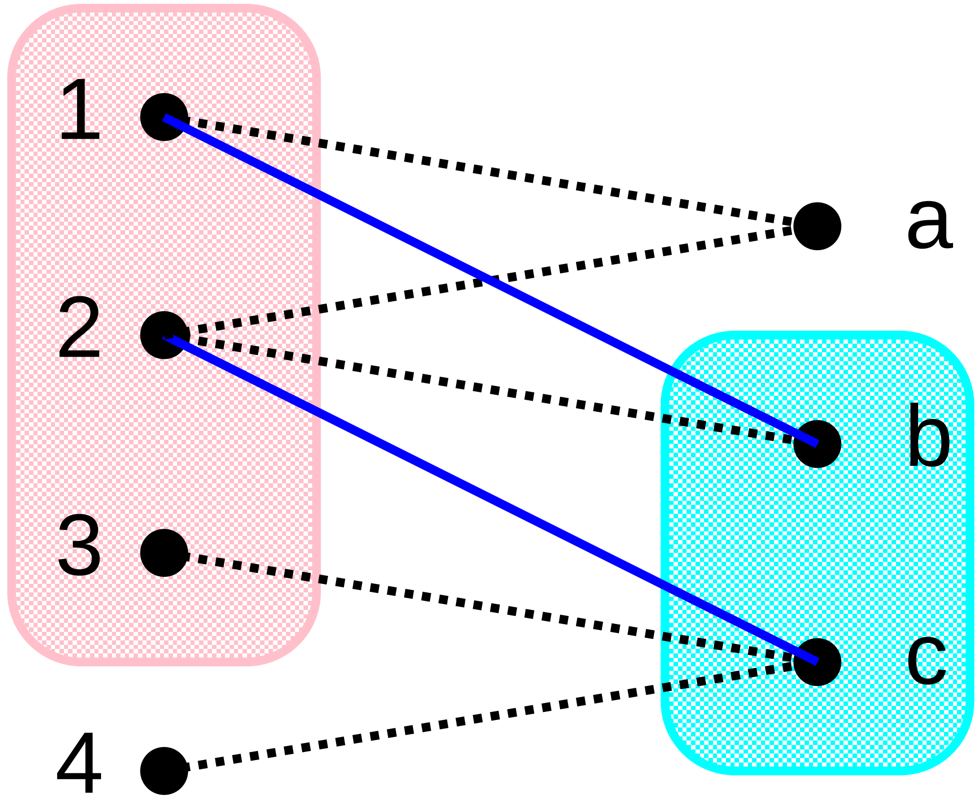
グラフとネットワーク (第13回)

安藤 和敏

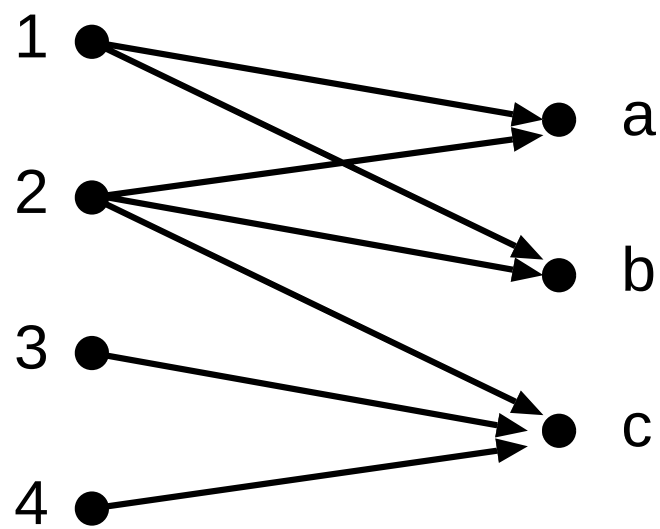
ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

