

グラフとネットワーク (第2回)

安藤和敏

2005.04.15

1.1. グラフの定義

1.1.1. グラフの定義

一つのグラフは、以下の述べる4つの構成要素からなる。

- (1) 集合 V ,
- (2) 集合 A ,
- (3) 写像 $\partial^+ : A \rightarrow V$,
- (4) 写像 $\partial^- : A \rightarrow V$

これを合わせて、グラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ と書く。誤解のおそれがないときは、 $G = (V, A)$ と書く。

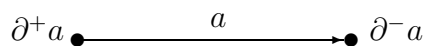
V を点集合と呼び、 V の要素は点と呼ばれる。

A を枝集合と呼び、 A の要素は枝と呼ばれる。

枝 $a \in A$ に対して、 $\partial^+ a$ を、 a の始点と呼び、 $\partial^- a$ を a の終点と呼ぶ。

1.1.2. グラフの幾何学的表現

グラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ が与えられたとき、各枝 $a \in A$ に対して下図のように、 $\partial^+ a$ から $\partial^- a$ にむかう矢線を描く。こうして得られる線図をグラフ G の幾何学的表現と呼ぶ。



例 1.1: $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ が、

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ で、 ∂^+ と ∂^- は以下のように与えられているとする。

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
∂^+	v_1	v_1	v_1	v_5	v_5	v_5	v_3	v_4	v_3	v_4
∂^-	v_4	v_2	v_2	v_1	v_4	v_2	v_2	v_3	v_5	v_4

このとき、 G の幾何学的表現の一つは、図 1.1 のようになる。

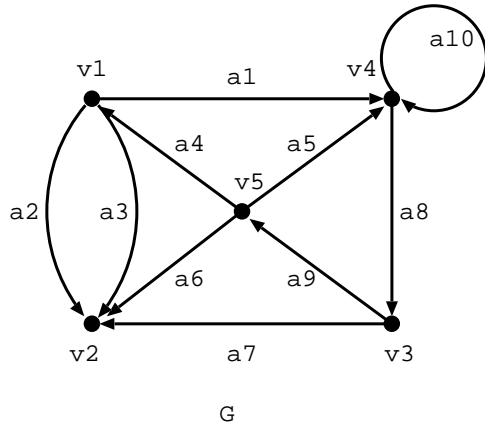


図 1.1: グラフ G の幾何学的表現

1.1.3. 有向グラフと無向グラフ

1.1.4. 同型

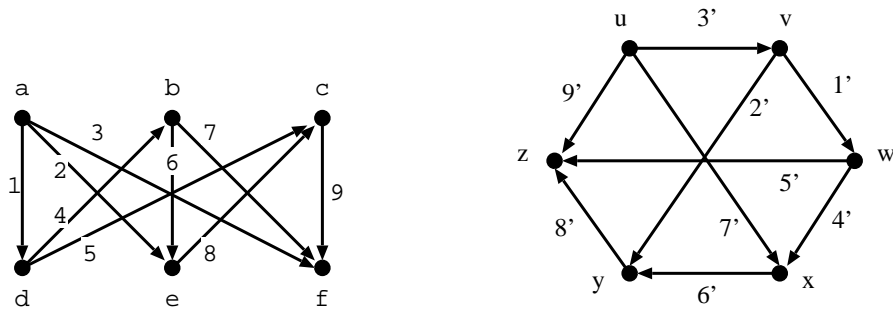
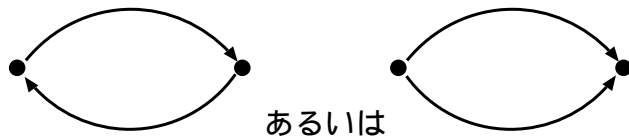


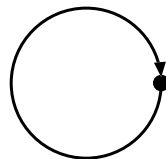
図 1.2: 同型な2つのグラフ

1.1.5. 単純なグラフ

2つの枝 $a_1, a_2 \in A$ は、もし $\{\partial^+ a_1, \partial^- a_1\} = \{\partial^+ a_2, \partial^- a_2\}$ のとき、並列枝と呼ばれる。



枝 $a \in A$ は、 $\partial^+ a = \partial^- a$ のとき、自己閉路と呼ばれる。



並列枝も自己閉路もないグラフを単純なグラフという。

1.1.6. 次数

$v \in V$ に対して,

$$\delta^+v = \{a \mid a \in A, \partial^+a = v\} = v \text{ から出る枝の全体,}$$

$$\delta^-v = \{a \mid a \in A, \partial^-a = v\} = v \text{ に入る枝の全体}$$

と書く. $|\delta^+v|$ を v の正の次数 (あるいは, 出次数) と呼んで, $|\delta^-v|$ を v の負の次数 (あるいは, 入次数) と呼ぶ. さらに, $|\delta^+v| + |\delta^-v|$ を v の次数と呼ぶ.

