グラフとネットワーク (第7回)
オイラーグラフとハミルトングラフ

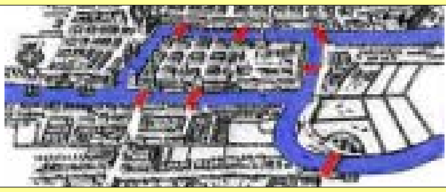
静岡大学工学部
安藤　和敏
2008.11.14

目次

1. ケーニヒスベルグの橋の問題
2. オイラーの定理
3. フルーリー (Fleury) のアルゴリズム
4. ハミルトン閉路
5. 演習

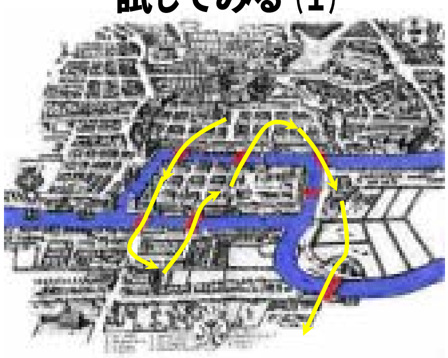
ケーニヒスベルグの橋の問題

この7つの橋を各1度ずつ通って、元の場所に戻ってくることができるかどうか? ただし、同じ橋を2度以上通ってはならない。

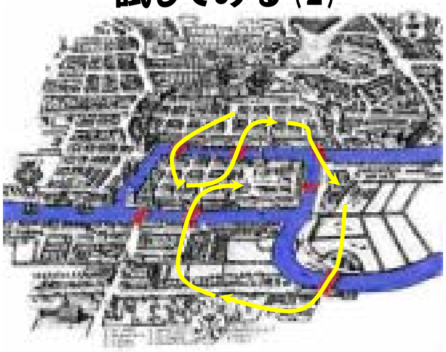


ケーニヒスベルクを流れるプレーゲル川には、このように7つの橋が架かっていた。 (18世紀頃の話)

試してみる (1)

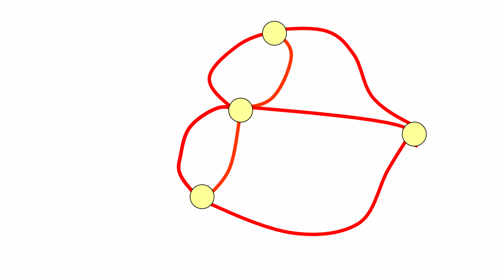


試してみる (2)

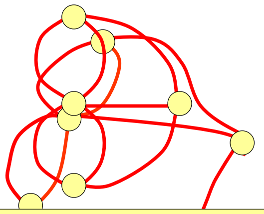


グラフによる表現

1736年、レオンハルト·オイラーは、この問題を以下のように考えた。



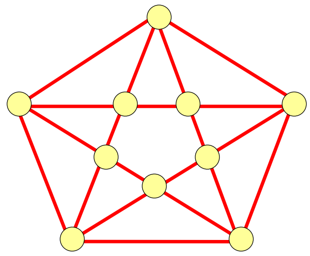
グラフによる表現



ケーニヒスベルグの橋の問題は，「このようなグラフを一筆書きできるか？」という問題になる．

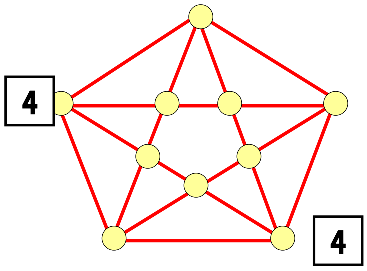
目次

オイラーの定理



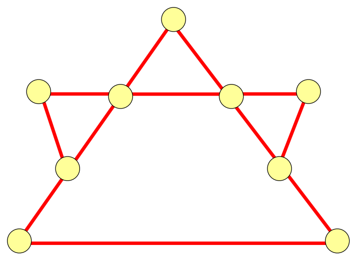
オイラーは，任意の与えられたグラフが一筆書き可能かどうかを判定する定理を与えた．

