

グラフとネットワーク (第12回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/12/>

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2013.01.07

2.2. フローとカット

2.2.1. 2端子フロー

[フォード・ファルカーソンのアルゴリズム]

ここで考えるネットワークは, グラフ $G = (V, A)$ の相異なる特別な 2 点 s^+, s^- が指定されて, さらに, 各枝 $a \in A$ に対してその枝中を単位時間に流れるフローの流量の上限 $c(a)$ が定められているものである. そのようなネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ と書く. 特別な点 s^+ と s^- はそれぞれ入口 (source, entrance), 出口 (sink, exit) と呼ばれる.

例 2.1: 図 2.3(a) は, ネットワークの例である. □

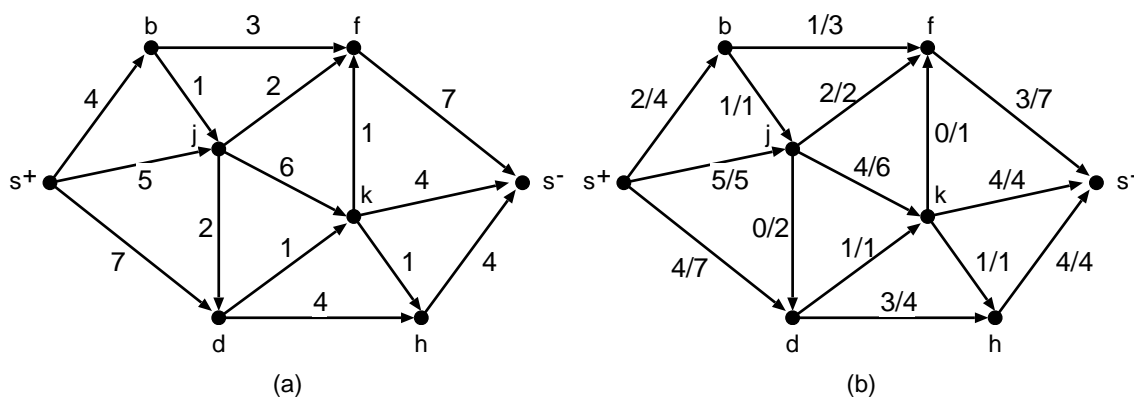


図 2.1: ネットワークとフロー

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ のことである.

(i) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \quad (2.25)$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点 $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0.$$

テキストの p. 4 で教えたように, $\delta^+ v$ は v から出る枝全体であり, $\delta^- v$ は v に入る枝全体である (図 2.2 を見よ).

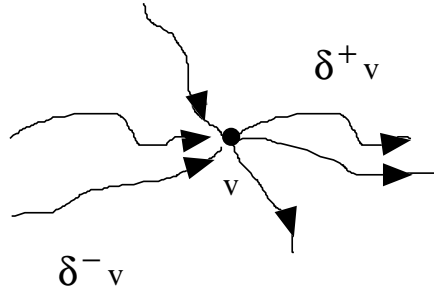


図 2.2: $\delta^+ v$ と $\delta^- v$

例 2.2: 図 2.3(b) の φ は, 図 2.3(a) のネットワーク上のフローである. □

各点 $v \in V$ に対して $\partial\varphi(v)$ を

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) \quad (2.27)$$

と定義すると, 流量保存則は

$$\partial\varphi(v) = 0. \quad (2.26)$$

となる. $\partial\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ はフロー φ の境界 (boundary) と呼ばれる.

流量保存則によって,

$$\partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-) \quad (2.28)$$

が成り立つ. (2.28) の値をフロー φ の流量 (value, flow value) といい, $v^*(\varphi)$ と書くことにする.

例 2.3: 図 2.3(b) のフロー φ の流量は, 11 である.

与えられたネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して, \mathcal{N} 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び, 最大フローを求める問題を最大フロー問題 (maximum flow problem) と呼ぶ.

図 2.4 に最大フロー問題を解くフォード-ファルカーソンのアルゴリズムを記述する. その前に, 補助ネットワークという概念について説明しなければならない.

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフロー φ が与えられたときに, φ に関する補助ネットワーク (auxiliary network) $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$ とは, 以下のように定義される. 枝集合 A_φ は,

$$A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-, \quad (2.33)$$

$$A_\varphi^+ = \{a \mid a \in A, \varphi(a) < c(a)\} \quad (2.34)$$

$$A_\varphi^- = \{\bar{a} \mid a \in A, 0 < \varphi(a)\} \quad (\bar{a}: a \text{ の逆向き枝}) \quad (2.35)$$

で与えられ, 容量関数 $c_\varphi: A_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ はつぎのように定義される.

$$c_\varphi(a) = \begin{cases} c(a) - \varphi(a) & \text{if } a \in A_\varphi^+ \text{ のとき,} \\ \varphi(\bar{a}) & \text{if } a \in A_\varphi^- \text{ のとき.} \end{cases} \quad (2.36)$$

