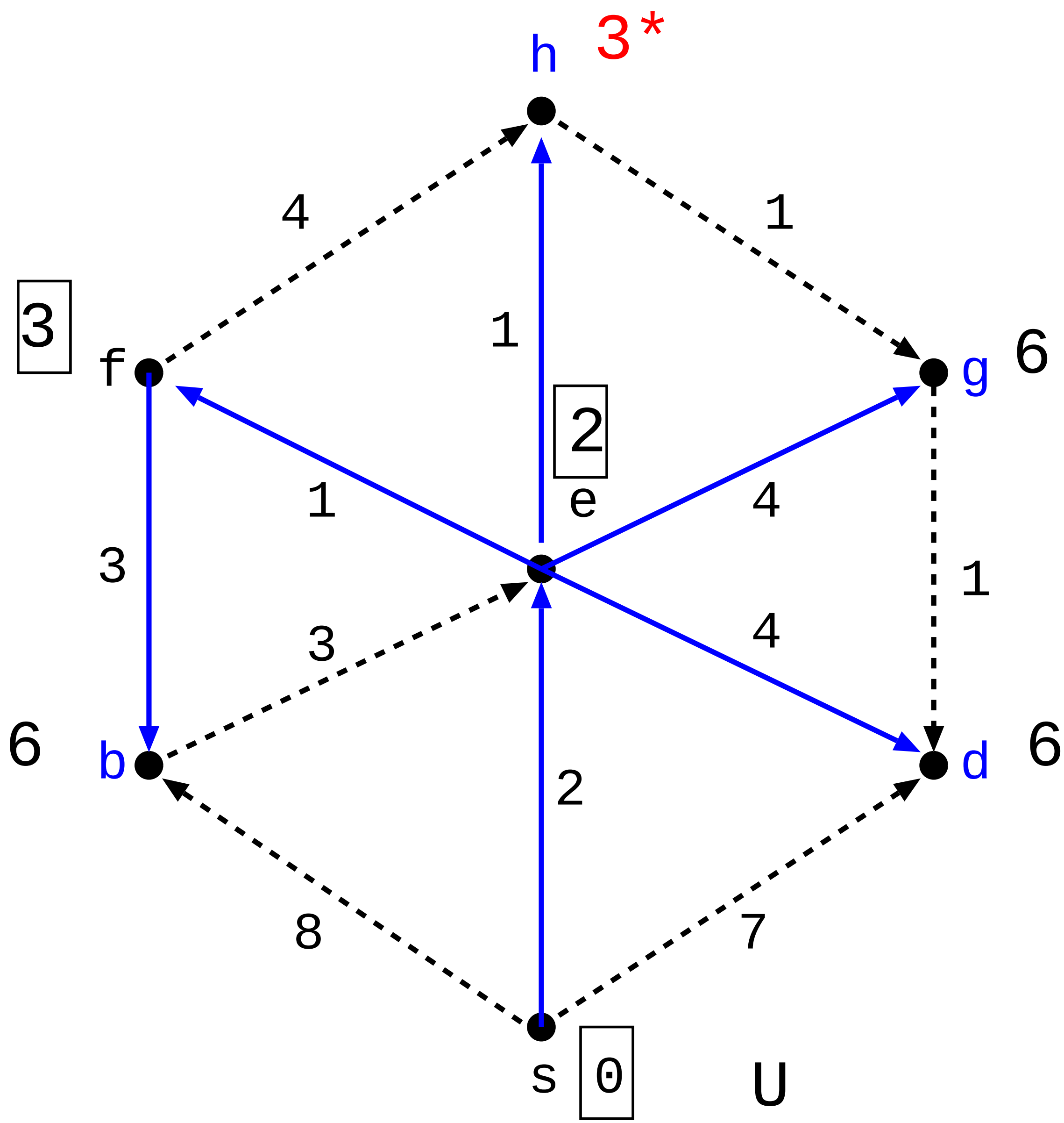
3回目のStep 2: $a = (f, h)$



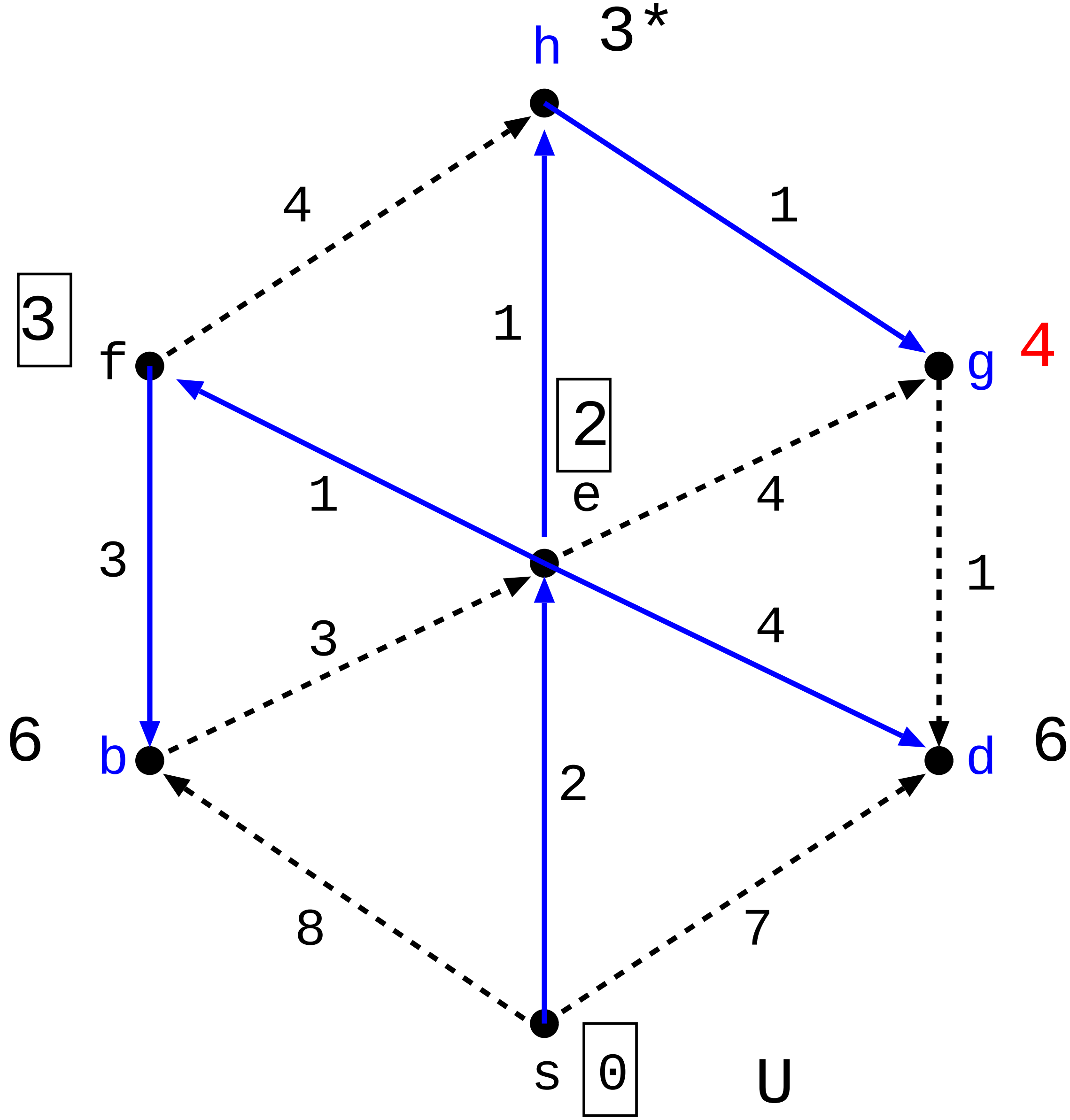
3 