2.4 マッチングと被覆

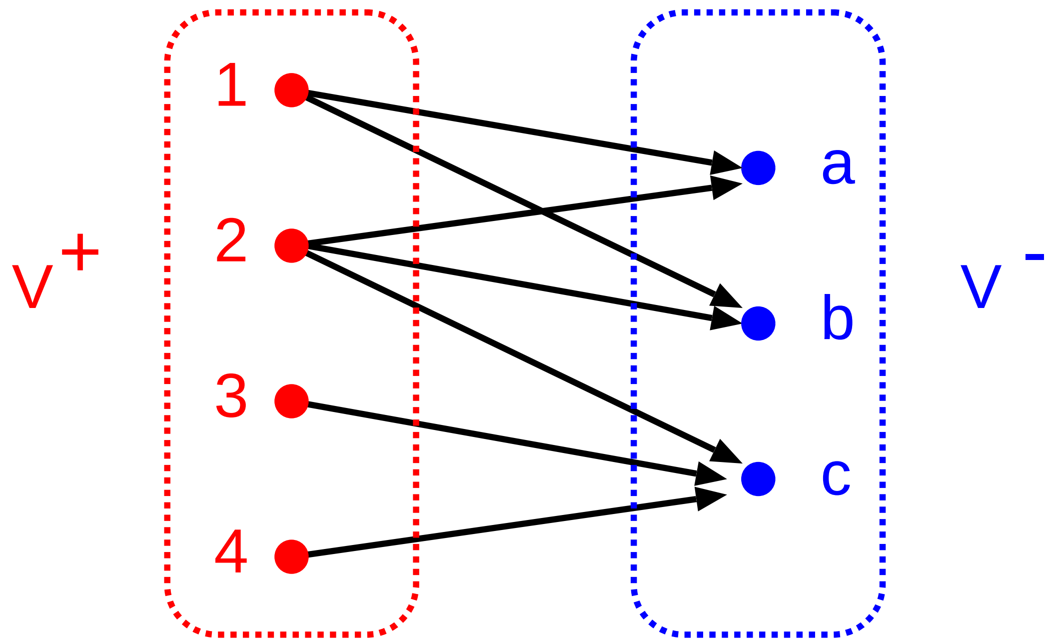


2部グラフ (⇒ テキスト p. 11)



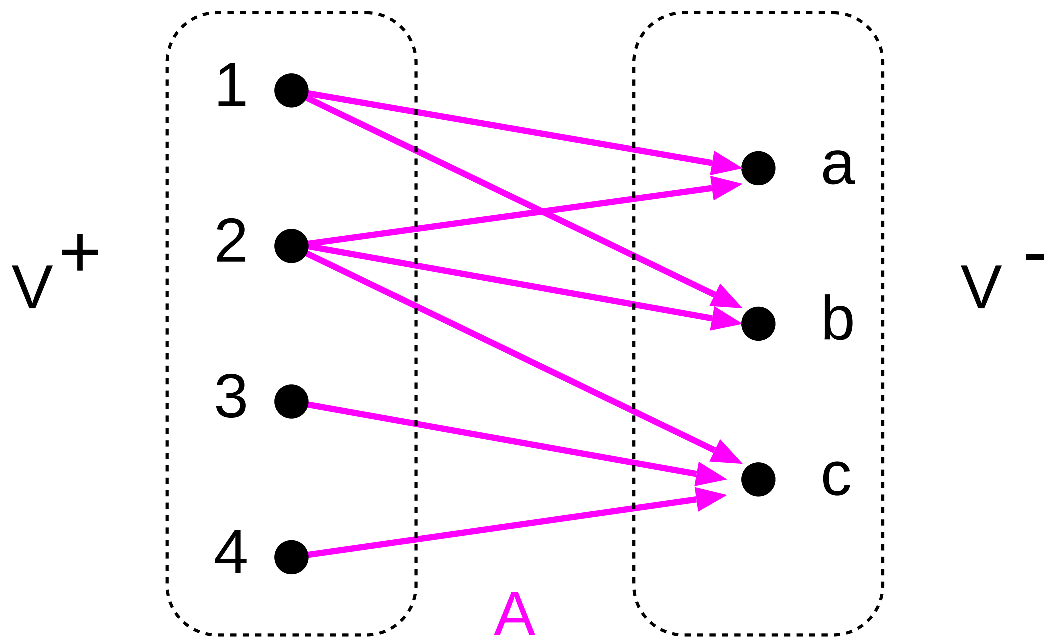
2部グラフ (⇒ テキスト p. 11)

