グラフとネットワーク(第8回)

安藤 和敏
ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

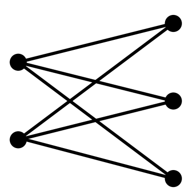
静岡大学工学部

特殊なグラフ

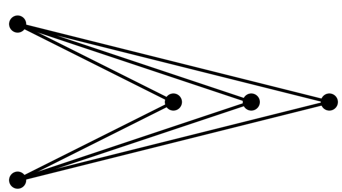
- 完全グラフ
- 2部グラフ
- 道
- 木
- 平面グラフ
- オイラー・グラフ
- ハミルトン・グラフ

平面グラフ

無向グラフ $G = (V, A)$ は, 平面上に枝を交差させることなく描くことができるとき, 平面グラフと呼ばれる.



$K_{2,3}$

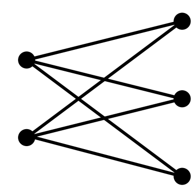


$K_{2,3}$

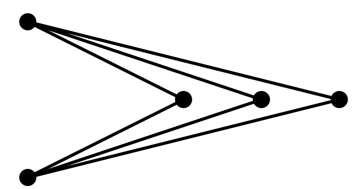
$\mathrm{K}_{2,3}$ は平面グラフである.
K_4, $\mathrm{K}_{3,3}$ は平面グラフか?

平面グラフ (続き)

平面グラフを, 実際に平面上に枝を交差させることなく描いたものを, その平面グラフの平面描画と呼ぶ.



$K_{2,3}$

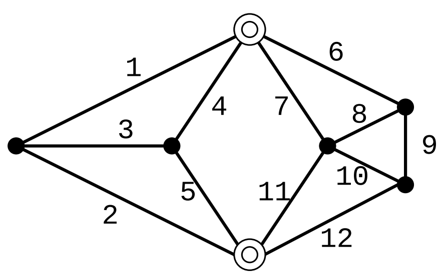


$K_{2,3}$

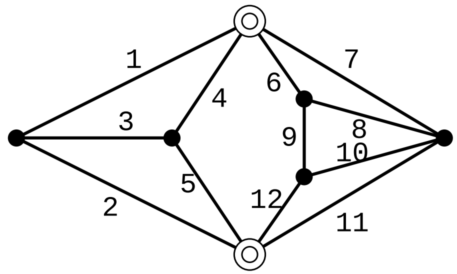
平面グラフ $\mathrm{K}_{2,3}$ の　　平面描画

平面グラフ(続き)

平面グラフの平面描画は一意ではない.



平面描画 (その1)

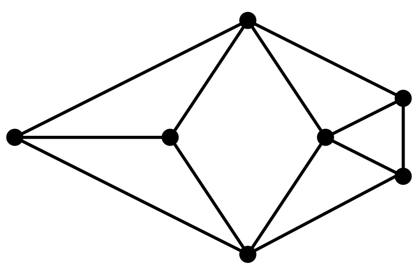


平面描画 (その2)

双対グラフ(その1)

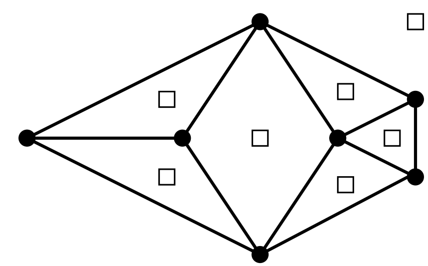
双対グラフ(その1)

以下の操作でつくられるグラフを G の双対グラフと呼んで, G^* で表す.



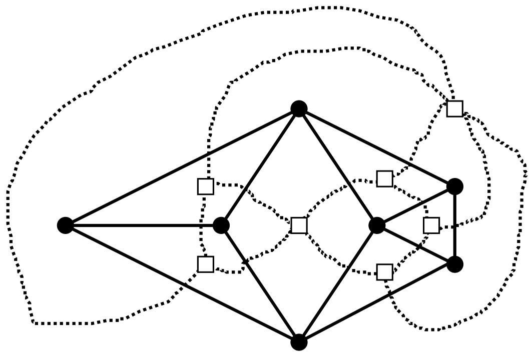
$G = (V, A)$ の平面描画(その1)

双対グラフ(その1)



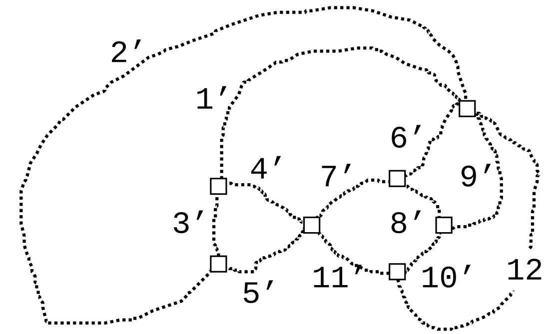
何本かの枝で囲まれた領域を"点"として, □ で表す.

双対グラフ(その1)



2つの領域が枝 a を狭んで隣りあっているとき, これら2つの領域の□ を破線の枝で結ぶ. この枝を a' とする.

