グラフとネットワーク (第13回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/08/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2009.01.22

2.2. フローとカット

2.2.1. 2 端子フロー

[アルゴリズムの正当性]

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ の**カット** (cut) とは, $s^+ \in U$, $s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことである. カット U の**容量** $\kappa_c(U)$ は, 以下で定義される.

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \tag{2.29}$$

ここで, $\Delta^+ U$ は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体である.

例 2.1: 図 *2.1* のようにカット $U = \{s^+, d, j, h\}$ をとると, その容量は 17 である.

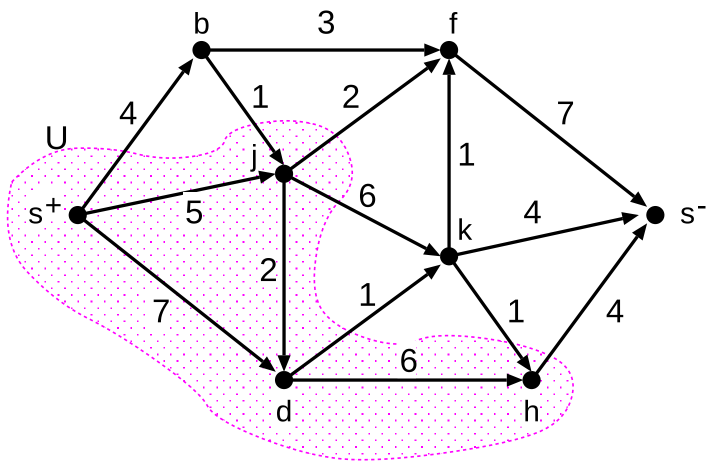
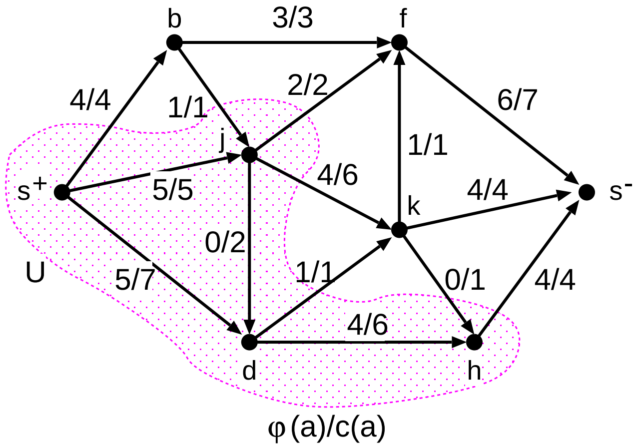


図 2.1: カット $U = \{s^+, d, j, h\}$

補題 2.7: ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \leq \kappa_c(U) \tag{2.30}$$

が成り立つ.



$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
&= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(j) + \partial\varphi(h) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(s^+, j) + \varphi(s^+, d)) \\
&\quad +(\varphi(d, h) + \varphi(d, k) - \varphi(s^+, d) - \varphi(j, d)) \\
&\quad +(\varphi(j, f) + \varphi(j, k) + \varphi(j, d) - \varphi(b, j) - \varphi(s^+, j)) \\
&\quad +(\varphi(h, s^-) - \varphi(k, h) - \varphi(d, h)) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(d, k) + \varphi(h, s^-) + \varphi(j, k) + \varphi(j, f)) \\
&\quad -(\varphi(b, j) + \varphi(k, h)) \\
&= \sum_{a\in\Delta^+U} \varphi(a) - \sum_{a\in\Delta^-U} \varphi(a) \\
&\le \sum_{a\in\Delta^+U} c(a) \\
&= 17
\end{aligned}
$$

図 2.2: 式 (2.31) の説明

(証明)

$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v\in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a\in\Delta^+U} \varphi(a) - \sum_{a\in\Delta^-U} \varphi(a) \\
&\le \sum_{a\in\Delta^+U} c(a) - \sum_{a\in\Delta^-U} 0 \\
&= \kappa_c(U). \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

□

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} \le \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \qquad (2.32)$$

を得る.

定理 2.a: フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(証明) φ をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし, $\mathcal{N}$ の**ある**カット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \qquad (*)$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \le \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \le \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大フローであり, W は最小カットである.

φ に対応する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を考えよう (図 2.3 を見よ). このとき, 入口 s^+ から出口 s^- までの有向道は存在しない.