1.1.7. 雑多な定義

直列枝



孤立点

全ての点の次数が一定値 k に等しいとグラフを k -正則グラフと呼ぶ. k を陽に示さないときは, 単に正則グラフと呼ぶ.

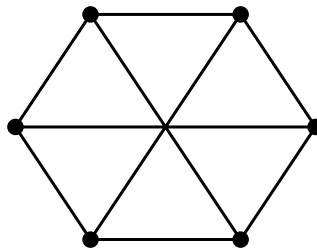


図 1.3: 3-正則グラフ

1.1.8. グラフの変形

開放除去と短絡除去

1.1.9. 部分グラフ

$G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ をグラフとする. グラフ $G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ は, もし $U \subseteq V, B \subseteq A$ であって, ∂_0^+ と ∂_0^- が, それぞれ, ∂^+ と ∂^- を B 上に制限して得られる写像であるとき, G の部分グラフであるという.

$G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ として,
 $U = \{v_1, v_2, v_5\}, B = \{a_2, a_4, a_6\},$

	a_2	a_4	a_6
∂_0^+	v_1	v_5	v_2
∂_0^-	v_2	v_1	v_5

を考えると, G_0 は G の部分グラフである. これは, 幾何学的表現を考えた方が分かり易いであろう.

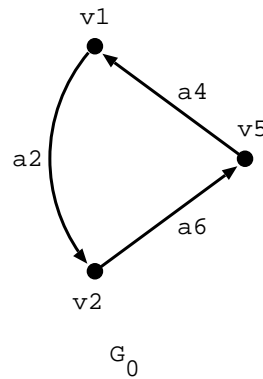


図 1.4: G_0 の幾何学的表現

$G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ が $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ の部分グラフで, かつ, $U = V$ であるとき, G_0 は G を張るといい, G_0 を G の全域部分グラフと呼ぶ.

点部分集合 $U \subseteq V$ に対して,

$$A(U) = \{a \mid a \in A, \partial^+ a \in U, \partial^- a \in U\}$$

とする. このとき, グラフ $G(U) = (U, A(U))$ を, 点集合 U によって誘導される部分グラフ, あるいは, 点集合 U に関する誘導部分グラフと呼ぶ.

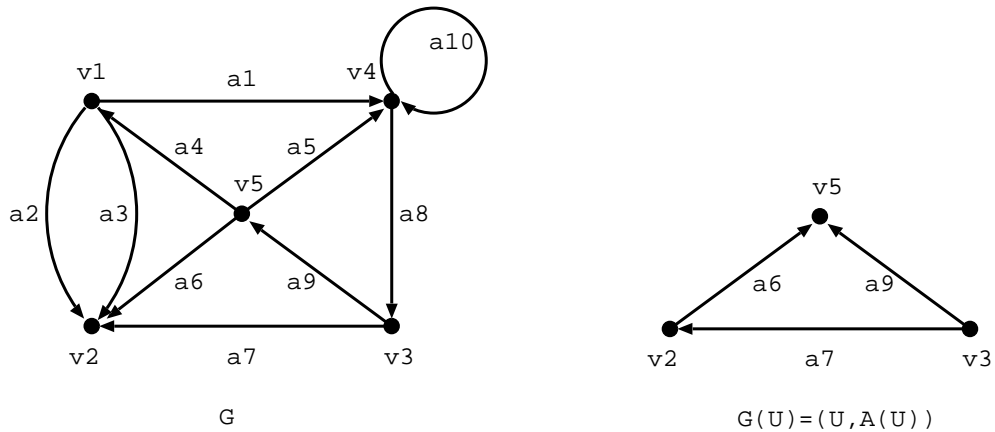


図 1.5: グラフ G (左) から $U = \{v_2, v_3, v_5\}$ によって誘導される部分グラフ $G(U)$ (右)