

# グラフとネットワーク (第12回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/11/>

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2012.01.16

## 2.2. フローとカット

### 2.2.1. 2端子フロー

[フォード・ファルカーソンのアルゴリズム]

ここで考えるネットワークは, グラフ  $G = (V, A)$  の相異なる特別な2点  $s^+, s^-$  が指定されて, さらに, 各枝  $a \in A$  に対してその枝中を単位時間に流れるフローの流量の上限  $c(a)$  が定められているものである. そのようなネットワークを  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  と書く. 特別な点  $s^+$  と  $s^-$  はそれぞれ入口 (source, entrance), 出口 (sink, exit) と呼ばれる.

例 2.1: 図 2.3(a) は, ネットワークの例である. □

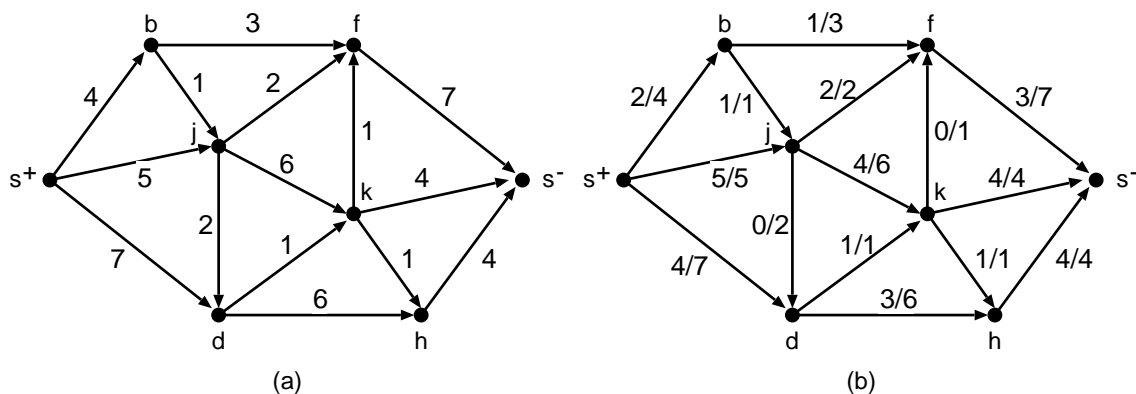


図 2.1: 容量付き有向グラフとフロー

ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  上のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  のことである.

(i) 容量制約: 各枝  $a \in A$  に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \quad (2.25)$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点  $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$  に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0.$$

テキストの p. 4 で教えたように,  $\delta^+ v$  は  $v$  から出る枝全体であり,  $\delta^- v$  は  $v$  に入る枝全体である (図 2.2 を見よ).

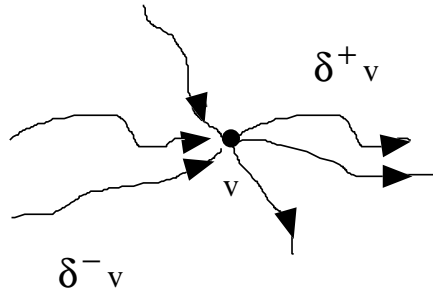


図 2.2:  $\delta^+ v$  と  $\delta^- v$

例 2.2: 図 2.3(b) の  $\varphi$  は, 図 2.3(a) のネットワーク上のフローである.  $\square$

各点  $v \in V$  に対して  $\partial\varphi(v)$  を

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) \quad (2.27)$$

と定義すると, 流量保存則は

$$\partial\varphi(v) = 0. \quad (2.26)$$

となる.  $\partial\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$  はフロー  $\varphi$  の境界 (boundary) と呼ばれる.

流量保存則によって,

$$\partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-) \quad (2.28)$$

が成り立つ. (2.28) の値をフロー  $\varphi$  の流量 (value, flow value) といい,  $v^*(\varphi)$  と書くことにする.

例 2.3: 図 2.3(b) のフロー  $\varphi$  の流量は, 11 である.

与えられたネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  に対して,  $\mathcal{N}$  上のフロー  $\varphi$  でその流量  $v^*(\varphi)$  が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び, 最大フローを求める問題を最大フロー問題 (maximum flow problem) と呼ぶ.