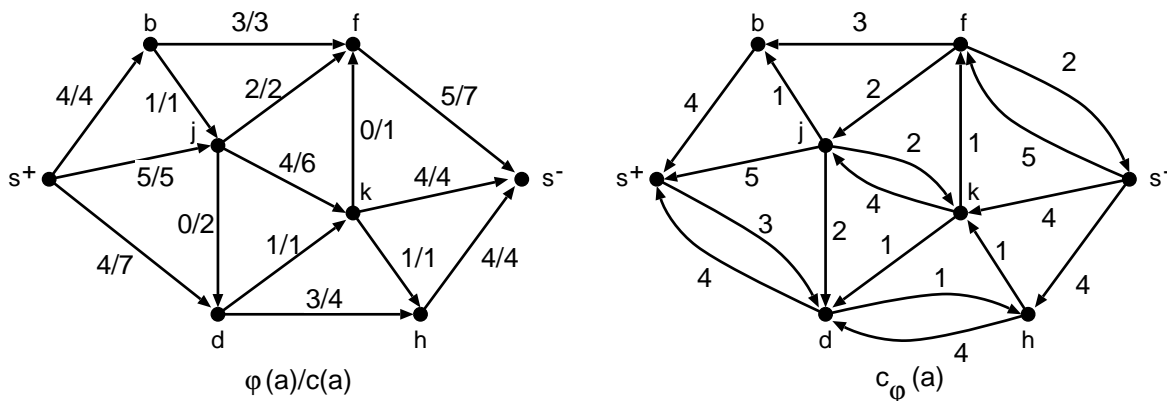


図 2.3: \mathcal{N} 中のフローと補助ネットワーク

- 1: $\varphi(a) \leftarrow 0$ ($a \in A$).
- 2: 補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を作る.
- 3: **for** \mathcal{N}_φ 上に s^+ から s^- までの有向道 P が存在する **do**
- 4: $d \leftarrow \min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}$.
- 5: **for** P の各枝 a について **do**
- 6: **if** a が A_φ^+ の枝 **then**
- 7: $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
- 8: **else if** a が A_φ^- の枝 **then**
- 9: $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) - d$.
- 10: **end if**
- 11: **end for**
- 12: 補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を作り直す.
- 13: **end for**

