

グラフとネットワーク (第13回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/12/>

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2013.01.15

2.2. フローとカット

2.2.1. 2端子フロー

[アルゴリズムの正当性]

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ のカット (cut) とは, $s^+ \in U, s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことである. カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は, 以下で定義される.

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \quad (2.29)$$

ここで, Δ^+U は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体である.

例 2.1: 図 2.1 のようにカット $U = \{s^+, d, j, h\}$ をとると, その容量は 17 である.

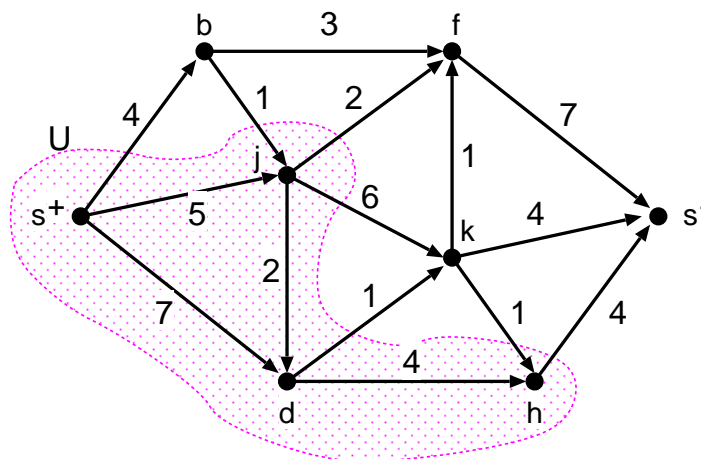
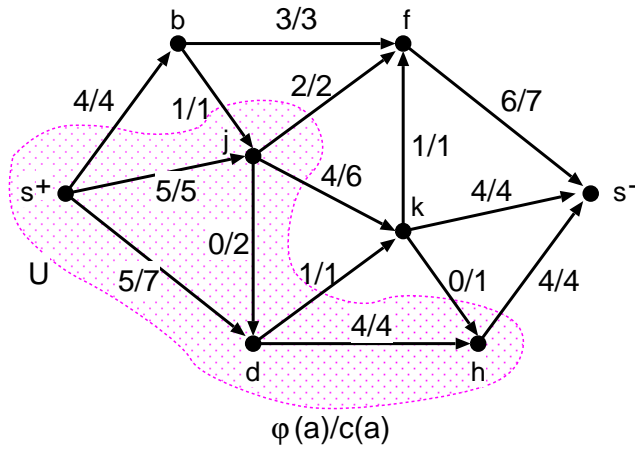


図 2.1: カット $U = \{s^+, d, j, h\}$

補題 2.7: ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \leq \kappa_c(U) \quad (2.30)$$

が成り立つ.



$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
&= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(j) + \partial\varphi(h) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(s^+, j) + \varphi(s^+, d)) \\
&\quad + (\varphi(d, h) + \varphi(d, k) - \varphi(s^+, d) - \varphi(j, d)) \\
&\quad + (\varphi(j, f) + \varphi(j, k) + \varphi(j, d) - \varphi(b, j) - \varphi(s^+, j)) \\
&\quad + (\varphi(h, s^-) - \varphi(k, h) - \varphi(d, h)) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(d, k) + \varphi(h, s^-) + \varphi(j, k) + \varphi(j, f)) \\
&\quad - (\varphi(b, j) + \varphi(k, h)) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) \\
&= 17
\end{aligned}$$

図 2.2: 式 (2.31) の説明

(証明)

$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\
&= \kappa_c(U).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

□

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー} \} \leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット} \} \tag{2.32}$$

を得る.

定理 2.a: フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(証明) φ をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし, \mathcal{N} のあるカット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \tag{*}$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット} \} \leq \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \leq \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー} \}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大フローであり, W は最小カットである.

φ に対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を考えよう (図 2.3 を見よ). このとき, 入口 s^+ から出口 s^- までの有向道は存在しない.

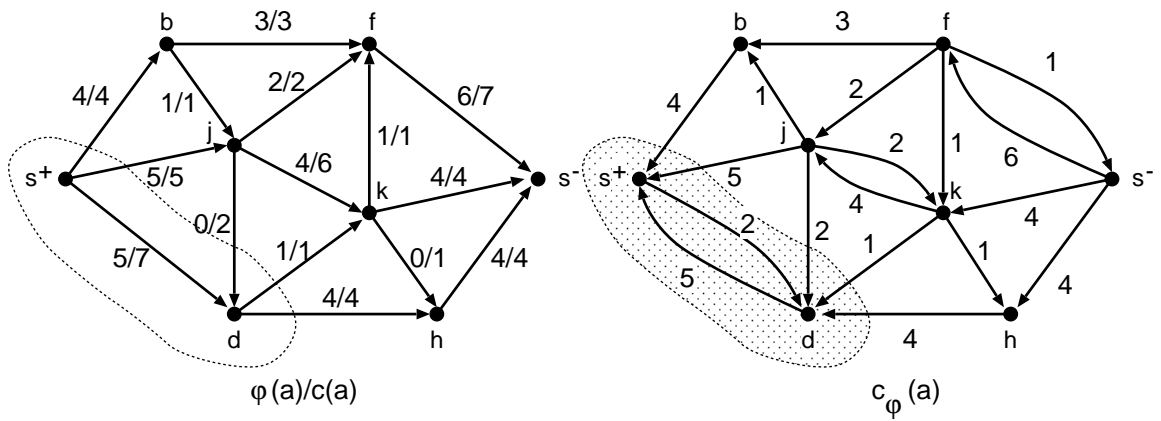


図 2.3: (a) アルゴリズムが終了したときの φ と (b) それに対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ

\mathcal{N}_φ において、入口 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W と置く (図 2.3 を見よ). このとき、 $s^+ \in W$ であり、また、 s^- は s^+ から到達可能ではないから $s^- \notin W$ である. したがって、 W はカットである. このカット W に対して、(*) が成り立つことを示そう.

次の (ア), (イ) が成り立つ.

- (ア) ネットワーク \mathcal{N} において W から出る枝 a は、補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから、 $\varphi(a) = c(a)$.
- (イ) ネットワーク \mathcal{N} において W に入る枝 a' に対して、その逆向き枝 \bar{a}' は補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから、 $\varphi(a') = 0$.

したがって、式 (2.31) と同じ計算をカット W と最大フロー φ に対して行くと、

$$\begin{aligned}
 v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} 0 \\
 &= \kappa_c(W)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

を得る. \square

フォード - ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は、つぎのことを示したことにもなっている.

定理 2.5 (最大フロー・最小カット 定理):

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\}. \tag{2.40}$$

\square

定理 2.5 の証明から、フォード - ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ の補助ネットワーク \mathcal{N}_φ において、 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W とすると、 W は最小カットになる.

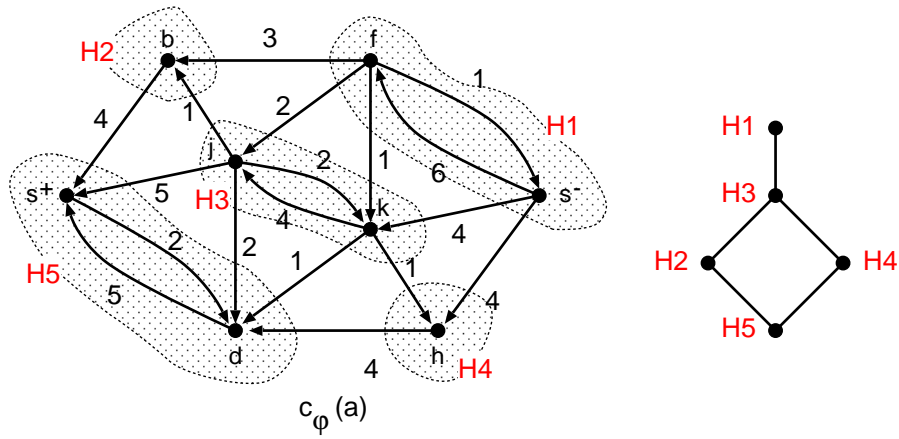


図 2.4: \mathcal{N}_φ の強連結成分分解とそのハッセ図

例えば、ネットワークが図 2.1 で与えられるときは、最小カット W は $W = \{s^+, d, h\}$ で与えられる。最小カットの容量は、 $\kappa_c(W) = 14$ である。これは、最大フローの流量と等しくなっていることに注意しよう。

さらに、この補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を用いると、全ての最小カットも求めることができる。図 2.1 のネットワークを用いてこれを説明しよう。まず、最大フローに対する補助ネットワークを強連結成分分解し、そして、強連結成分の半順序 (第 6 回にやった) のハッセ図を求める。最大フローは図 2.3 で与えられるので、強連結成分分解とそのハッセ図は図 2.4 のようになる。

強連結成分は H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 の 5 つであり強連結成分から成る集合 I は、もし

$$H_i \in I \text{ かつ } H_j \preceq H_i \text{ ならば } H_j \in I \quad (2.41)$$

が成り立つときに、下に閉じていると呼ばれる。例えば、 $\{H_2, H_5\}$ は下に閉じているが、 $\{H_2, H_5, H_3\}$ は下に閉じていない。全ての下に閉じている集合を列挙したものが、

$$\emptyset, \{H_5\}, \{H_5, H_2\}, \{H_5, H_4\}, \{H_5, H_4, H_2\}, \{H_5, H_4, H_2, H_3\}, \{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\} \quad (2.42)$$

である。この中から、 \emptyset と $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$ を除いたものを考える。

$$\{H_5\}, \{H_5, H_2\}, \{H_5, H_4\}, \{H_5, H_4, H_2\}, \{H_5, H_4, H_2, H_3\} \quad (2.43)$$

これらに対応する点の集合

$$\{s^+, d\}, \{s^+, d, b\}, \{s^+, d, h\}, \{s^+, d, h, b\}, \{s^+, d, h, b, j, k\} \quad (2.44)$$

が、 \mathcal{N} の全ての最小カットである。