次数



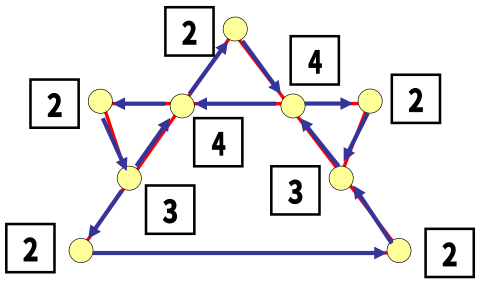
各点に接続する枝の数を，その点の**次数**と呼ぶ．

オイラーの定理 (A)



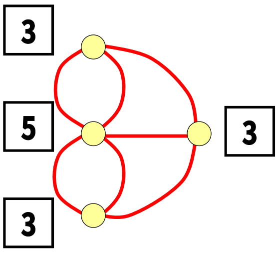
もし与えられたグラフが一筆書き可能であれば，奇数の次数の点は0個か2個である．

オイラーの定理 (A) の証明



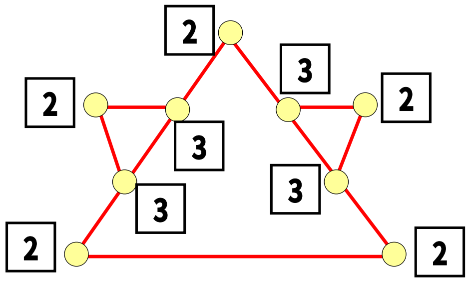
一筆書きできれば、奇数次数の点の数は0か2．

オイラーの定理の適用例 (1)
ケーニヒスベルグの橋の問題の解



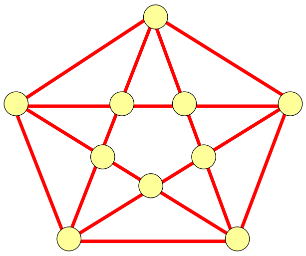
オイラーの定理 (A) の対偶より，「一筆書きできない」．

オイラーの定理の適用例 (2)



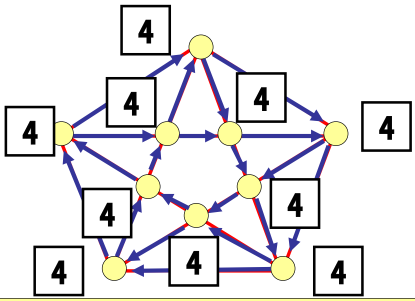
奇数の次数を持つ点は，4つあるので一筆書き可能ではない．(オイラーの定理 (A) の対偶)

オイラーの定理 (B)



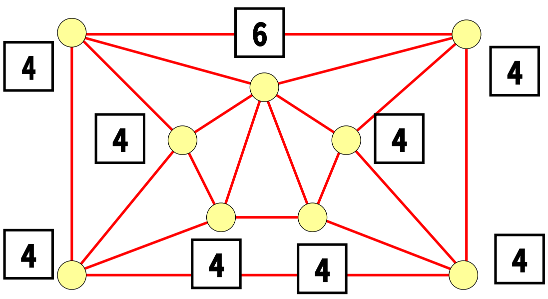
逆に，もし与えられたグラフに奇数の次数の点が0個か2個であれば，一筆書き可能である．

オイラーの定理 (B) の適用例



奇数次数の点は0個なのでこのグラフは一筆書き可能である。

オイラーの定理 (B) の適用例 (2)