回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e, f\}$, $U = \{b, d, g, h\}$



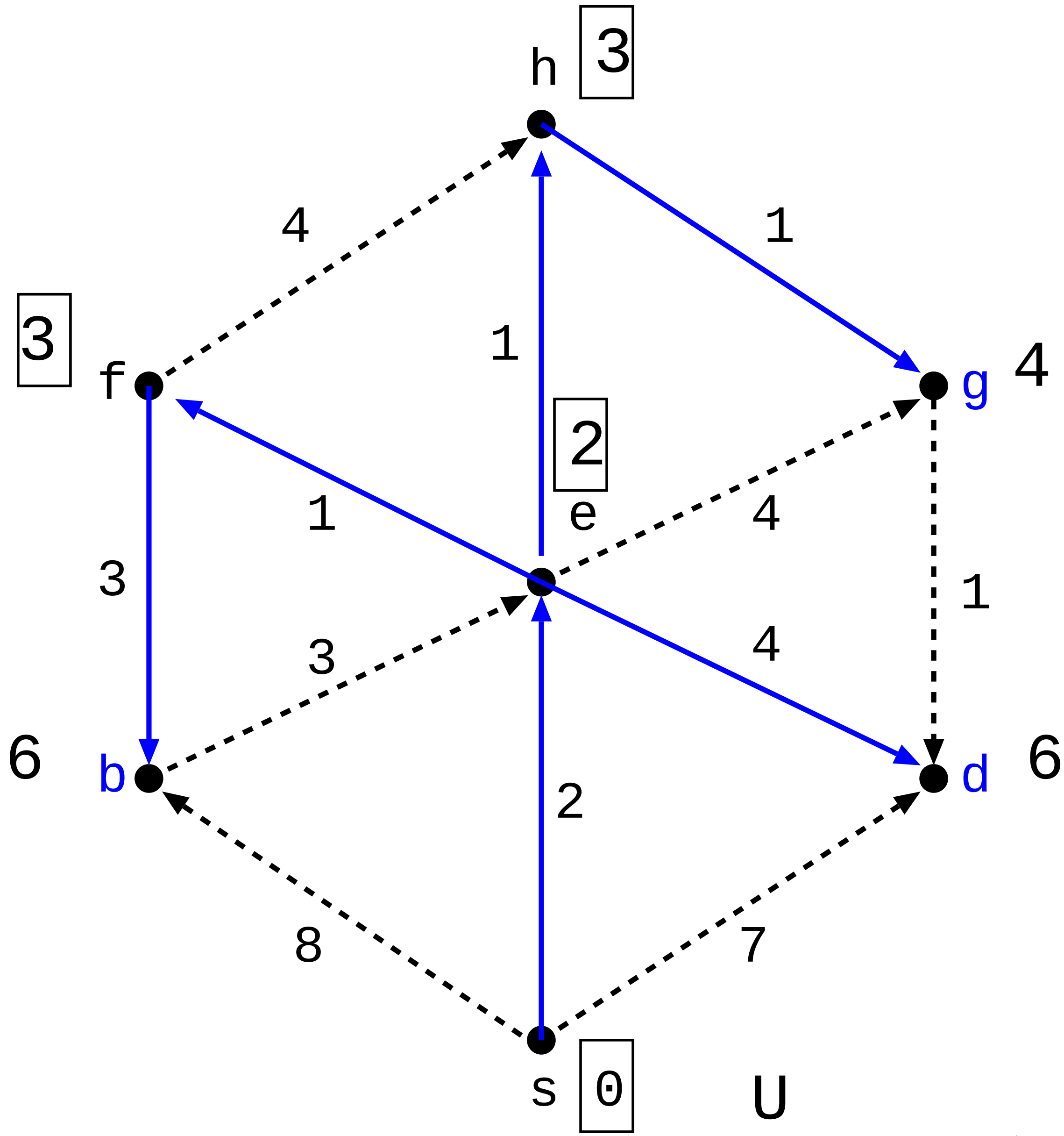
4 回目の Step 2: w として h が選ばれたとき