図 2.4: フォード-ファルカーソンのアルゴリズム

例 2.4: 図 2.5 と 図 2.7 にアルゴリズムが動作する様子を示す. 最大フローの流量は 14 である. \square

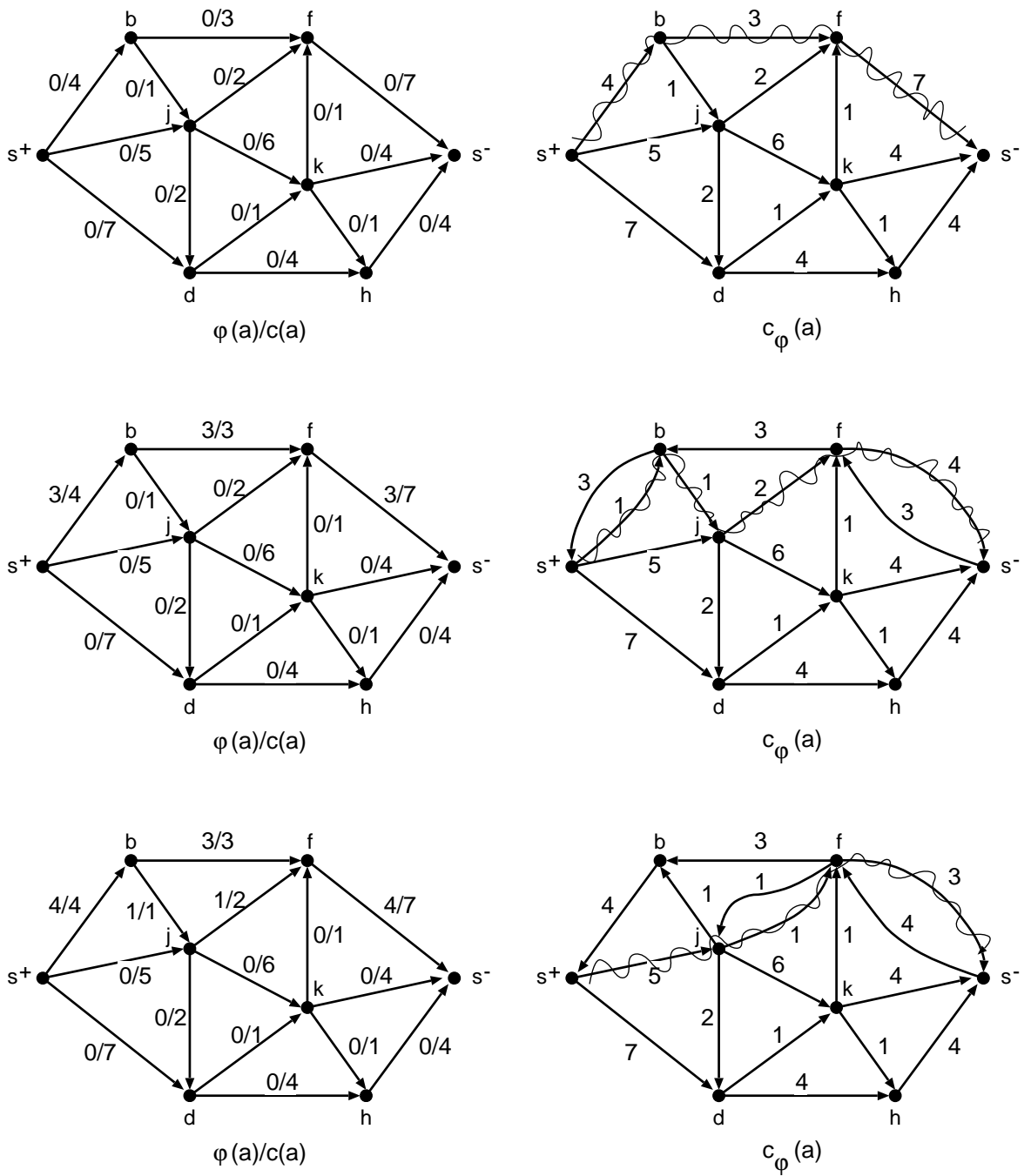


