グラフとネットワーク (第12回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/06/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2007.01.26

2.2. フローとカット

2.2.1. 2端子フロー

[フォード・ファルカーソンのアルゴリズム]

ここで考えるネットワークは, グラフ $G = (V, A)$ の相異なる特別な 2 点 s^+, s^- が指定されて, さらに, 各枝 $a \in A$ に対してその枝中を単位時間に流れるフローの流量の上限 $c(a)$ が定められているものである. そのようなネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ と書く. 特別な点 s^+ と s^- はそれぞれ**入口** (source,entrance), **出口** (sink, exit) と呼ばれる.

例 2.1: 図 2.3(a) は, ネットワークの例である. □

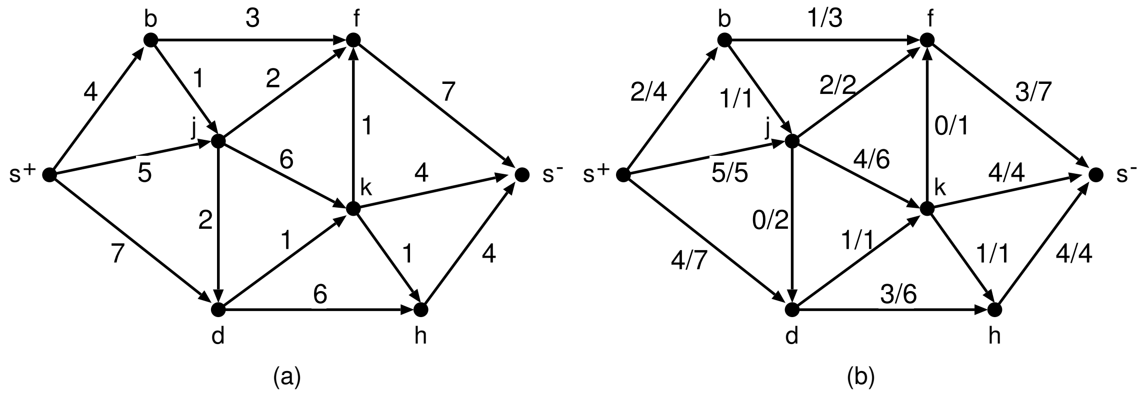

図 2.1: 容量付き有向グラフとフロー

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上の**フロー** (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数 $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ のことである.

(i) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \tag{2.25}$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点 $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0.$$

テキストの p. 4 で教えたように, $\delta^+ v$ は v から出る枝全体であり, $\delta^- v$ は v に入る枝全体である (図 2.2 を見よ).

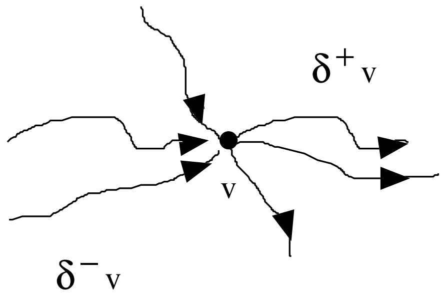

図 2.2: $\delta^+ v$ と $\delta^- v$

例 **2.2**: 図 2.3(b) の φ は, 図 2.3(a) のネットワーク上のフローである. □

各点 $v \in V$ に対して $\partial\varphi(v)$ を

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) \tag{2.27}$$

と定義すると, 流量保存則は

$$\partial\varphi(v) = 0. \tag{2.26}$$

となる. $\partial\varphi: V \to \mathbb{R}$ はフロー φ の**境界** (boundary) と呼ばれる.

流量保存則によって,

$$\partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-) \tag{2.28}$$

が成り立つ. (2.28) の値をフロー φ の**流量** (value, flow value) といい, $v^*(\varphi)$ と書くことにする.

例 **2.3**: 図 2.3(b) のフロー φ の流量は, 5 である.

与えられたネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して, $\mathcal{N}$ 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを**最大フロー (最大流)** (maximum flow) と呼び, 最大フローを求める問題を**最大フロー問題** (maximum flow problem) と呼ぶ.

図 2.4 に最大フロー問題を解くフォード-ファルカーソンのアルゴリズムを記述する. その前に, 補助ネットワークという概念について説明しなければならない.

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフロー φ が与えられたときに, φ に関する**補助ネットワーク** (auxiliary network) $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$ とは, 以下のように定義される. 枝集合 A_φ は,

$$A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-, \tag{2.33}$$

$$A_\varphi^+ = \{a | a \in A, \varphi(a) < c(a)\} \tag{2.34}$$

$$A_\varphi^- = \{\bar{a} | a \in A, 0 < \varphi(a)\} \quad (\bar{a}\text{: } a \text{ の逆向き枝}) \tag{2.35}$$

で与えられ, 容量関数 $c_\varphi\colon A_\varphi \to \mathbb{R}$ はつぎのように定義される.

$$c_\varphi(a) = \begin{cases} c(a) - \varphi(a) & \text{if } a \in A_\varphi^+ \text{ のとき}, \\ \varphi(\bar{a}) & \text{if } a \in A_\varphi^- \text{ のとき}. \end{cases} \tag{2.36}$$