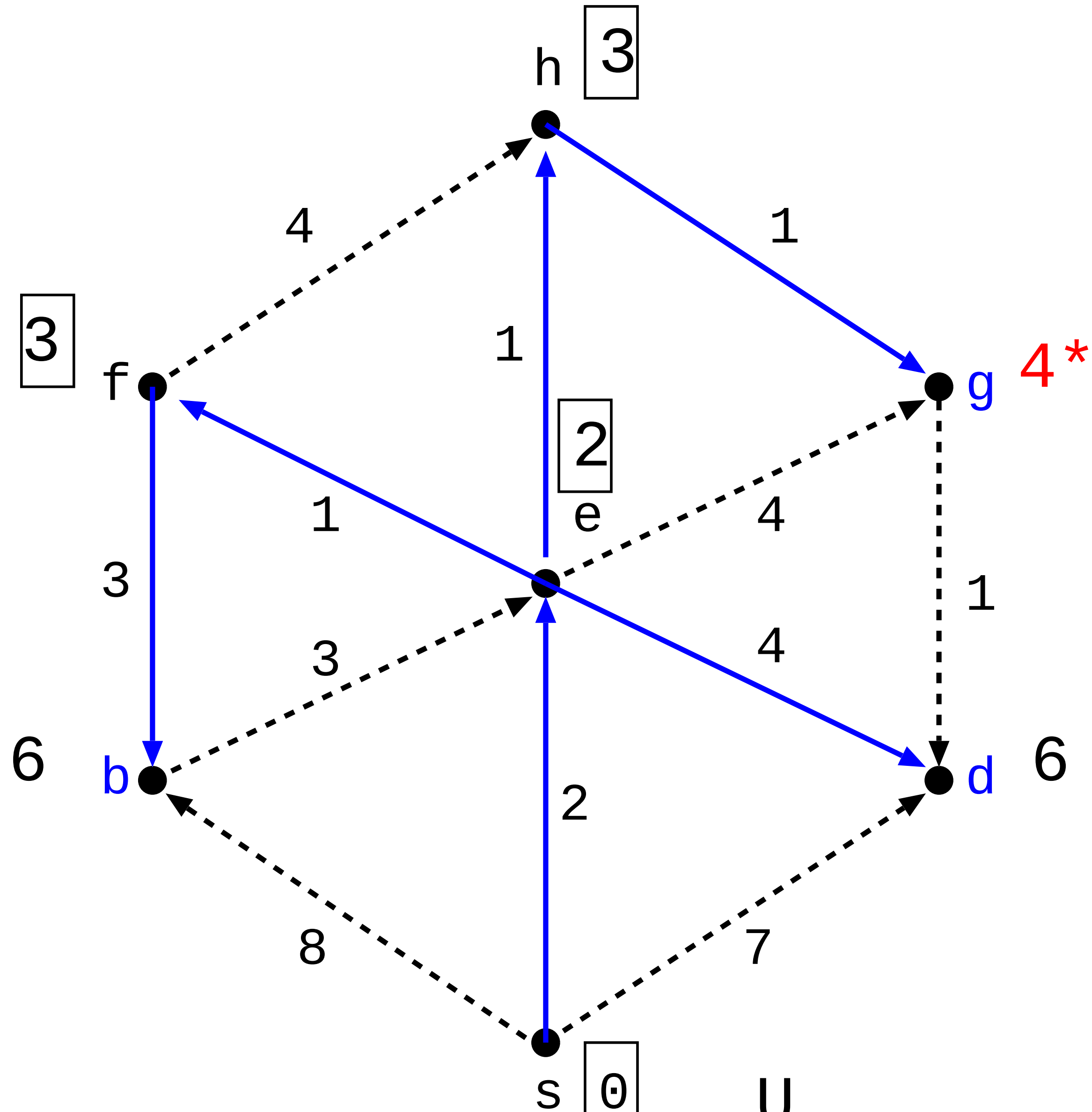
4回目のStep 2: $a = (h, g)$



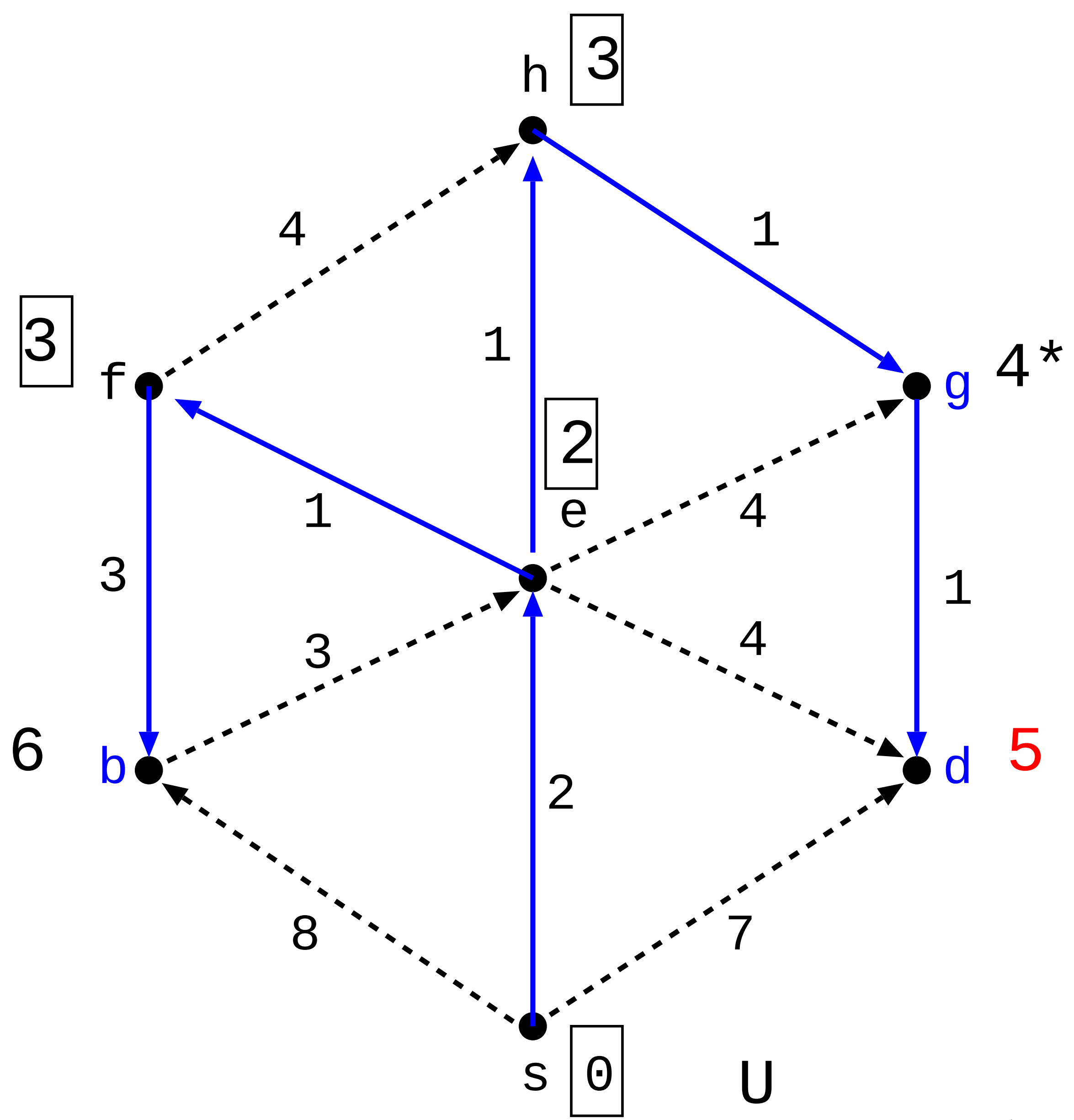