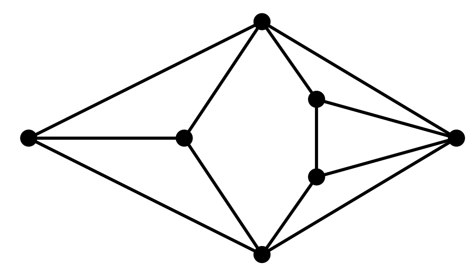
双対グラフ(その1)



□で表された点と破線で表された枝からなるグラフが双対グラフ G^* である.

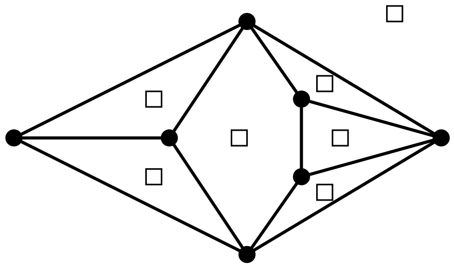
双対グラフ(その2)

双対グラフ(その2)



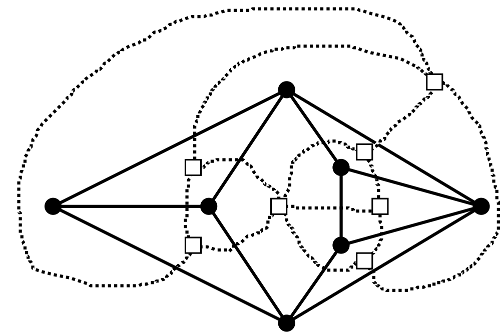
$G = (V, A)$ の平面描画(その2)

双対グラフ(その2)



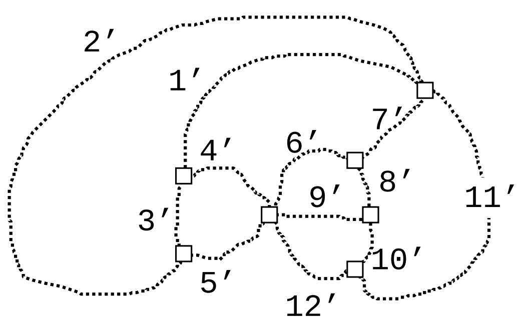
何本かの枝で囲まれた領域を"点"として, □ で表す.

双対グラフ(その2)



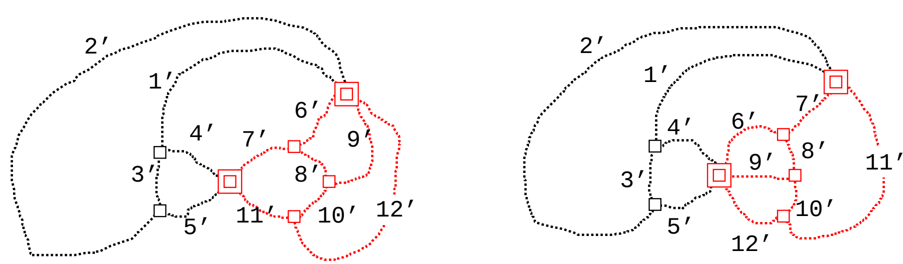
2 つの領域が枝 a を狭んで隣りあっているとき, これら 2 つの領域の □ を破線の枝で結ぶ. この枝を a' とする.

双対グラフ(その2)



□で表された点と破線で表された枝からなるグラフが双対グラフ G^* である.

2 つの双対グラフ



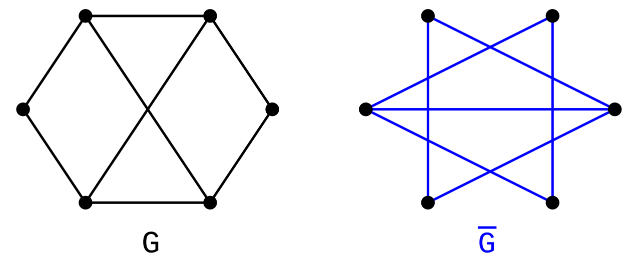
一方の双対グラフを 2 重四角の 2 点で切り離し, 右側部分を上下反転した後結合すると他方が得られる.

補グラフ

単純な (⇒ 教科書 p. 4) 無向グラフ $G = (V, E)$ を考える. (無向グラフを考えるときには, 枝集合を A ではなくて E と書くことがある.)

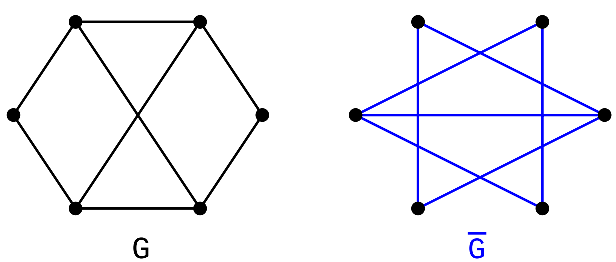
補グラフ

G と同じ頂点集合を持ち, 相異なる 2 点 $u, v \in V$ に対してそれらを結ぶ枝が G に存在し
ないとき, またそのときに限り u, v を結ぶ枝をもつような単純な無向グラフ $\bar{G} = (V, \bar{E})$ を G の補グラフという.