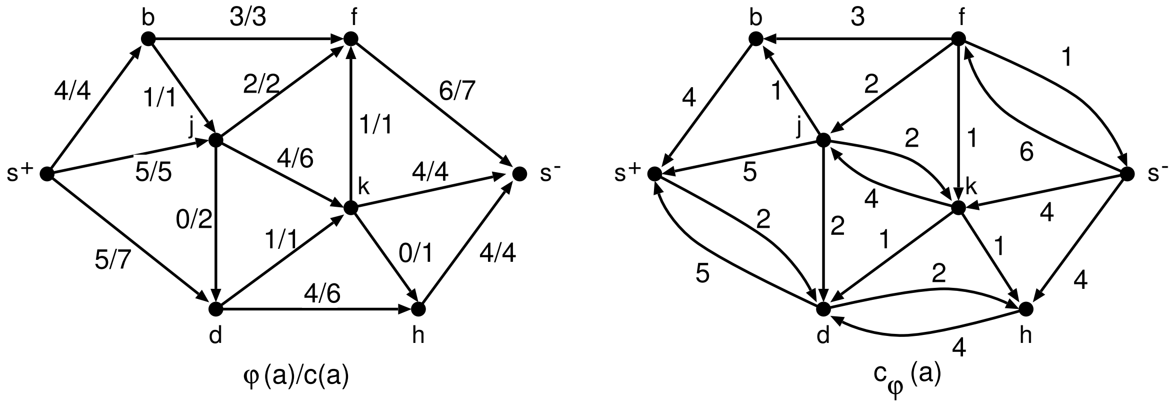

図 2.3: $\mathcal{N}$ 中のフローと補助ネットワーク

例 2.4: 図 *2.5* と図 *2.6* にアルゴリズムが動作する様子を示す. 最大フローの流量は 14 である. □

$\varphi(a) \leftarrow 0 \ (a \in A)$.
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作る.
for $\mathcal{N}_\varphi$ 上に s^+ から s^- までの有向道 P が存在する **do**
  $d \leftarrow \min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}$.
  for P の各枝 a について **do**
    if a が A_φ^+ の枝 **then**
      $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
    else if a が A_φ^- の枝 **then**
      $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) - d$.
    end if
  end for
  補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作り直す.
end for