グラフ $G = (V, A)$ の点集合 V が V^+ と V^- に分割されて,



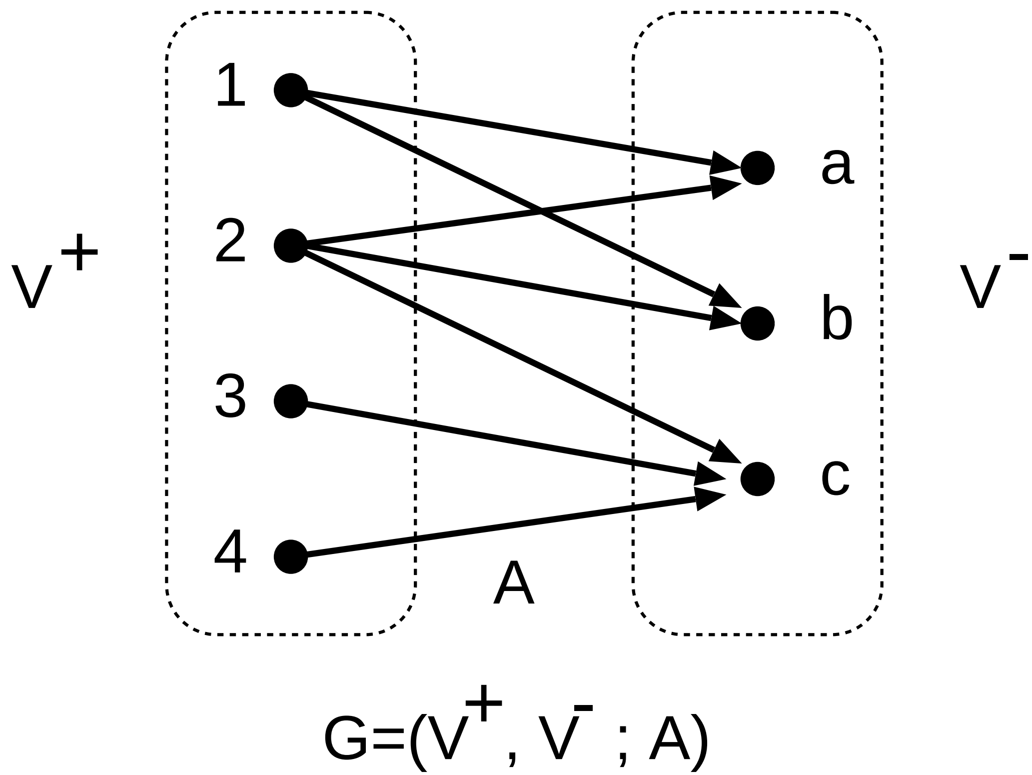
2部グラフ (⇒ テキスト p. 11)

グラフ $G = (V, A)$ の点集合 V が V^+ と V^- に分割されて，　各枝 $a \in A$ が V^+ の点から出て V^- の点に入るとき，