図 2.4 に最大フロー問題を解くフォード-ファルカーソンのアルゴリズムを記述する. その前に, 補助ネットワークという概念について説明しなければならない.

ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  上のフロー  $\varphi$  が与えられたときに,  $\varphi$  に関する補助ネットワーク (auxiliary network)  $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$  とは, 以下のように定義される. 枝集合  $A_\varphi$  は,

$$A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-, \quad (2.33)$$

$$A_\varphi^+ = \{a \mid a \in A, \varphi(a) < c(a)\} \quad (2.34)$$

$$A_\varphi^- = \{\bar{a} \mid a \in A, 0 < \varphi(a)\} \quad (\bar{a}: a \text{ の逆向き枝}) \quad (2.35)$$

で与えられ, 容量関数  $c_\varphi: A_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  はつぎのように定義される.

$$c_\varphi(a) = \begin{cases} c(a) - \varphi(a) & \text{if } a \in A_\varphi^+ \text{ のとき,} \\ \varphi(\bar{a}) & \text{if } a \in A_\varphi^- \text{ のとき.} \end{cases} \quad (2.36)$$

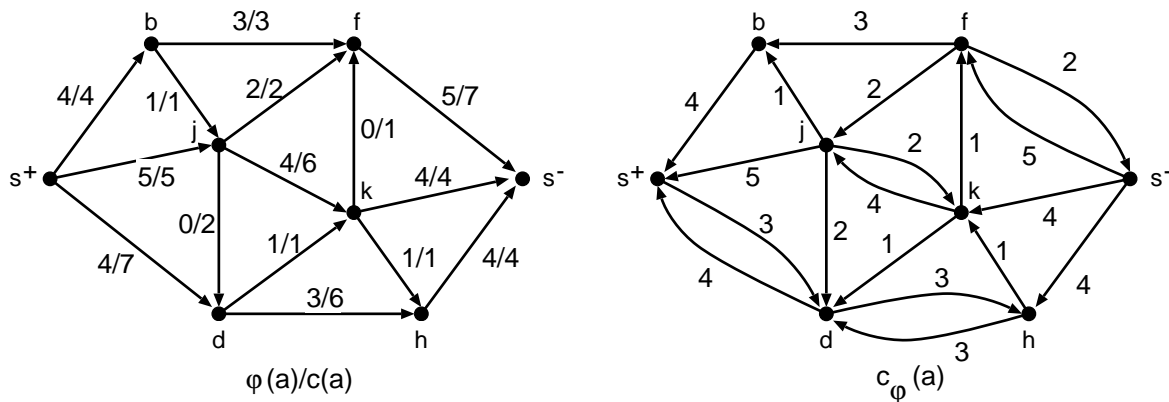


図 2.3:  $\mathcal{N}$  中のフローと補助ネットワーク

- 1:  $\varphi(a) \leftarrow 0$  ( $a \in A$ ).
- 2: 補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  を作る.
- 3: for  $\mathcal{N}_\varphi$  上に  $s^+$  から  $s^-$  までの有向道  $P$  が存在する do
- 4:  $d \leftarrow \min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}$ .
- 5: for  $P$  の各枝  $a$  について do
- 6: if  $a$  が  $A_\varphi^+$  の枝 then
- 7:  $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$ .
- 8: else if  $a$  が  $A_\varphi^-$  の枝 then
- 9:  $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) - d$ .
- 10: end if
- 11: end for
- 12: 補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  を作り直す.
- 13: end for