図 2.4: フォード-ファルカーソンのアルゴリズム

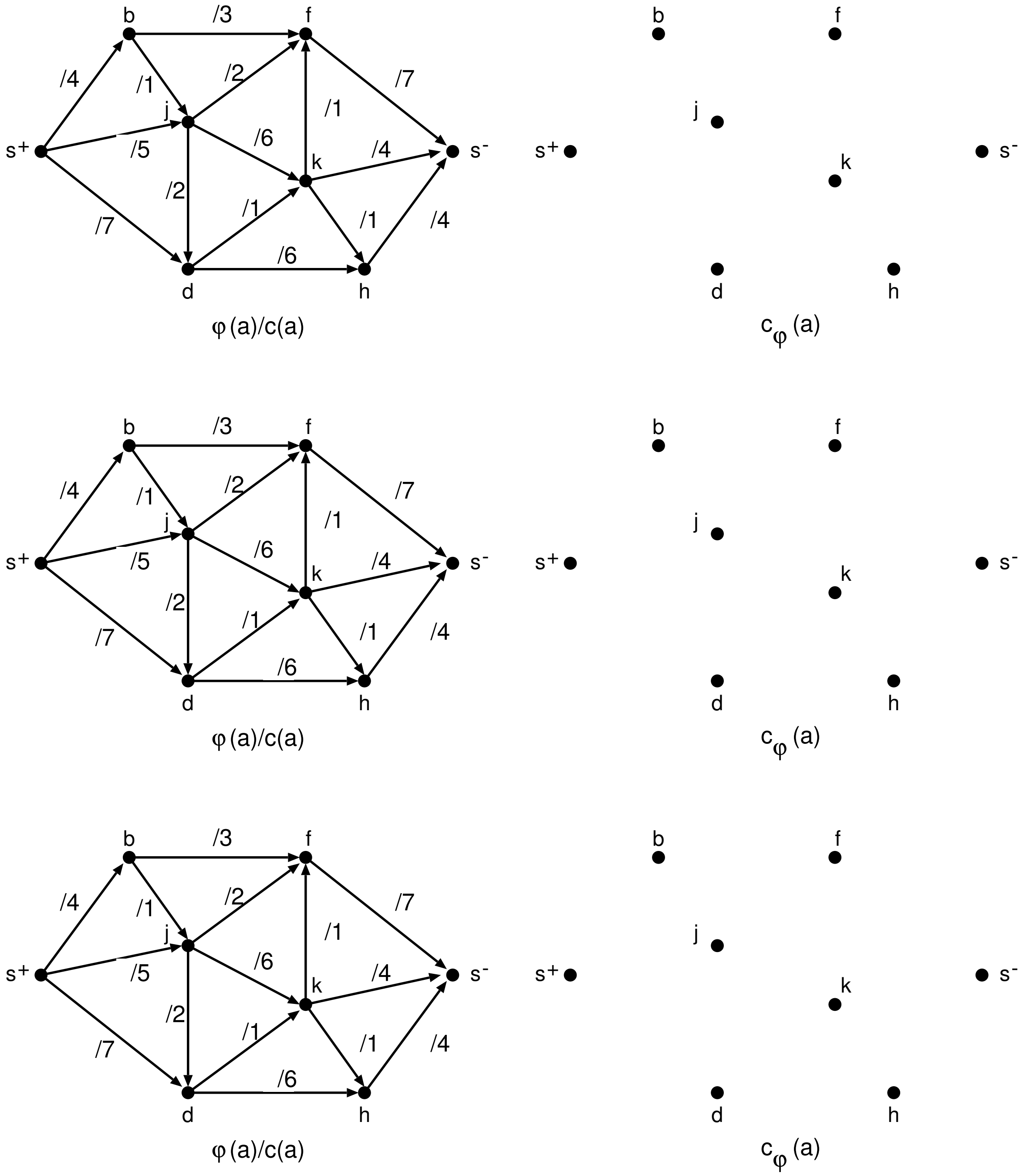

図 2.5: アルゴリズムの動き

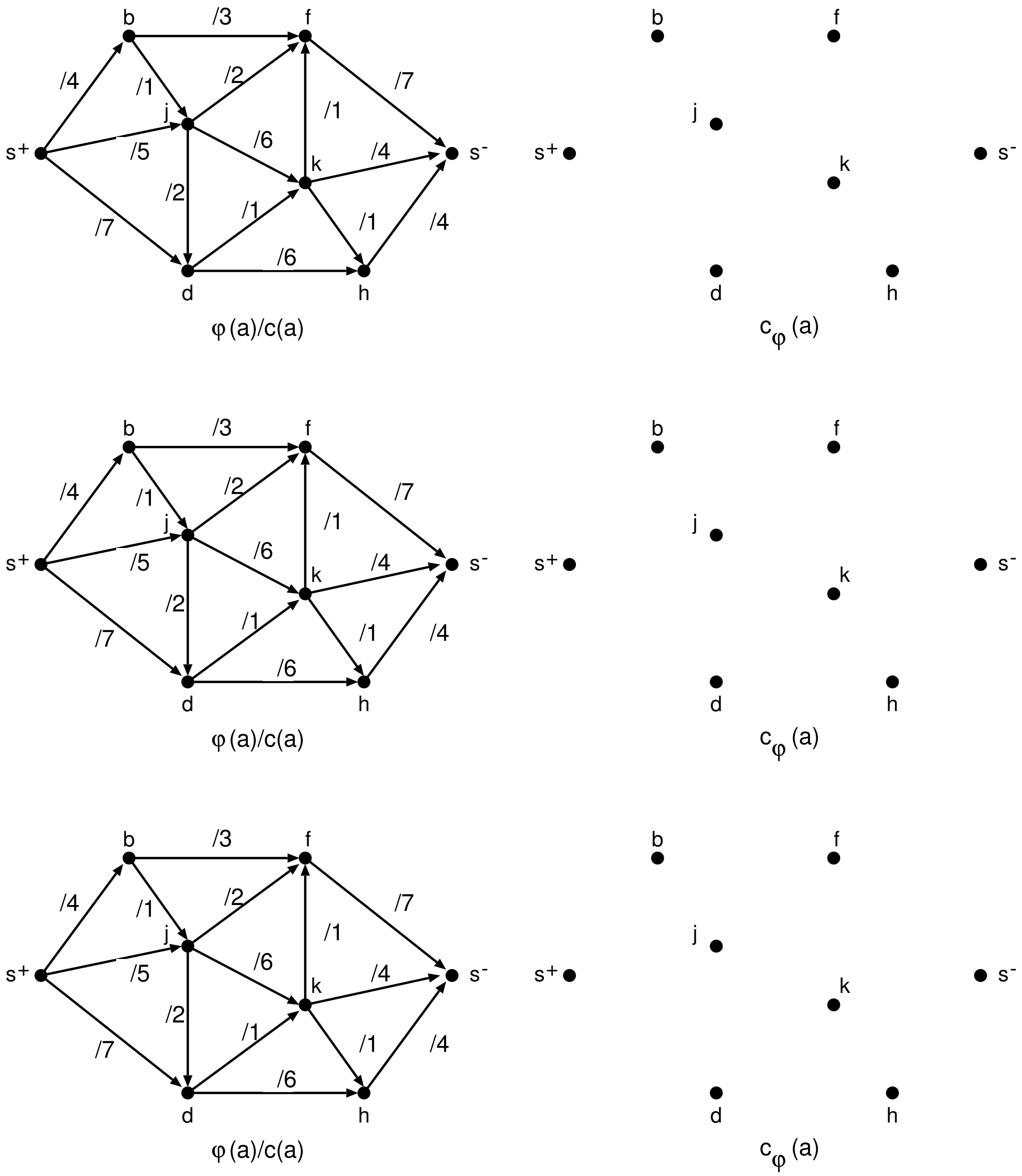

図 2.6: アルゴリズムの動き (続き)