補グラフ

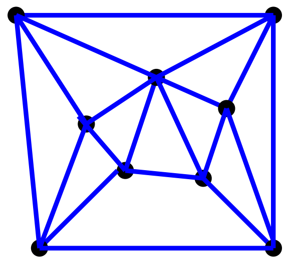
当然のことながら, G と $\bar{G}$ を合わせると完全グラフが得られる. また, $\bar{G}$ の補グラフは G になる.



オイラー・グラフとハミルトン・グラ

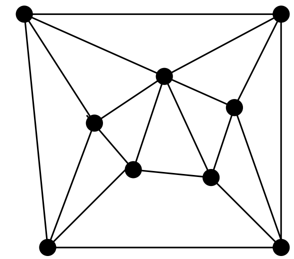
オイラー・グラフ

$G = (V, A)$ を無向グラフとする. G の全ての枝をちょうど一本づつ含むような閉路が存在するとき, G は一筆書き可能である (unicursal) という. 一筆書き可能がグラフのことをオイラーグラフ (Eulerian graph) と呼ぶ.

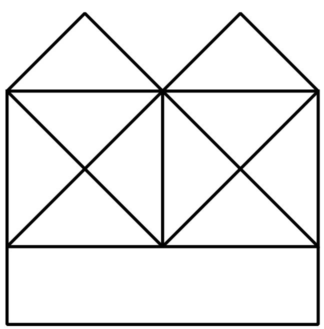


オイラーの定理

一筆書き可能グラフについては, 以下の定理が知られている. 無向グラフ $G = (V, A)$ が一筆書き可能であるための必要十分条件は, G の各点の次数が偶数であることである.

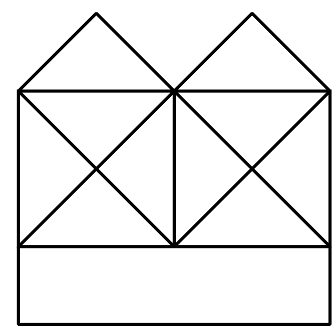


一筆書きの問題

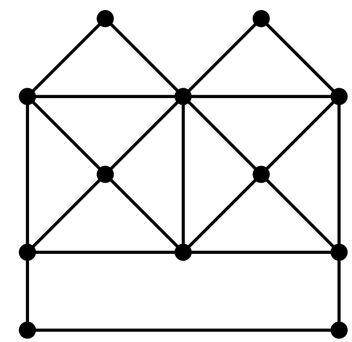


一筆書きできるか？

一筆書きの問題

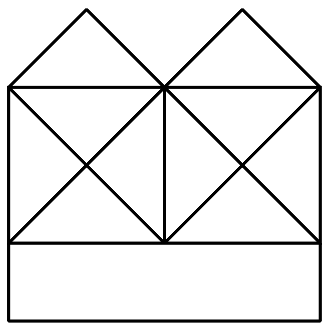


一筆書きできるか？

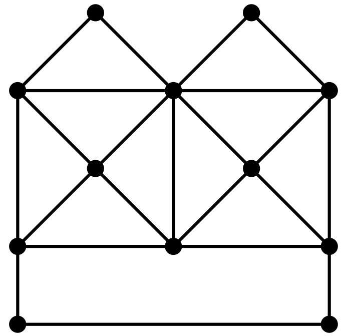


グラフ表現

一筆書きの問題



一筆書きできるか？

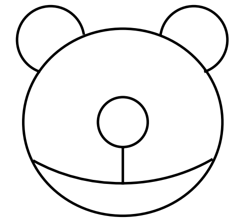


グラフ表現

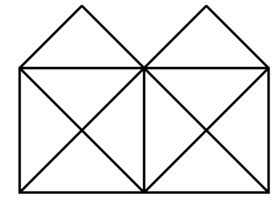
奇数次数をもつ点が存在するので, できない.

Question

次の図の (a) と (b) について, 一筆書きできるかどうかを理由をつけて答えなさい.



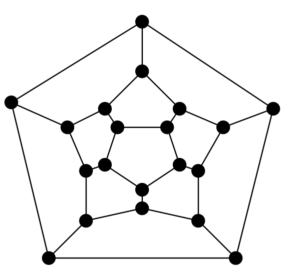
(a)



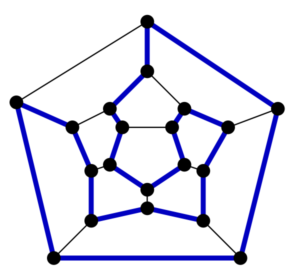
(b)

ハミルトン・グラフ

$G = (V, A)$ の適当な点から出発して, 全ての点をちょうど 1 回づつ通って最初の点に戻る閉路が存在するとき, $G = (V, A)$ をハミルトングラフと呼ぶ.



(a) グラフ G



(b) G のハミルトン閉路

ハミルトン・グラフの特徴付け?

ハミルトングラフに対しては, オイラーグラフに対する定理のような特徴付けは知られていない.