

# グラフとネットワーク (第14回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/10/>

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2011.01.24

## 2.2. フローとカット

### 2.2.1. 2端子フロー

[アルゴリズムの正当性]

ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  のカット (cut) とは,  $s^+ \in U, s^- \notin U$  であるような点集合  $U \subseteq V$  のことである. カット  $U$  の容量  $\kappa_c(U)$  は, 以下で定義される.

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \quad (2.29)$$

ここで,  $\Delta^+U$  は  $U$  に始点を持ち  $V \setminus U$  に終点を持つ枝の全体である.

例 2.1: 図 2.1 のようにカット  $U = \{s^+, d, j, h\}$  をとると, その容量は 17 である.

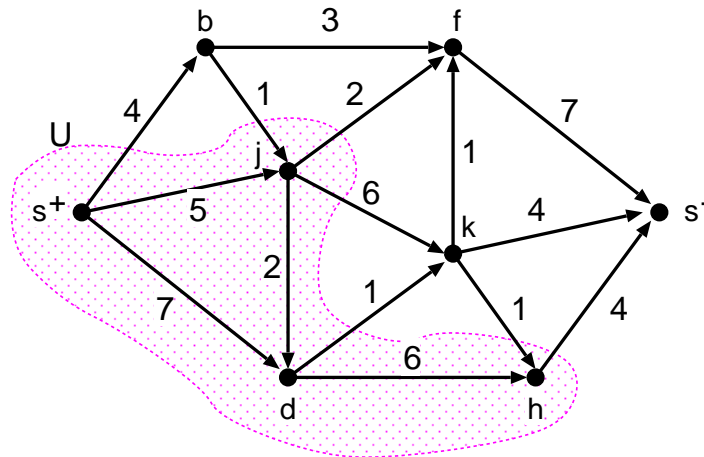
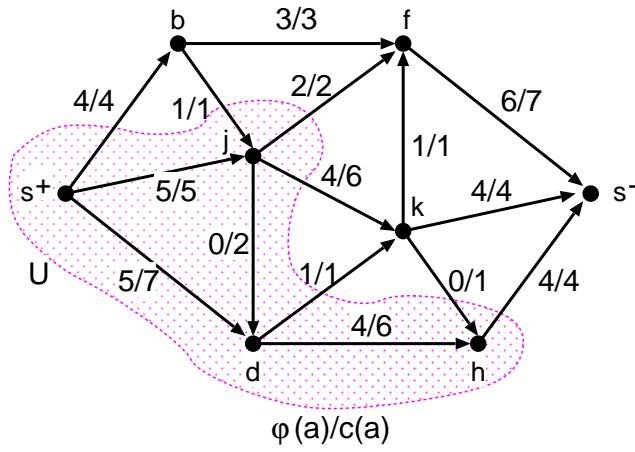


図 2.1: カット  $U = \{s^+, d, j, h\}$

補題 2.7: ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$  中の任意なフロー  $\varphi$  と任意なカット  $U$  に対して,

$$v^*(\varphi) \leq \kappa_c(U) \quad (2.30)$$

が成り立つ.



$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
&= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(j) + \partial\varphi(h) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(s^+, j) + \varphi(s^+, d)) \\
&\quad + (\varphi(d, h) + \varphi(d, k) - \varphi(s^+, d) - \varphi(j, d)) \\
&\quad + (\varphi(j, f) + \varphi(j, k) + \varphi(j, d) - \varphi(b, j) - \varphi(s^+, j)) \\
&\quad + (\varphi(h, s^-) - \varphi(k, h) - \varphi(d, h)) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(d, k) + \varphi(h, s^-) + \varphi(j, k) + \varphi(j, f)) \\
&\quad - (\varphi(b, j) + \varphi(k, h)) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) \\
&= 17
\end{aligned}$$

図 2.2: 式 (2.31) の説明

(証明)

$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\
&= \kappa_c(U).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

□

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} \leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \tag{2.32}$$

を得る.

**定理 2.a:** フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー  $\varphi$  は最大フローである.

(証明)  $\varphi$  をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし,  $\mathcal{N}$  のあるカット  $W$  に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \tag{*}$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \leq \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \leq \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに,  $\varphi$  は最大フローであり,  $W$  は最小カットである.

$\varphi$  に対応する補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  を考えよう (図 2.3 を見よ). このとき, 入口  $s^+$  から出口  $s^-$  までの有向道は存在しない.