4 回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e, f, h\}$, $U = \{b, d, g\}$



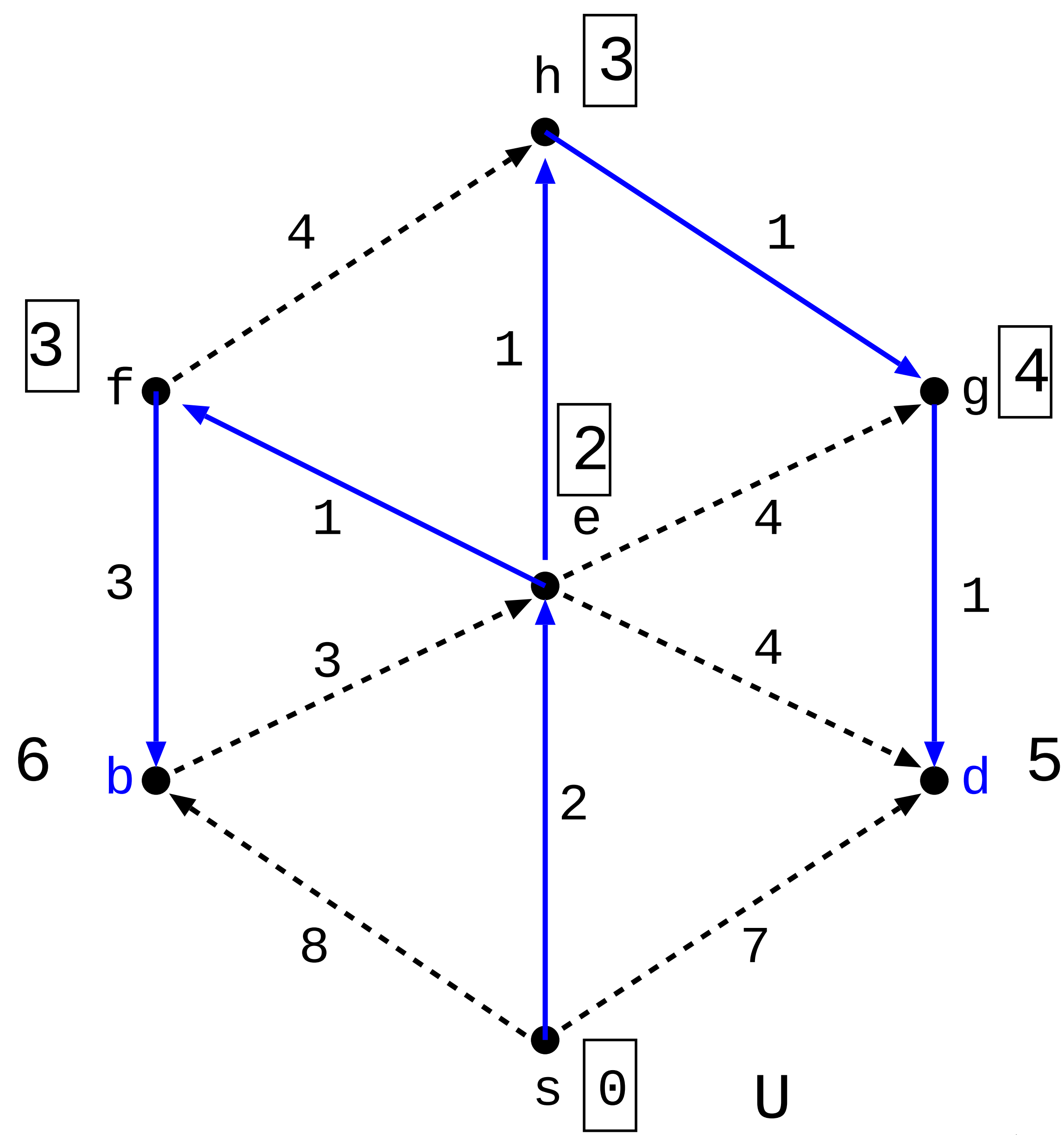