図 2.5: アルゴリズムの動き

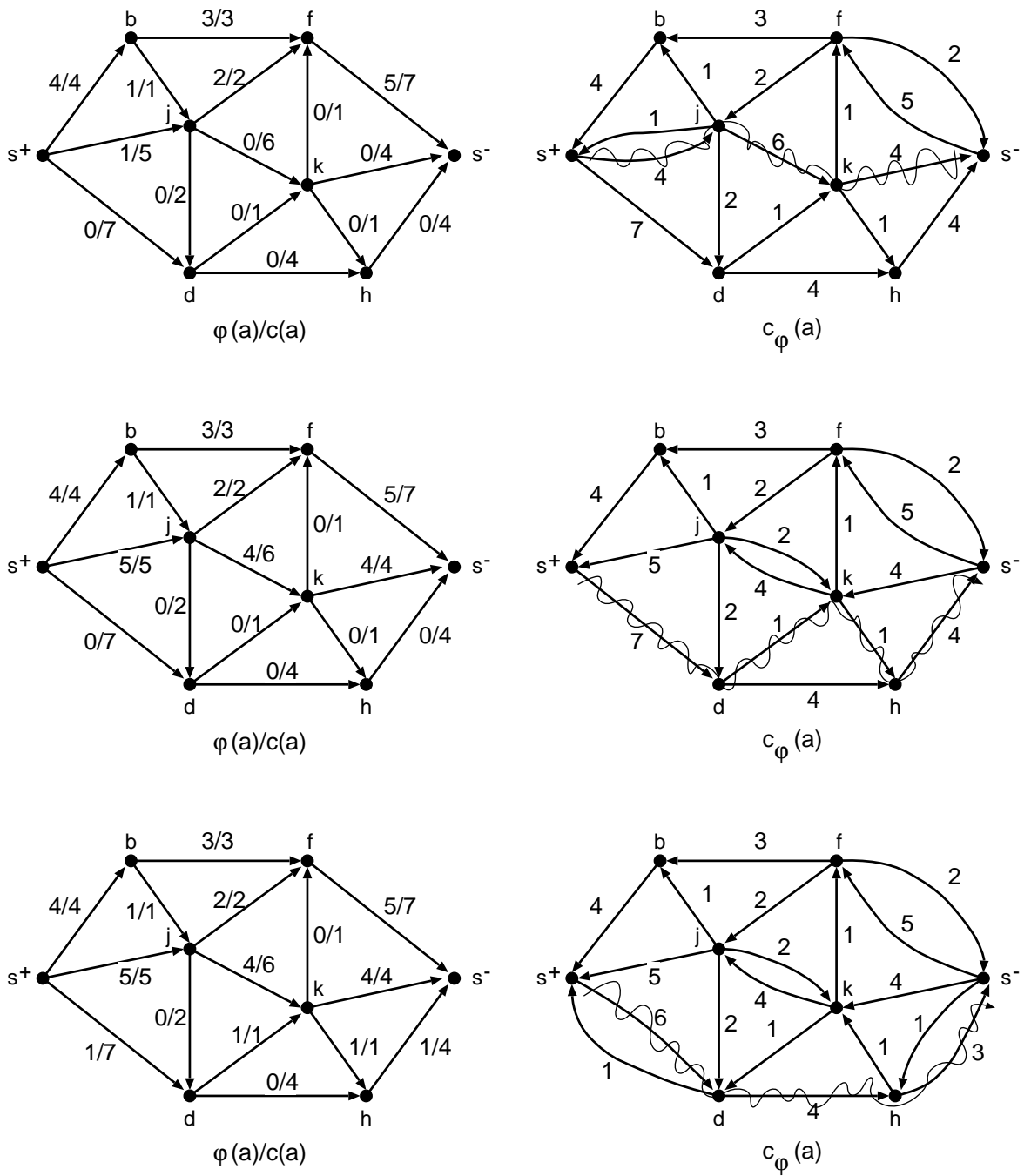


図 2.6: アルゴリズムの動き (続き)

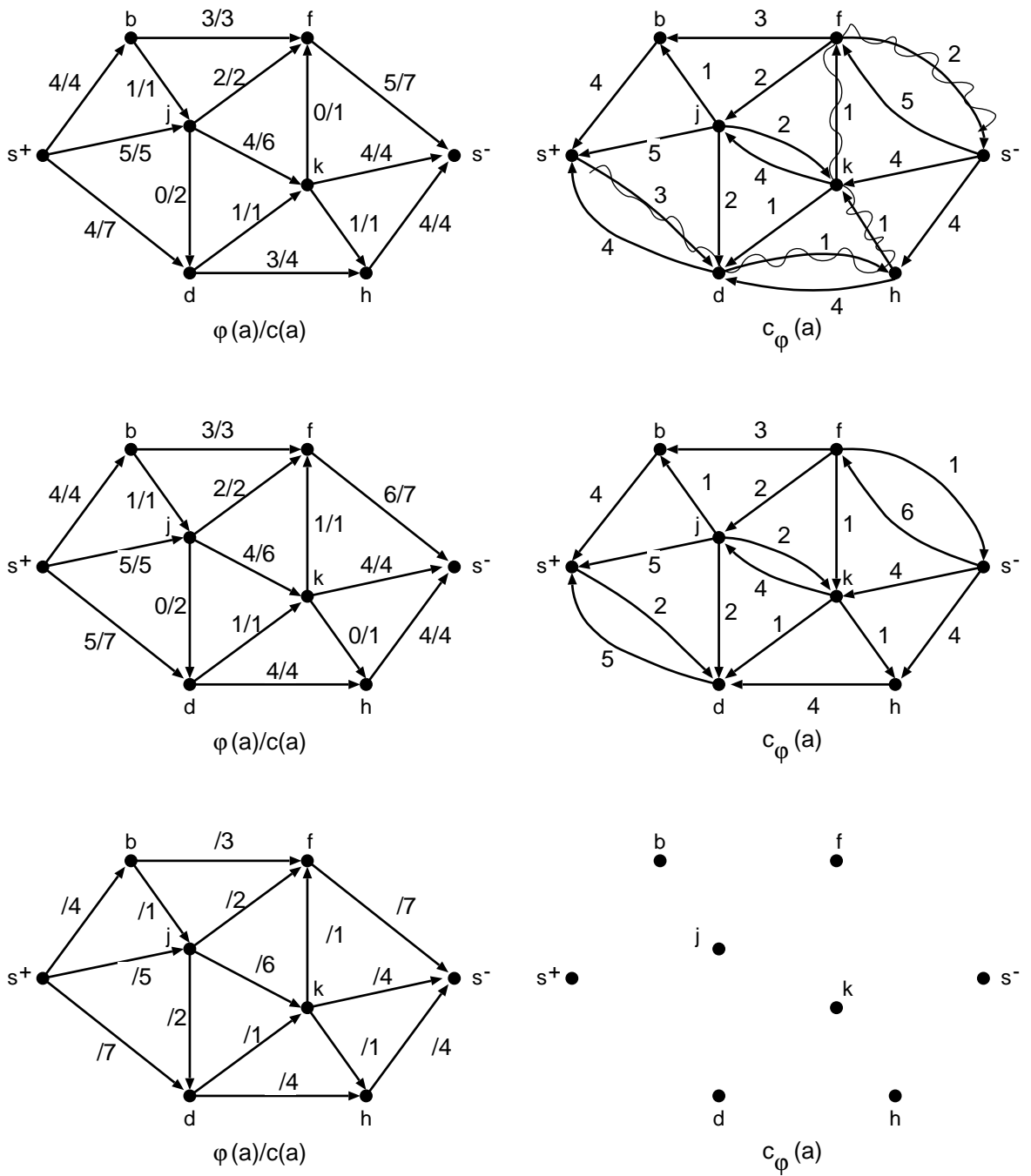


図 2.7: アルゴリズムの動き (続き)