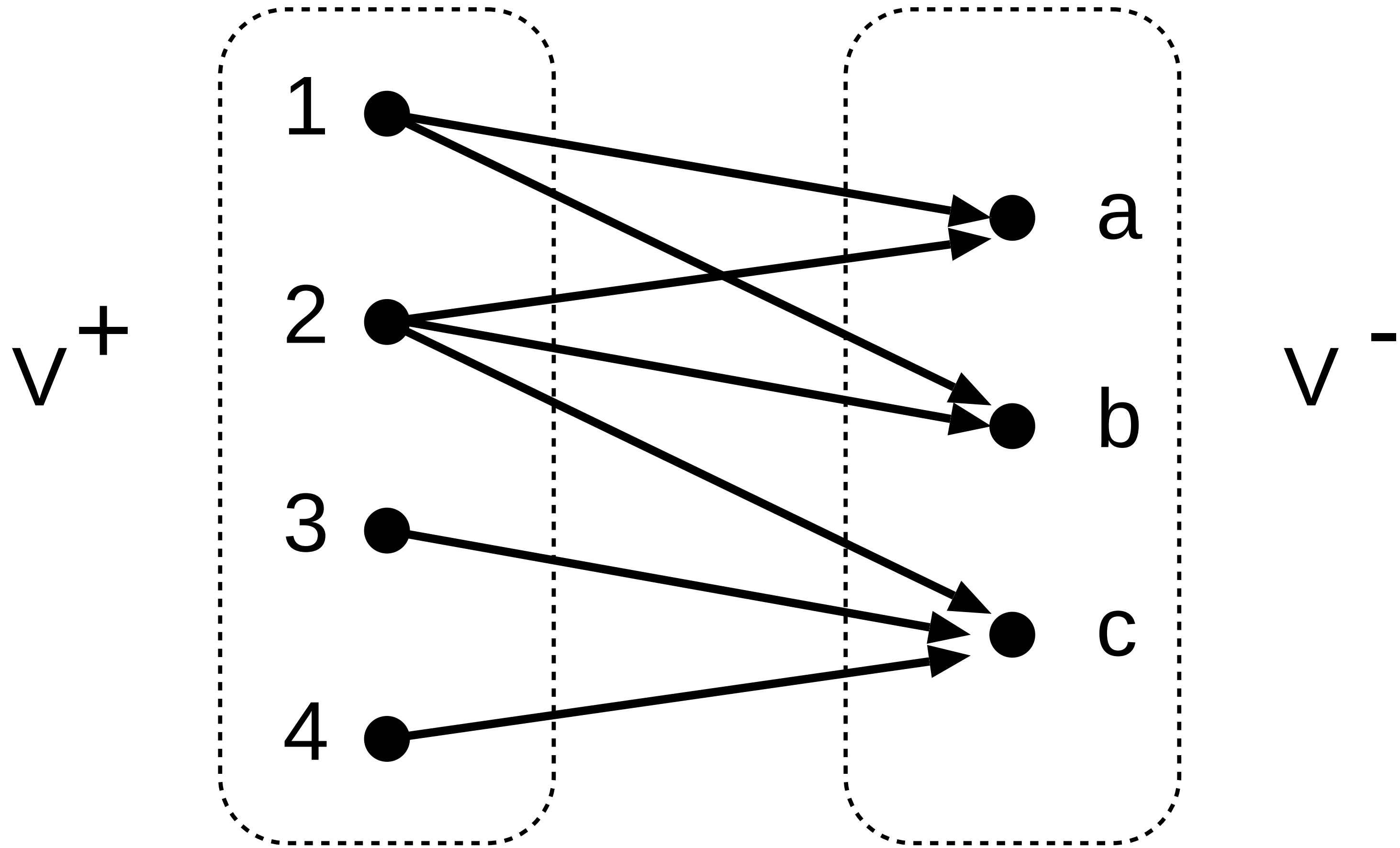


2部グラフ (⇒ テキスト p. 11)

グラフ $G = (V, A)$ の点集合 V が V^+ と V^- に分割され，各枝 $a \in A$ が V^+ の点から出て V^- の点に入るとき，G を2部グラフと呼んで，
$G = (V^+, V^-; A)$ と表す.