図 2.4: フォード-ファルカーソンのアルゴリズム

例 2.4: 図 2.5 と図 2.7 にアルゴリズムが動作する様子を示す. 最大フローの流量は 14 である.  $\square$

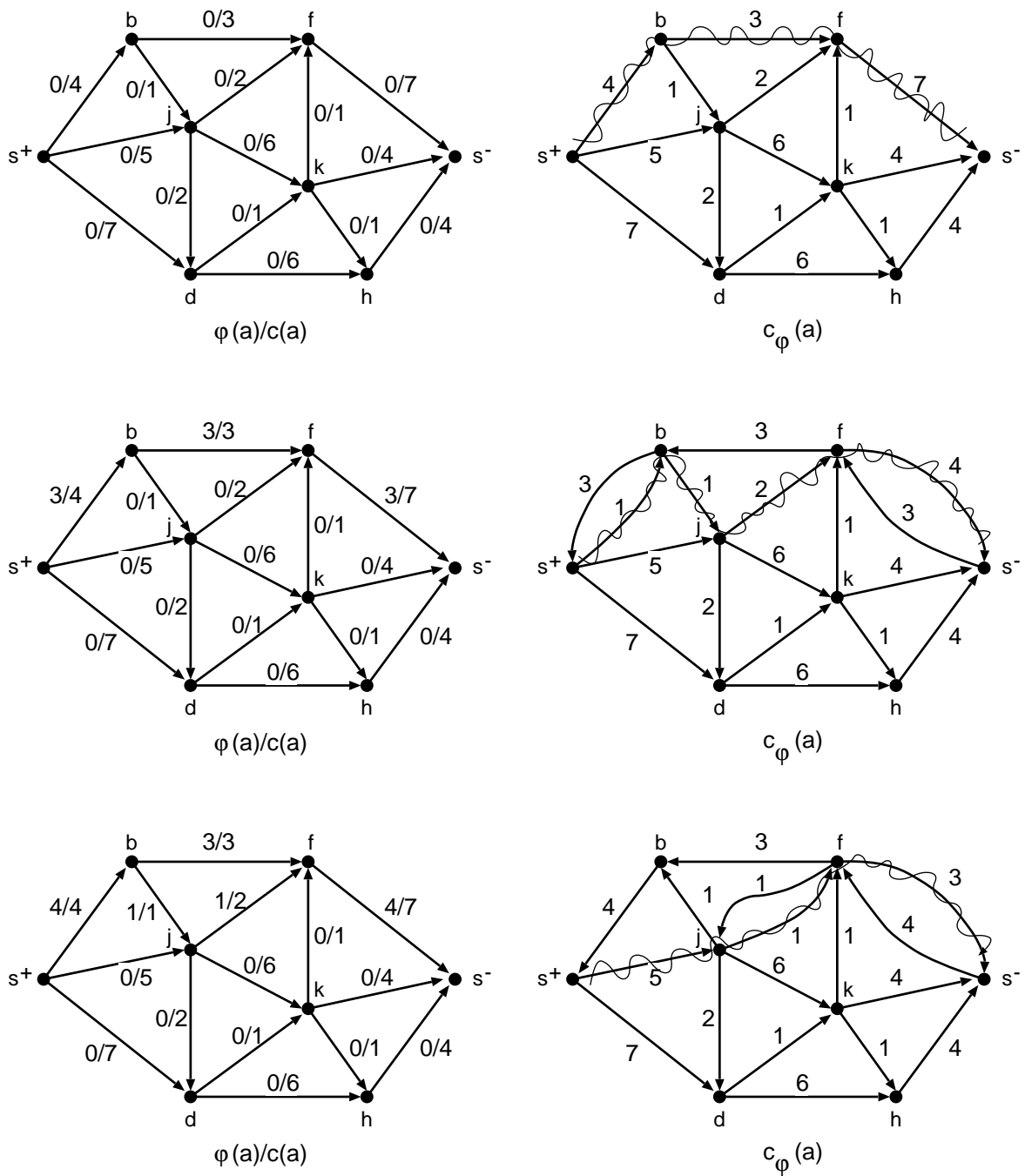


