グラフとネットワーク (第5回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/08/

安藤和敏
静岡大学工学部

2008.10.30

1.1. 連結性

まず最初にことわっておくが, このレジュメに書かれている 2 連結, 3 連結, k 連結の定義は教科書に書かれているものとは少し異なっていることに注意しておく. このレジュメに書かれている方が正解でそれは著者も認めている.

1.1.1. 連結性

グラフ $G = (V, A)$ (無向でも有向でも良い) に対して, G の任意の 2 点 u と v に対して, u から v への道が存在するとき, G は**連結である** (connected) といい, G を**連結なグラフ** (connected graph) と呼ぶ. 与えられたグラフが連結か否かの判定は, DFS か BFS を用いて簡単にできる.

必ずしも連結でないグラフ $G = (V, A)$ に対して, その極大な連結部分グラフを G の**連結成分** (connected component) と呼ぶ. ここで, H が G の**極大な連結部分グラフ**であるとは,

(i) H は G の連結な部分グラフであり,

(ii) H を部分グラフとして**真に**含むような G の連結部分グラフは存在しない

ということである.

1.1.2. 2 連結性

グラフ $G = (V, A)$ と点部分集合 $U \subseteq V$ に対して, $V \setminus U$ で誘導される部分グラフ ($\Rightarrow$ 教科書 p.6) $G[V \setminus U]$ を, $G \setminus U$ と表す. つまり,

$$G \setminus U = G \text{ から}, U \text{ と } U \text{ の中の点に接続する枝を開放除去したグラフ}$$

である. U が 1 点からなる集合のとき, 例えば $U = \{v\}$ のときは, $G \setminus \{v\}$ と書く代りに $G \setminus v$ と書く.

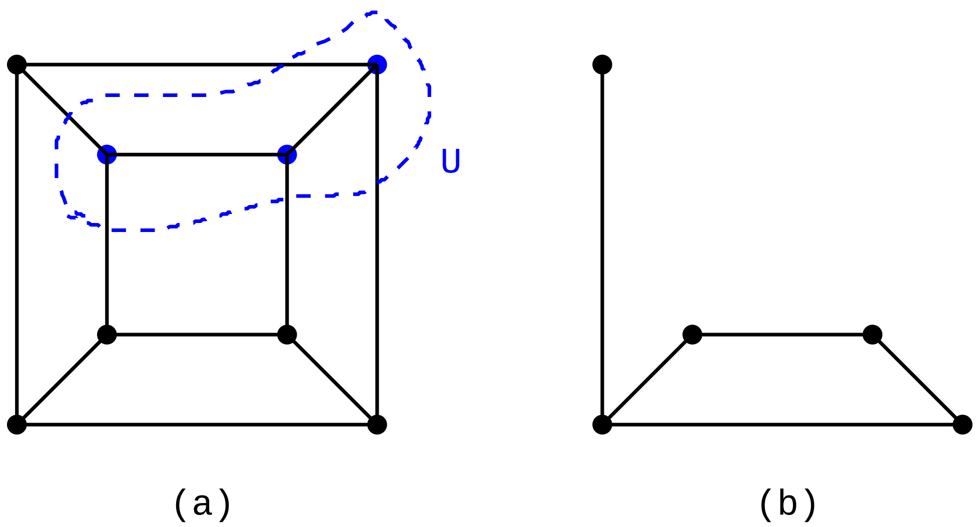

図 1.1: (a) G と $U \subseteq V$ (b) $G \setminus U$

$G = (V, A)$ を連結なグラフとする．$G \setminus v$ が連結でなくなるような点 v を**関節点** (articulation vertex) と呼ぶ．関節点が存在しないとき，そのグラフは **2 連結** (2-connected) と呼ばれる．つまり，どの 1 点 (とそれに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが，2 連結グラフである．

連結なグラフ $G = (V, A)$ に対して，その極大な 2 連結部分グラフを G の **2 連結成分** (2-connected component) と呼ぶ．

1.1.3. 3 連結性，4 連結性，$\cdots$，k 連結性

$G = (V, A)$ を 2 連結なグラフとする．G のどんな 2 点 u, v に対しても，$G \setminus \{u, v\}$ が連結であるとき，G は **3 連結である** (3-connected) という．つまり，どんな 2 点 (とそれらに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが 3 連結グラフである．

一般の $k \geq 4$ に対しても同様に，$G = (V, A)$ の k 連結性が定義される．

$|U| < k$ であるどのような点部分集合 U に対しても，$G \setminus U$ が連結であるときに，G を **k 連結な**グラフという．つまり，どんな $l < k$ 点 (とそれらに接続する枝たち) を除去しても連結なグラフが k 連結グラフである．

例 1.1: 図 *1.1* のグラフ G は，*3* 連結であるが *4* 連結でない．なぜか?

1.1.4. k 枝連結性

グラフ G は，G のどんな $k - 1$ 本以下の枝を開放除去しても連結であるときに，**k 枝連結** (k-edge connected) と呼ばれる．

k 連結は，枝連結との区別を強調して，**k 点連結**とも呼ばれる．

例 1.2: 図 *1.1* のグラフ G は，*2* 枝連結，*3* 枝連結であるが，*4* 枝連結ではない．