2部グラフ $G = (V^+, V^-; A)$ の例



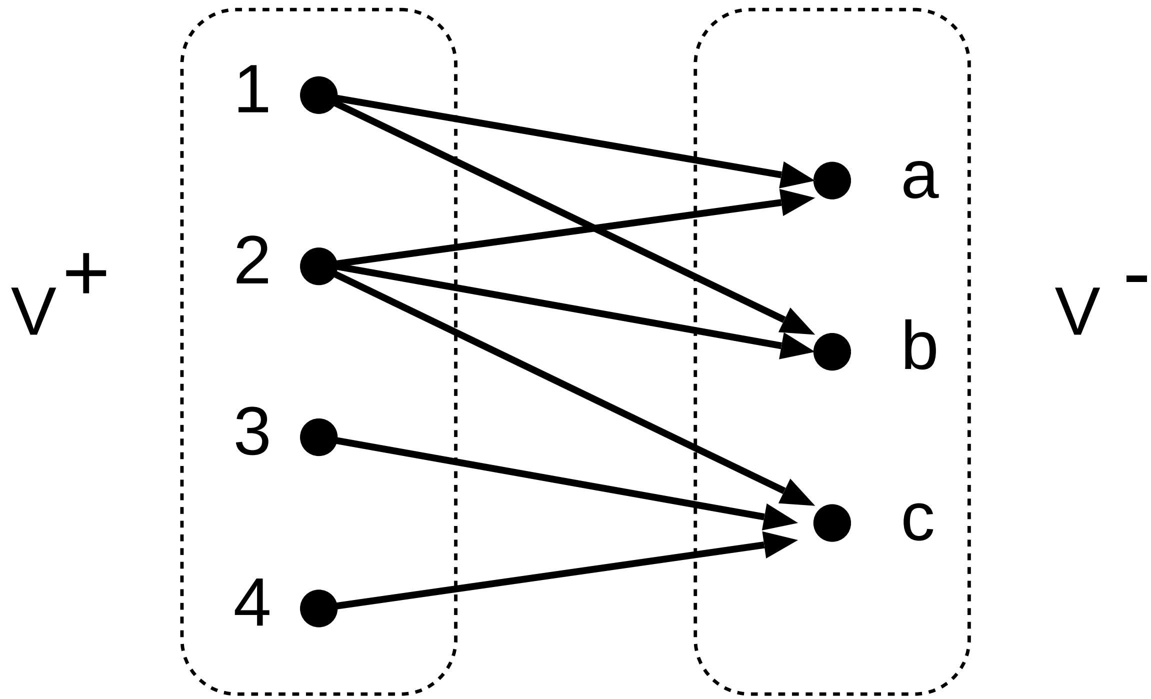
この例では, $V^+ = \{1, 2, 3, 4\}$, $V^- = \{a, b, c\}$,

$A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (2, c), (3, c), (4, c)\}$.