5 回目の Step 2: w として g が選ばれたとき



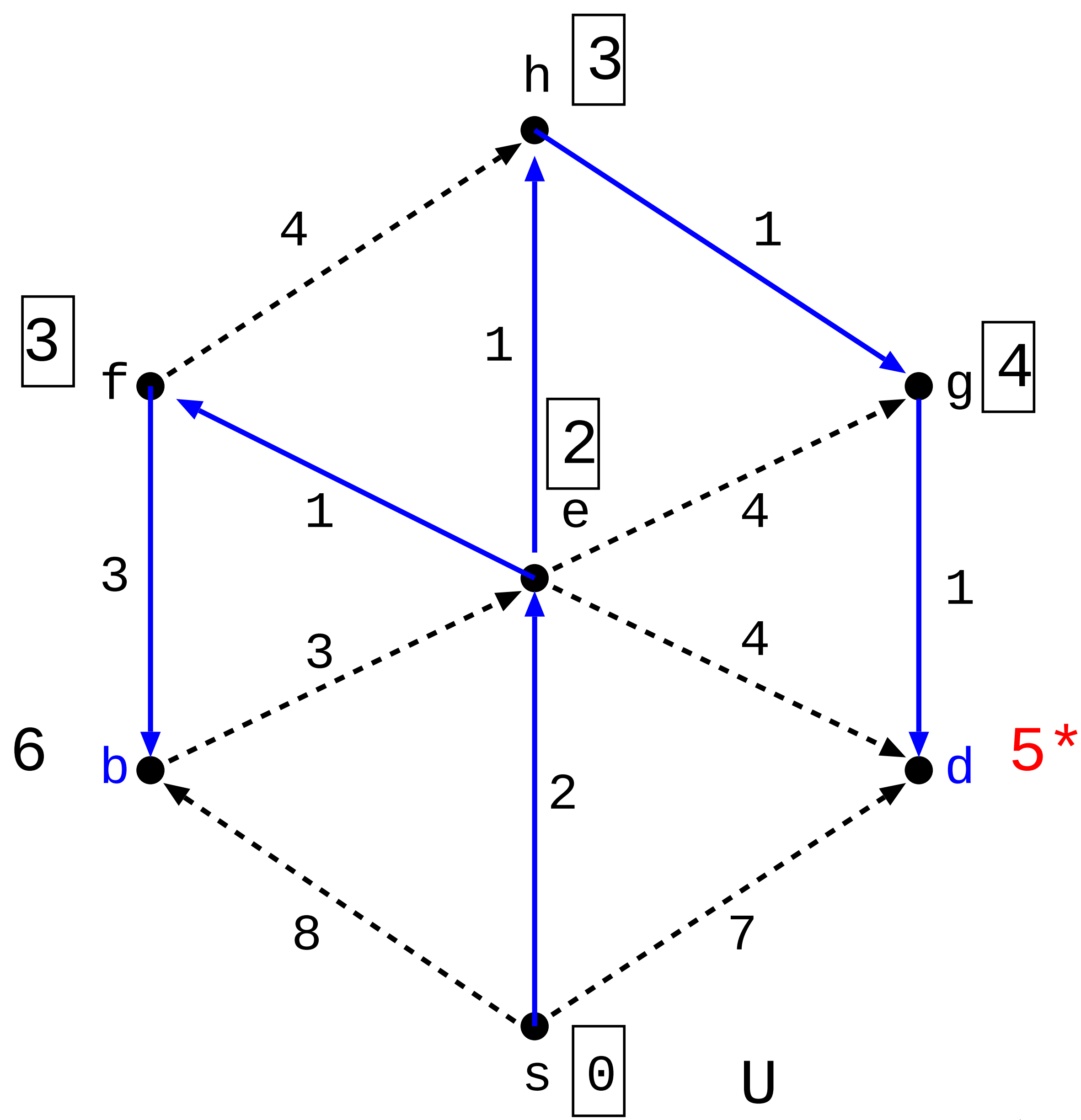
5回目の Step 2: $a = (g, d)$



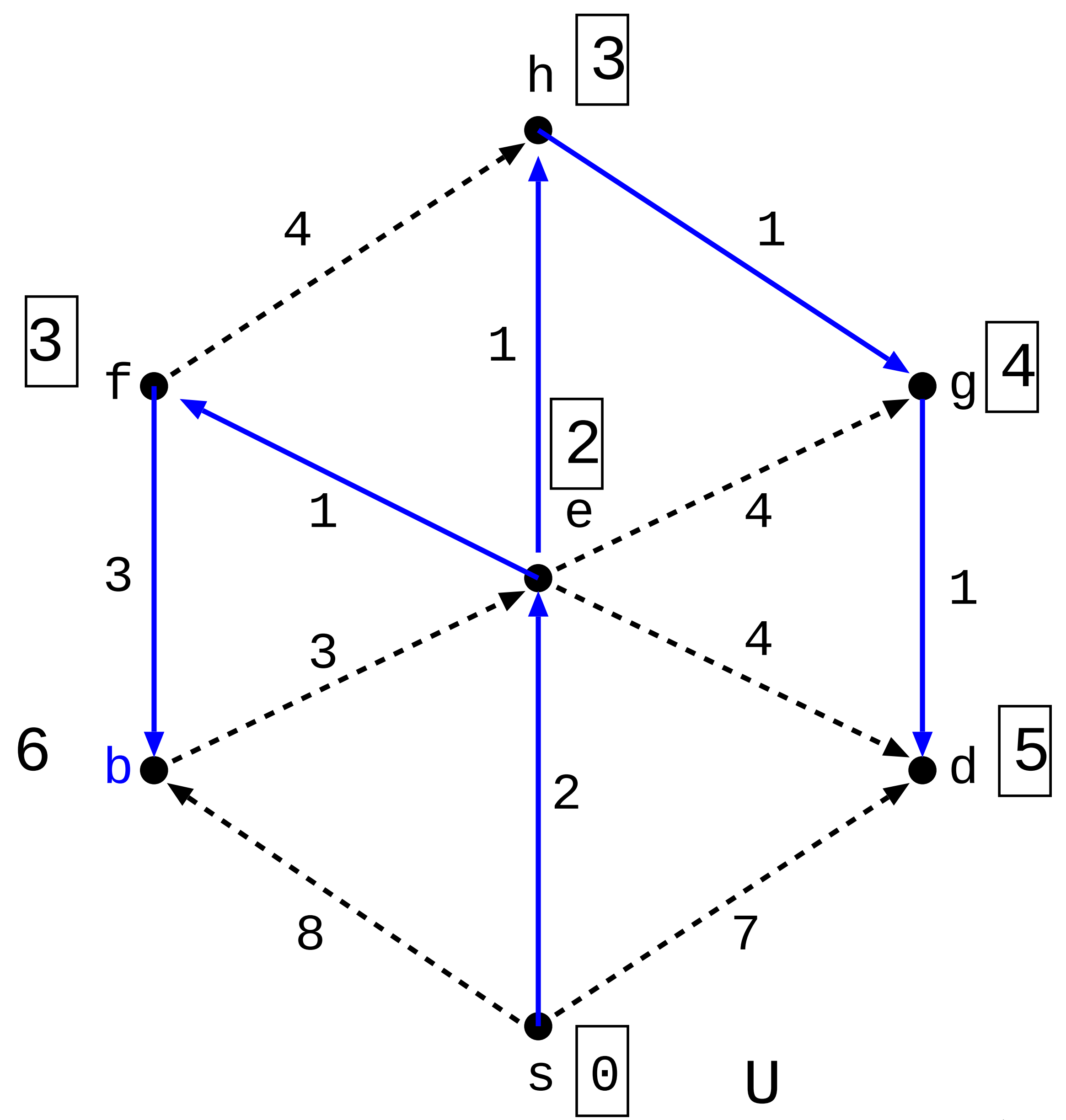