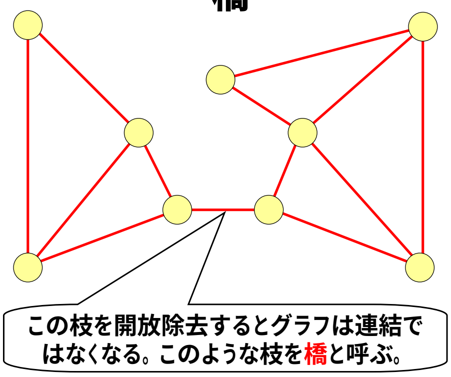


このグラフは一筆書き可能。

目次

1. ケーニヒスベルグの橋の問題
2. オイラーの定理
3. フルーリー (Fleury) のアルゴリズム
4. ハミルトングラフ
5. 演習

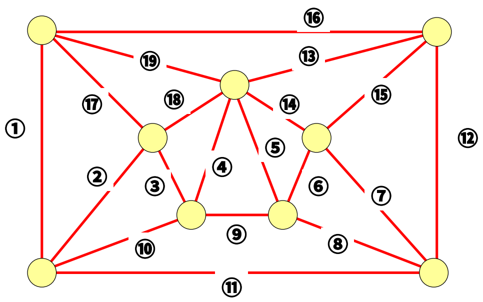
橋



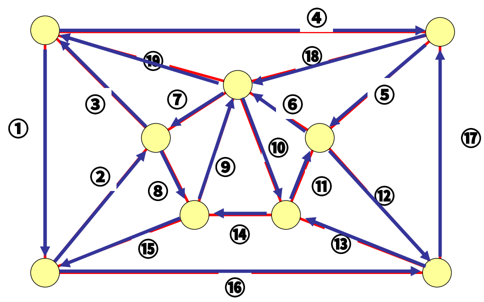
フルーリーのアルゴリズム

1. 奇数次数の点があるならば奇数次数の点から、そうでなければ任意の点から出発する。
2. 現在の点から出ている枝が無ければ終了する。そうでなければ、現在の点から出ている枝のうち、可能であれば橋ではない枝を進む。橋しか選べないのであれば橋を進む。
3. 通った枝を消して、この枝に添って進んだ先の点を現在の点として2へ戻る。

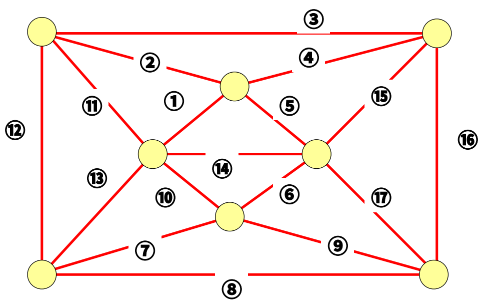
フルーリーのアルゴリズム(例題)



フルーリーのアルゴリズムによって得られた解

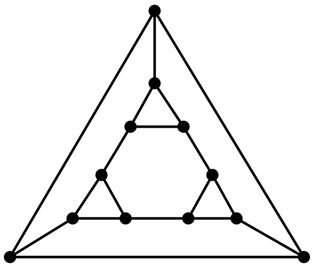


フルーリーのアルゴリズム(例題)



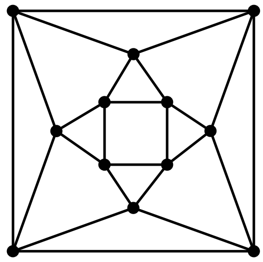
目次

ハミルトン閉路

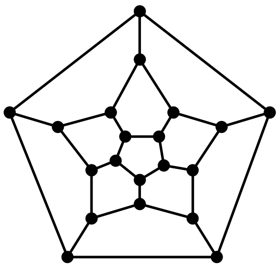


グラフの任意の一点から出発して、全ての点をちょうど一度だけ通って最初の点に戻る閉路を**ハミルトン閉路**と呼ぶ。ハミルトン閉路が存在するグラフをハミルトングラフと呼ぶ。

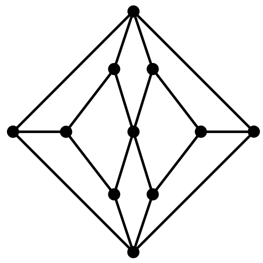
ハミルトン閉路は存在するか？



ハミルトン閉路は存在するか？



ハミルトン閉路は存在するか？



ハミルトン閉路の特徴付け

- ハミルトン閉路の存在に関しては、オイラーの定理のような簡単な特徴づけは知られていない。
- さらに、ハミルトン閉路を見つける効率の良いアルゴリズムも知られていない。（良いアルゴリズムは存在しないだろうと信じられている。）

目次