2部グラフの描き方の約束

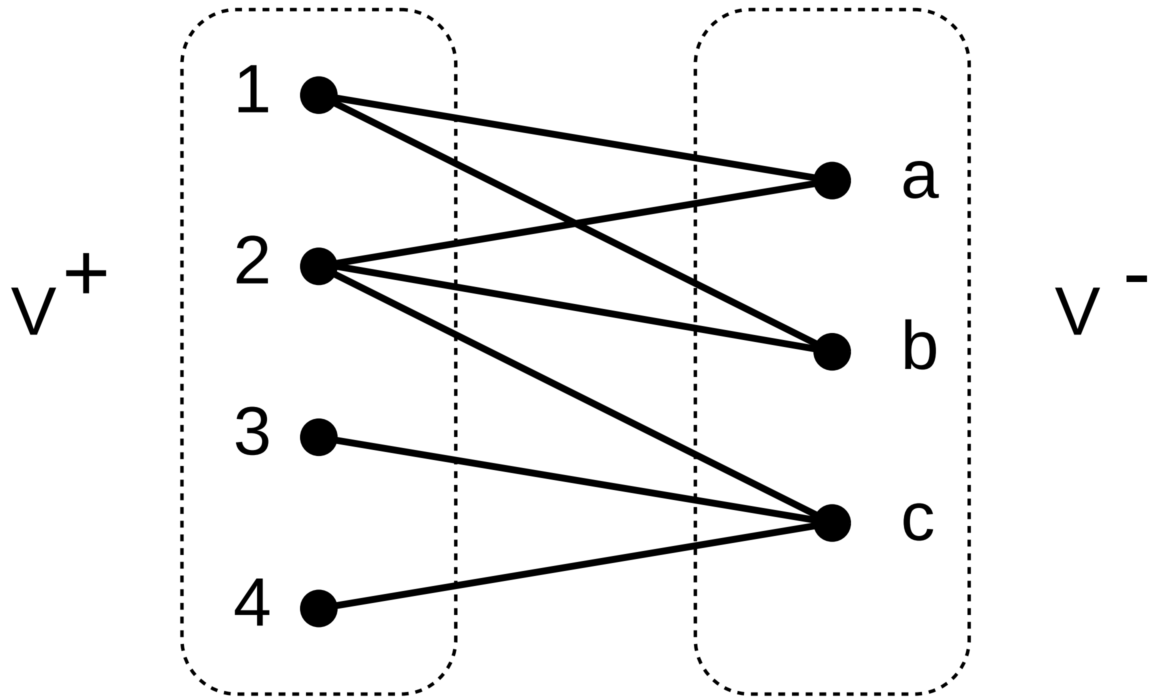
2部グラフの描き方の約束

枝は V^+ から V^- への向きを持つので,



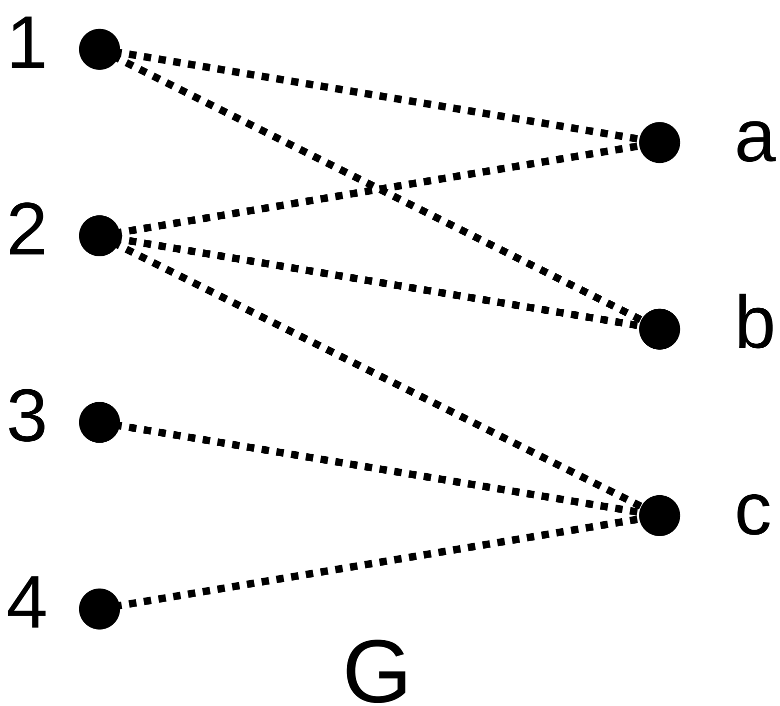
2部グラフの描き方の約束

枝は V^+ から V^- への向きを持つので，無向グラフとして描けば十分である．



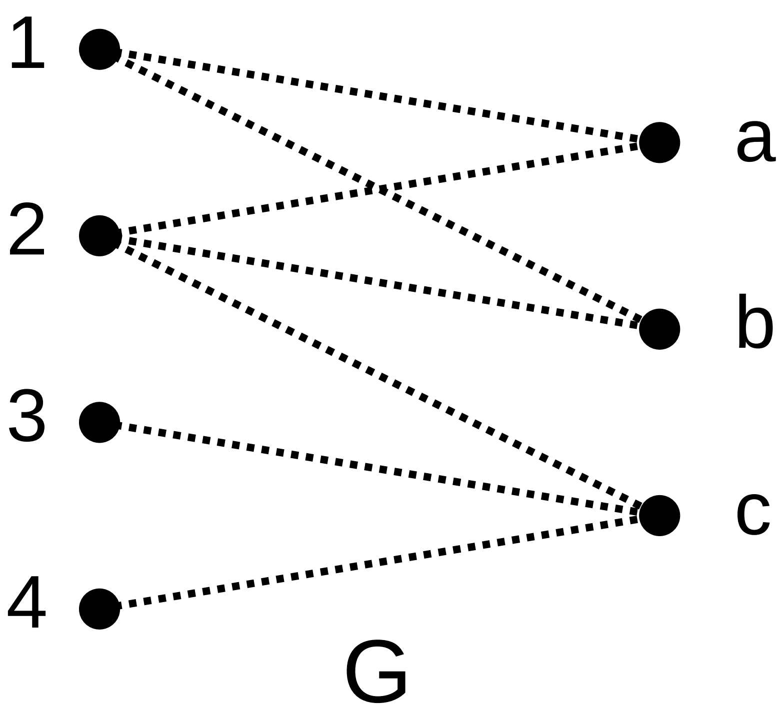
2部グラフと $\{0, 1\}$-行列

2部グラフは自然は方法で, $\{0, 1\}$-行列と対応する.



2部グラフと$\{0,1\}$-行列

2部グラフは自然は方法で, $\{0,1\}$-行列と対応する.



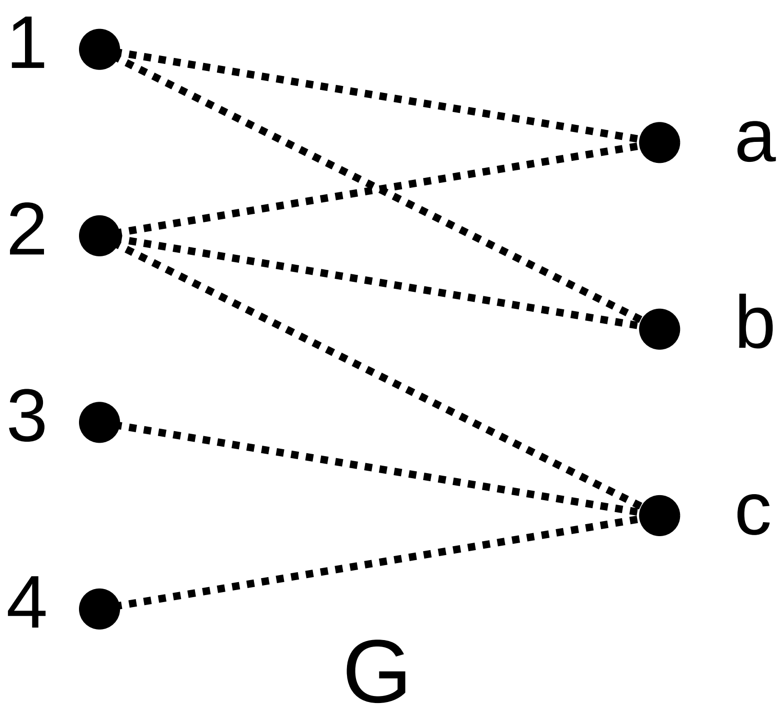
$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

M_G

2部グラフと$\{0,1\}$-行列

2部グラフは自然は方法で, $\{0,1\}$-行列と対応する.



$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

M_G

$$M_G(i,x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,x) \in A, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

マッチング

マッチング

$M \subseteq A$ は, 次の (*) を満たすとき, G のマッチングと呼ばれる.