5 回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e, f, h, g\}$, $U = \{b, d\}$



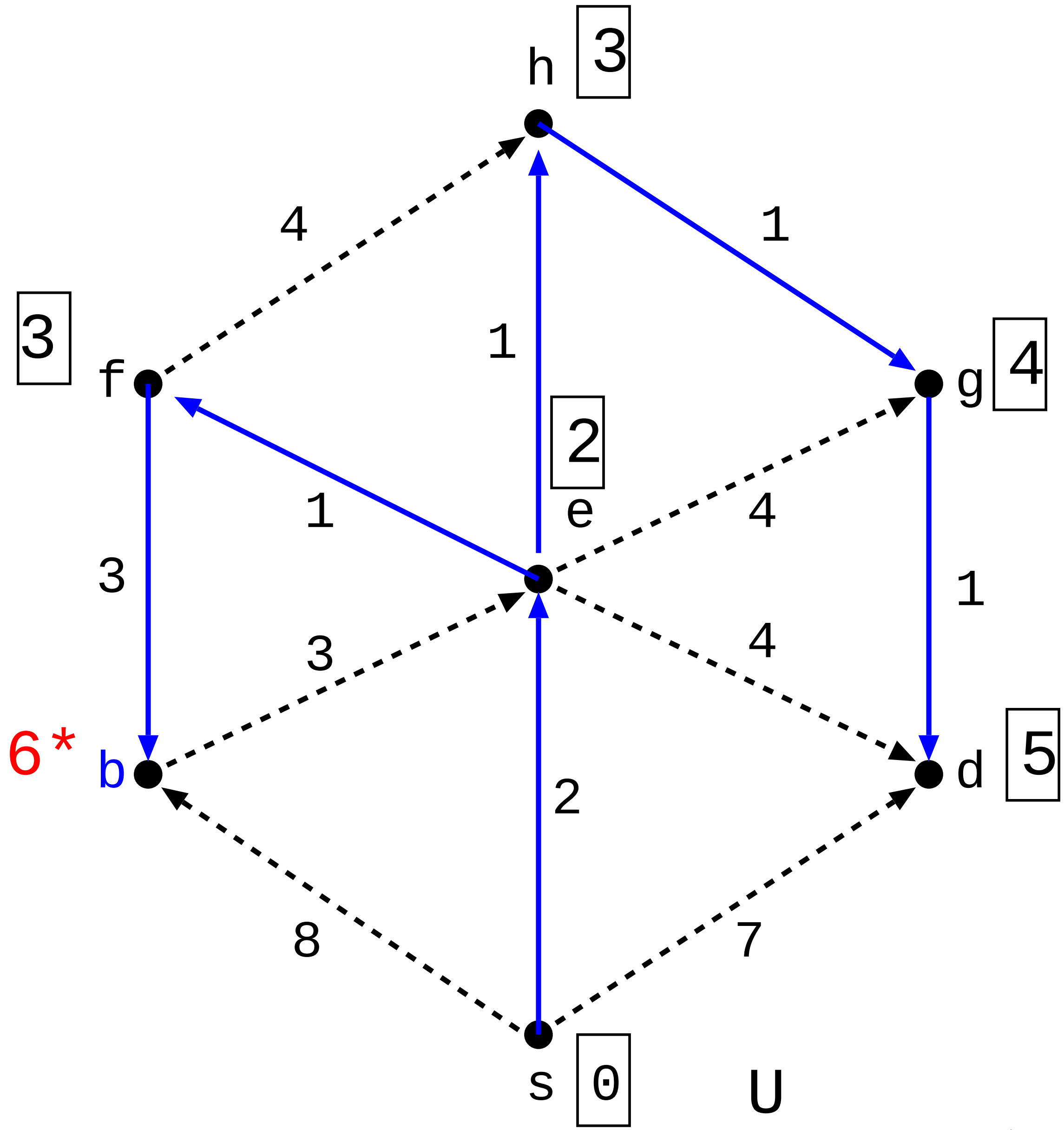