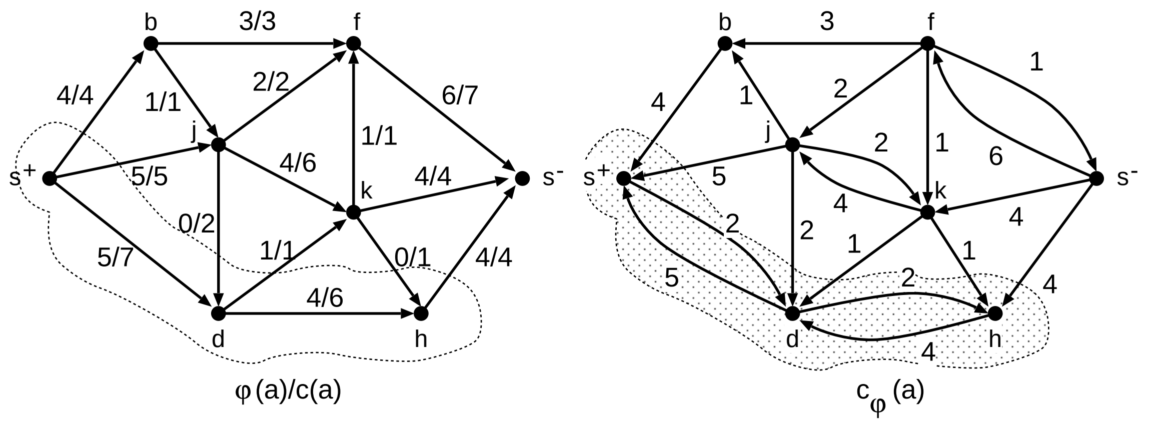


図 2.3: (a) アルゴリズムが終了したときの φ と (b) それに対応する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

$\mathcal{N}_\varphi$ において, 入口 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W と置く (図 2.3 を見よ). このとき, $s^+ \in W$ であり, また, s^- は s^+ から到達可能ではないから $s^- \notin W$ である. したがって, W はカットである. このカット W に対して, (*) が成り立つことを示そう.

次の (ア),(イ) が成り立つ.

(ア) ネットワーク $\mathcal{N}$ において W から出る枝 a は, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ の中には存在しないから, $\varphi(a) = c(a)$.

(イ) ネットワーク $\mathcal{N}$ において W に入る枝 a' に対して, その逆向き枝 $\bar{a'}$ は補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ の中には存在しないから, $\varphi(a') = 0$.

したがって, 式 (2.31) と同じ計算をカット W と最大フロー φ に対して行うと,

$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} 0 \\
&= \kappa_c(W) \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

を得る. □

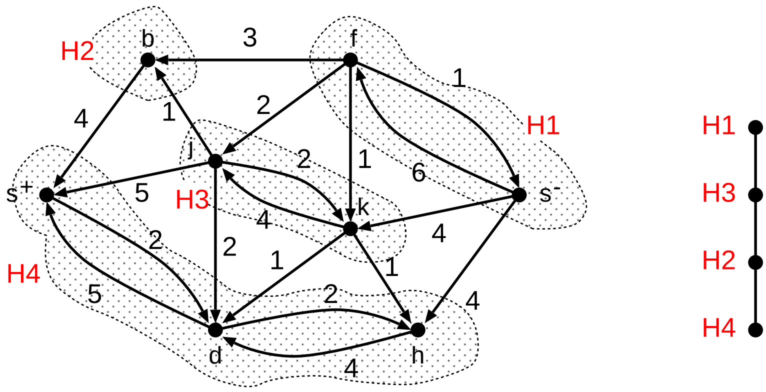
フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は, つぎのことを示したことにもなっている.

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理):

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー }\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット }\}. \qquad (2.40)$$

□

定理 2.5 の証明から, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ の補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ において, s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W とすると. W は最小カットになる.



c_φ (a)

図 2.4: $\mathcal{N}_\varphi$ の強連結成分分解とそのハッセ図

例えば, ネットワークが図 2.1 で与えられるときは, 最小カット W は $W = \{s^+, d, h\}$ で与えられる. 最小カットの容量は, $\kappa_c(W) = 14$ である. これは, 最大フローの流量と等しくなっていることに注意しよう.

さらに, この補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を用いると, **全ての**最小カットも求めることができる. 図 2.1 のネットワークを用いてこれを説明しよう. まず, 補助ネットワークを強連結成分分解する. そして, そのハッセ図を求める.

このハッセ図の一番下の成分 (この例では H_4) だけから成る集合 $\{H_4\}$ から出発して, 以下のようにこのハッセ図の下から順に H_i を加えていく.

$$\{H_4\}, \{H_4, H_2\}, \{H_4, H_2, H_3\} \tag{2.41}$$

そして, 一番上の成分 (この例では H_1) が加えられる直前でやめる. これら 3 つ対応する点集合

$$\{s^+, d, h\}, \{s^+, d, h, b\}, \{s^+, d, h, b, j, k\} \tag{2.42}$$

が, $\mathcal{N}$ の全ての最小カットである.