図 2.5: アルゴリズムの動き

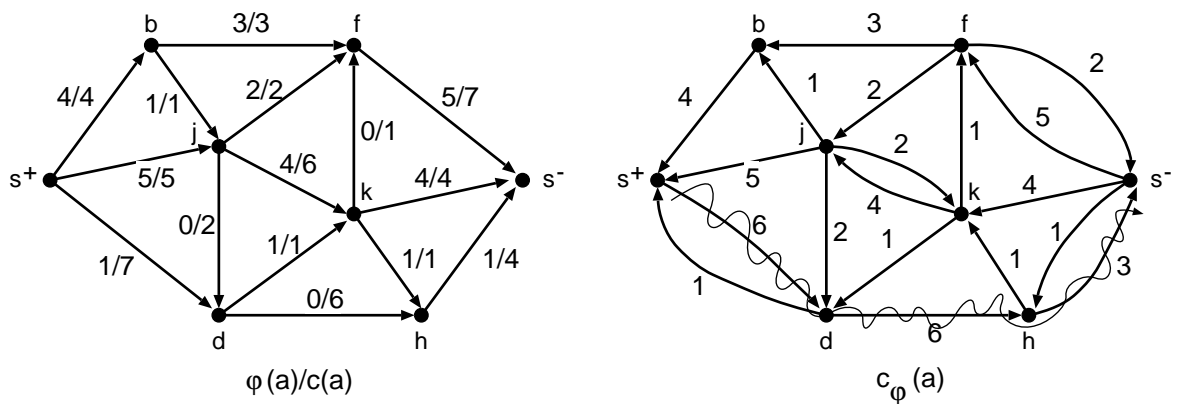
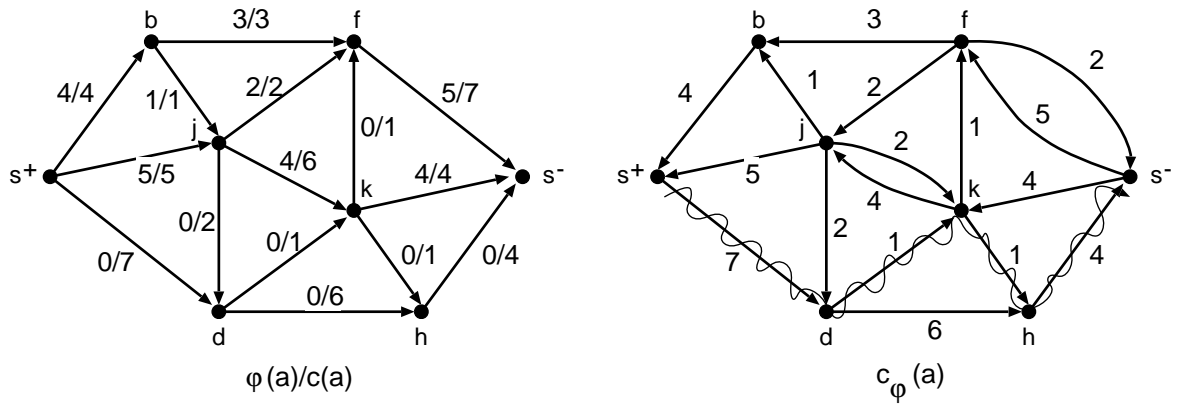
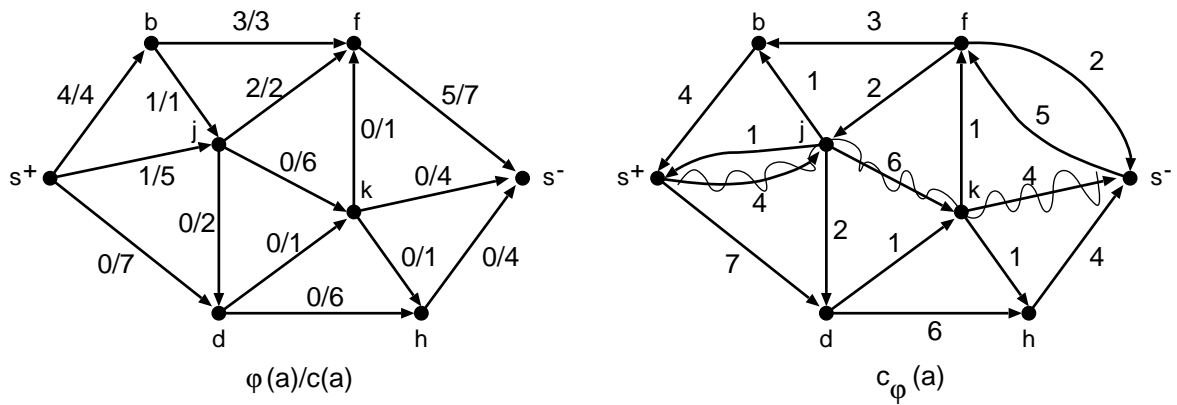


