グラフとネットワーク (第5回)

`http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/12/`

安藤和敏
静岡大学工学部

2012.11.05

2. 連結性

2.1. 部分グラフ

$G = (V, A)$ をグラフとする. グラフ $H = (W, B)$ は, もし $W \subseteq V$ かつ $B \subseteq A$ であるとき, G の**部分グラフ**と呼ばれる.

2.2. 連結性

グラフ $G = (V, A)$ (無向でも有向でも良い) に対して, G の任意の 2 点 u と v に対して, u から v への道が存在するとき, G は**連結である** (connected) といい, G を**連結なグラフ** (connected graph) と呼ぶ. 与えられたグラフが連結か否かの判定は, DFS か BFS を用いて簡単にできる.

必ずしも連結でないグラフ $G = (V, A)$ に対して, その極大な連結部分グラフを G の**連結成分** (connected component) と呼ぶ. ここで, H が G の**極大な連結部分グラフ**であるとは,

(i) H は G の連結な部分グラフであり,

(ii) H を部分グラフとして**真に**含むような G の連結部分グラフは存在しない

ということである.

2.3. 2 連結性

グラフ $G = (V, A)$ と点部分集合 $U \subseteq V$ に対して,

$G \setminus U = G$ から, U の中の点と U の中の点に接続する枝を全て削除したグラフ

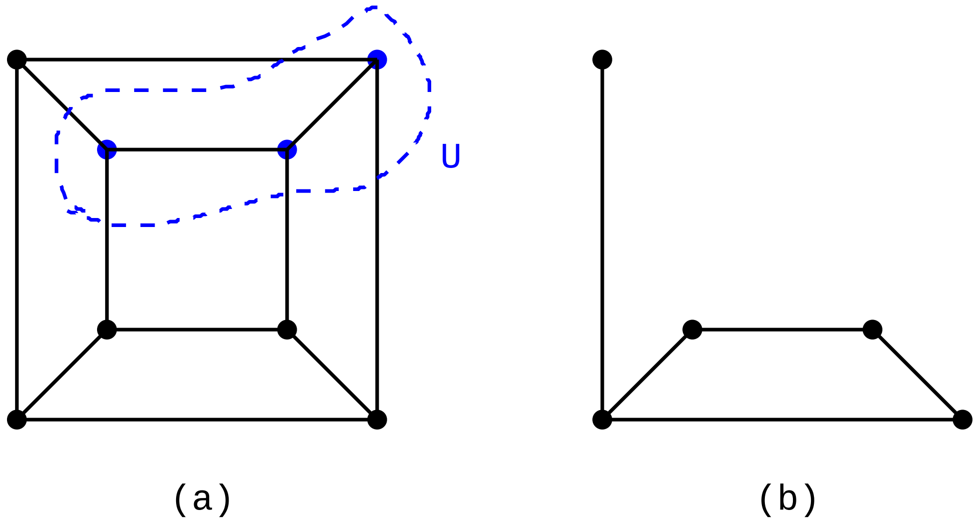

図 2.1: (a) G と $U \subseteq V$ (b) $G \setminus U$

とする．U が 1 点からなる集合のとき，例えば $U = \{v\}$ のときは，$G \setminus \{v\}$ と書く代りに $G \setminus v$ と書く．

$G = (V, A)$ を連結なグラフとする．$G \setminus v$ が連結でなくなるような点 v を**関節点** (articulation vertex) と呼ぶ．関節点が存在しないとき，そのグラフは **2 連結** (2-connected) と呼ばれる．つまり，どの 1 点 (とそれに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが，2 連結グラフである．

連結なグラフ $G = (V, A)$ に対して，その極大な 2 連結部分グラフを G の **2 連結成分** (2-connected component) と呼ぶ.

2.4. 3 連結性, 4 連結性,$\cdots$,k 連結性

$G = (V, A)$ を 2 連結なグラフとする．G のどんな 2 点 u, v に対しても，$G \setminus \{u, v\}$ が連結であるとき，G は **3 連結である** (3-connected) という．つまり，どんな 2 点 (とそれらに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが 3 連結グラフである．

一般の $k \geq 4$ に対しても同様に，$G = (V, A)$ の k 連結性が定義される．すなわち，$|U| < k$ であるどのような点部分集合 U に対しても，$G \setminus U$ が連結であるときに，G を **k 連結なグラフ**という．つまり，どんな $l < k$ 点 (とそれらに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが k 連結グラフである．

例 2.1: *図 2.1 のグラフ G は，3 連結であるが 4 連結でない．なぜか?*

グラフ G の**連結度**とは，G が k-連結であるような最大の整数 k のことである．

例 2.2: *図 2.1 のグラフ G の連結度は，3 である．*

2.5. k 枝連結性

グラフ G は, G のどんな $k-1$ 本以下の枝を 開放除去しても 連結であるときに, k **枝連結** (k-edge connected) と 呼ばれる.

k 連結は, 枝連結との区別を 強調して, k **点連結**とも 呼ばれる.

例 **2.3**: 図 *2.1* のグラフ G は, *2* 枝連結, *3* 枝連結であるが, *4* 枝連結ではない.