6 回目の Step 2: w として d が選ばれたとき



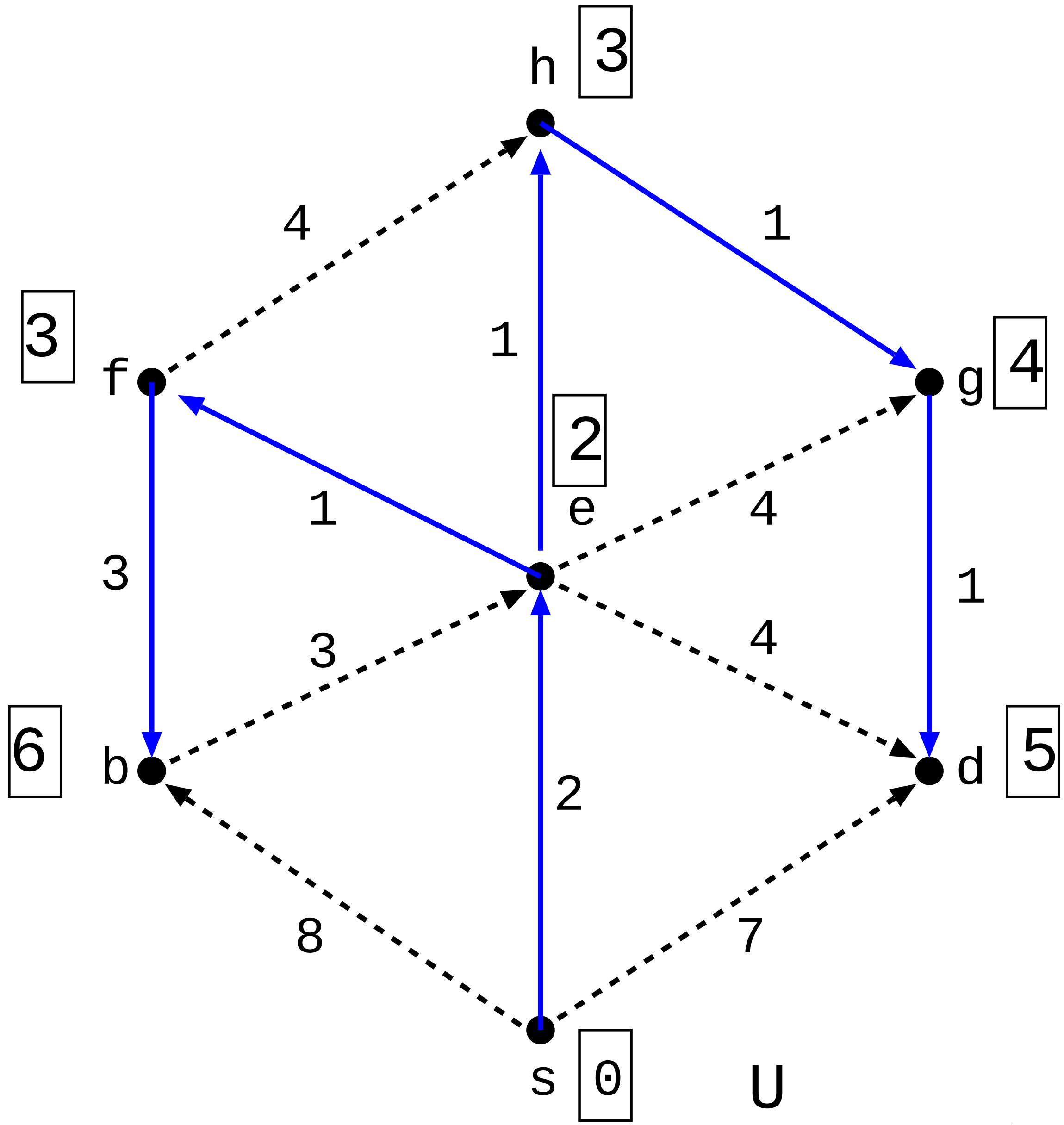
6 回目の Step 3 終了時: $W = \{s, b, d, f, g, h\}$, $U = \{b\}$



7 回目の Step 2: w として b が選ばれたとき



7回目の Step 3 終了時: $W = \{s, b, d, f, g, h\}$, $U = \emptyset$



最適性のチェック

補題 2.2 の条件が成立しているかどうか?