図 2.6: アルゴリズムの動き (続き)

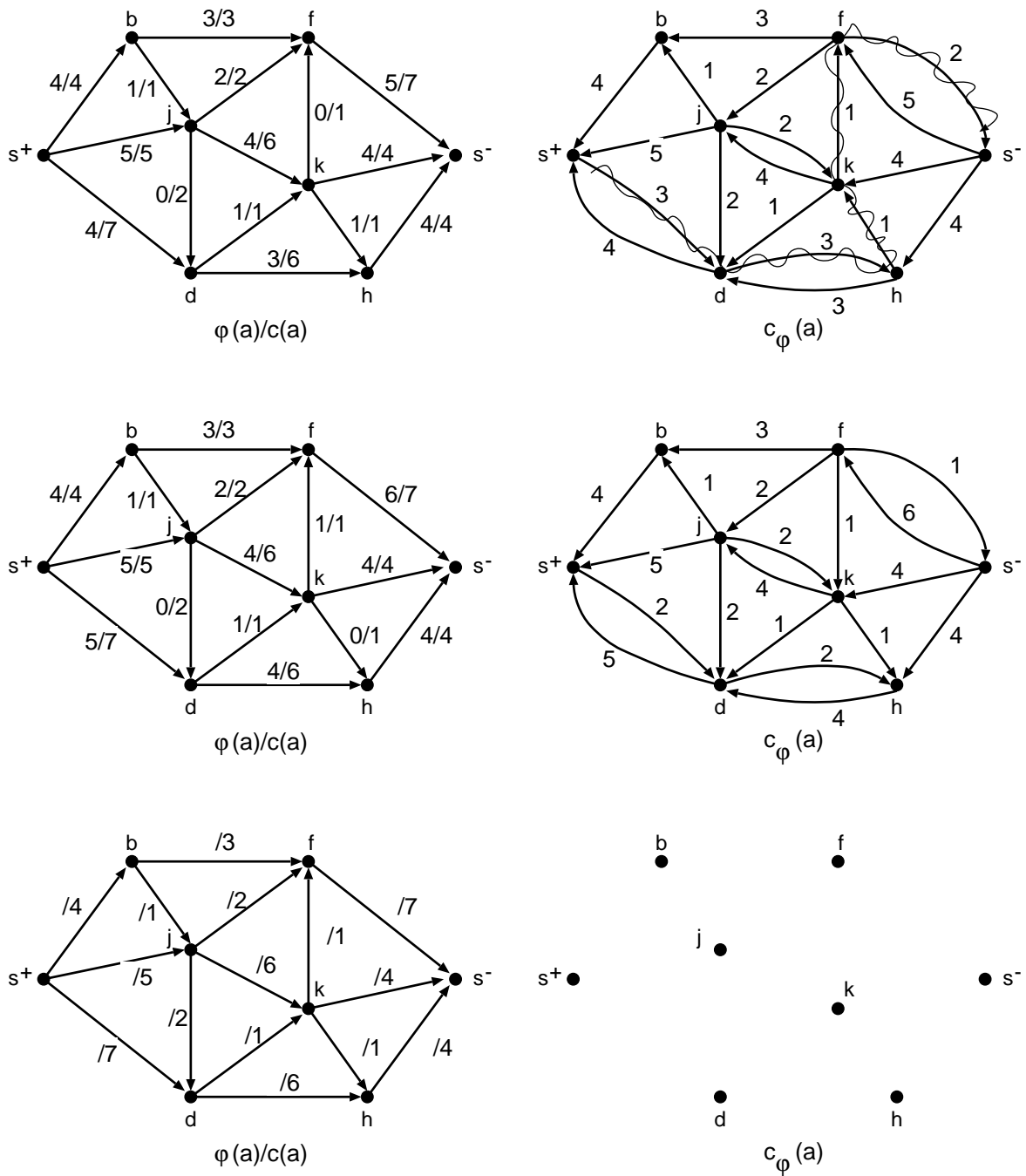


図 2.7: アルゴリズムの動き (続き)