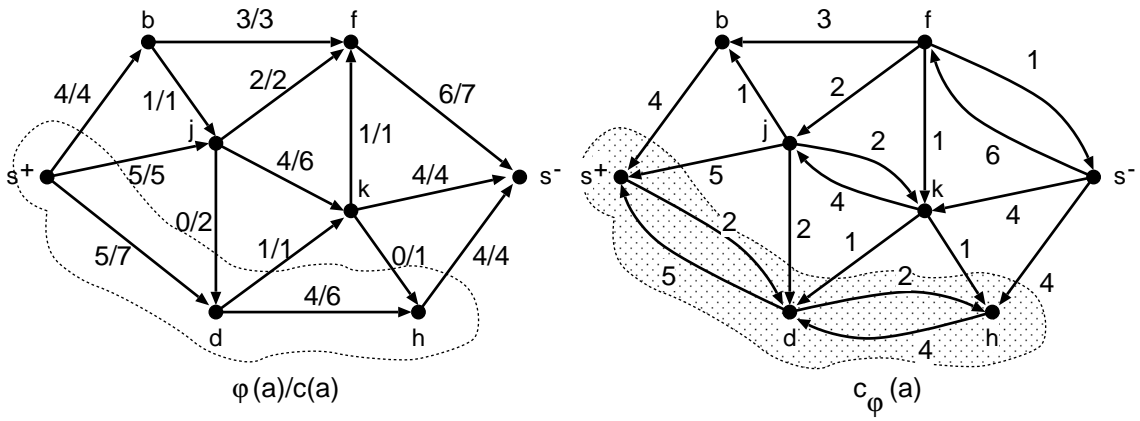


図 2.3: (a) アルゴリズムが終了したときの  $\varphi$  と (b) それに対応する補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$

$\mathcal{N}_\varphi$  において, 入口  $s^+$  から有向道によって到達可能な点の全体を  $W$  と置く (図 2.3 を見よ). このとき,  $s^+ \in W$  であり, また,  $s^-$  は  $s^+$  から到達可能ではないから  $s^- \notin W$  である. したがって,  $W$  はカットである. このカット  $W$  に対して, (\*) が成り立つことを示そう.

次の (ア), (イ) が成り立つ.

- (ア) ネットワーク  $\mathcal{N}$  において  $W$  から出る枝  $a$  は, 補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  の中には存在しないから,  $\varphi(a) = c(a)$ .
- (イ) ネットワーク  $\mathcal{N}$  において  $W$  に入る枝  $a'$  に対して, その逆向き枝  $\bar{a}'$  は補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  の中には存在しないから,  $\varphi(a') = 0$ .

したがって, 式 (2.31) と同じ計算をカット  $W$  と最大フロー  $\varphi$  に対して行くと,

$$\begin{aligned}
 v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} 0 \\
 &= \kappa_c(W)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

を得る.  $\square$

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は, つぎのことを示したことにもなっている.

**定理 2.5** (最大フロー・最小カット定理):

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\}. \tag{2.40}$$

$\square$

定理 2.5 の証明から, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー  $\varphi$  の補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  において,  $s^+$  から有向道によって到達可能な点の全体を  $W$  とすると,  $W$  は最小カットになる.

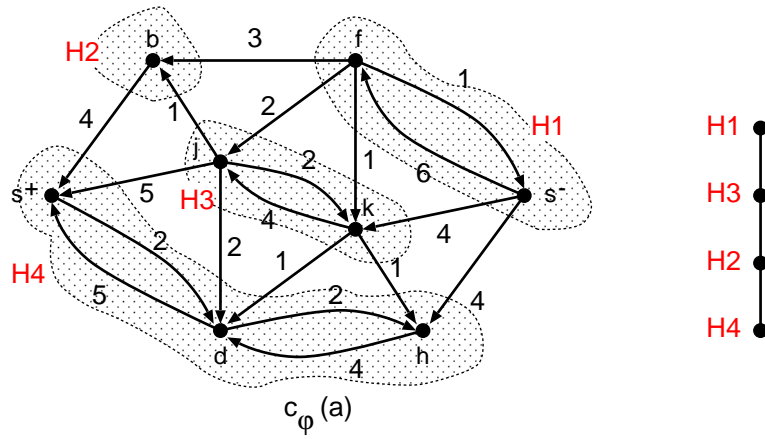


図 2.4:  $\mathcal{N}_\varphi$  の強連結成分分解とそのハッセ図

例えば、ネットワークが図 2.1 で与えられるときは、最小カット  $W$  は  $W = \{s^+, d, h\}$  で与えられる。最小カットの容量は、 $\kappa_c(W) = 14$  である。これは、最大フローの流量と等しくなっていることに注意しよう。

さらに、この補助ネットワーク  $\mathcal{N}_\varphi$  を用いると、全ての最小カットも求めることができる。図 2.1 のネットワークを用いてこれを説明しよう。まず、補助ネットワークを強連結成分分解する。そして、そのハッセ図を求める。

このハッセ図の一番下の成分 (この例では  $H_4$ ) だけから成る集合  $\{H_4\}$  から出発して、以下のようにこのハッセ図の下から順に  $H_i$  を加えていく。

$$\{H_4\}, \{H_4, H_2\}, \{H_4, H_2, H_3\} \tag{2.41}$$

そして、一番上の成分 (この例では  $H_1$ ) が加えられる直前でやめる。これら 3 つ対応する点集合

$$\{s^+, d, h\}, \{s^+, d, h, b\}, \{s^+, d, h, b, j, k\} \tag{2.42}$$

が、 $\mathcal{N}$  の全ての最小カットである。