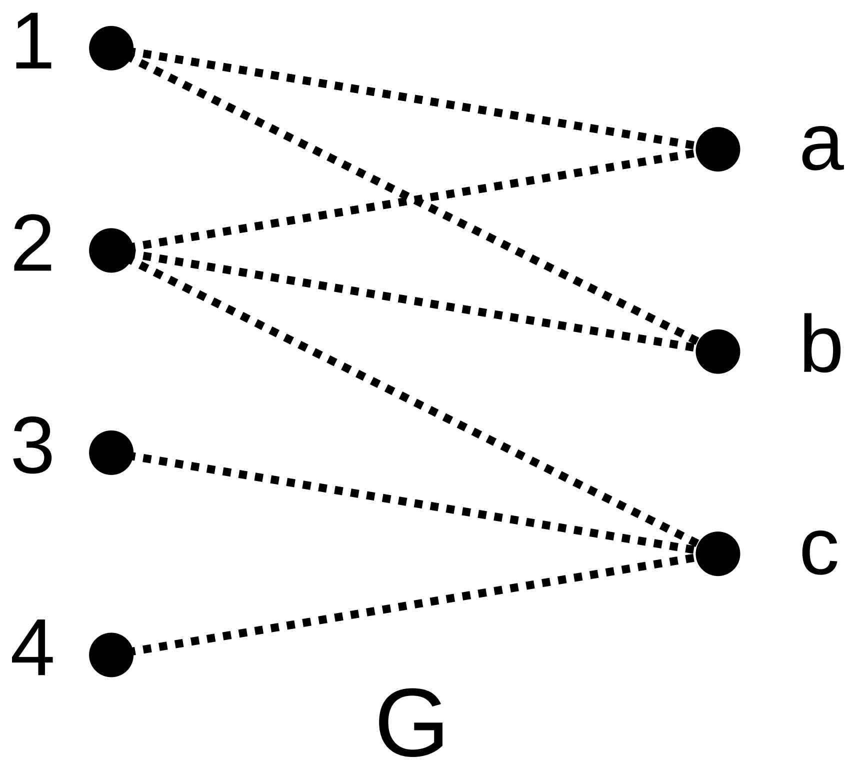
マッチング

$M \subseteq A$ は, 次の (*) を満たすとき, G のマッチングと呼ばれる.

(*) 任意の相異なる 2 つの枝 $a_1, a_2 \in M$ に対して, $\partial^+ a_1 \neq \partial^+ a_2$ かつ $\partial^- a_1 \neq \partial^- a_2$.

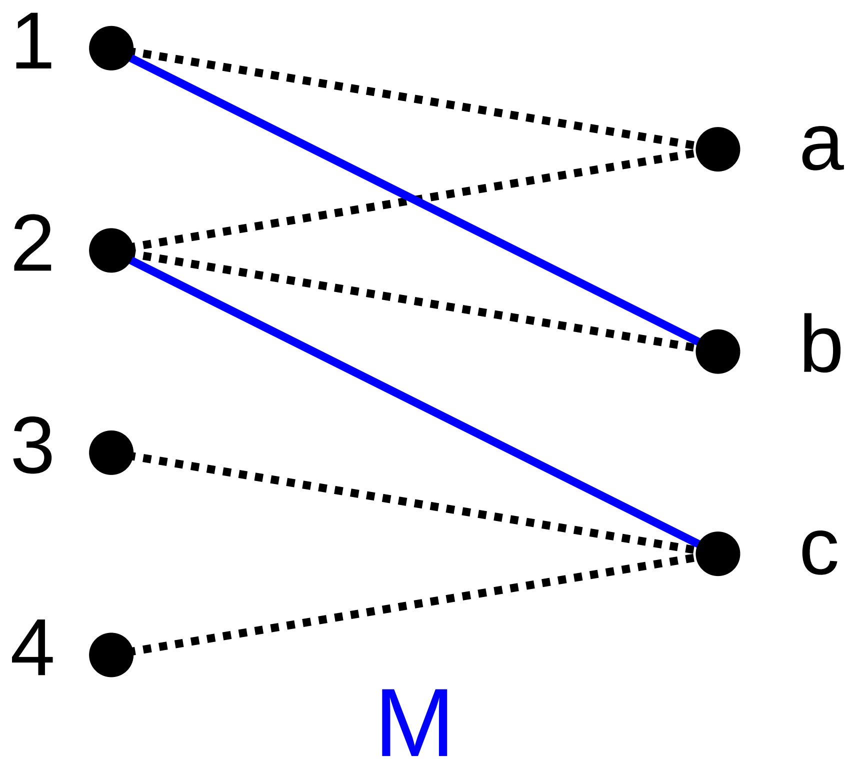
マッチング

$M \subseteq A$ は, 次の (*) を満たすとき, G のマッチングと呼ばれる.
(*) 任意の相異なる 2 つの枝 $a_1, a_2 \in M$ に対して, $\partial^+ a_1 \neq \partial^+ a_2$ かつ $\partial^- a_1 \neq \partial^- a_2$.

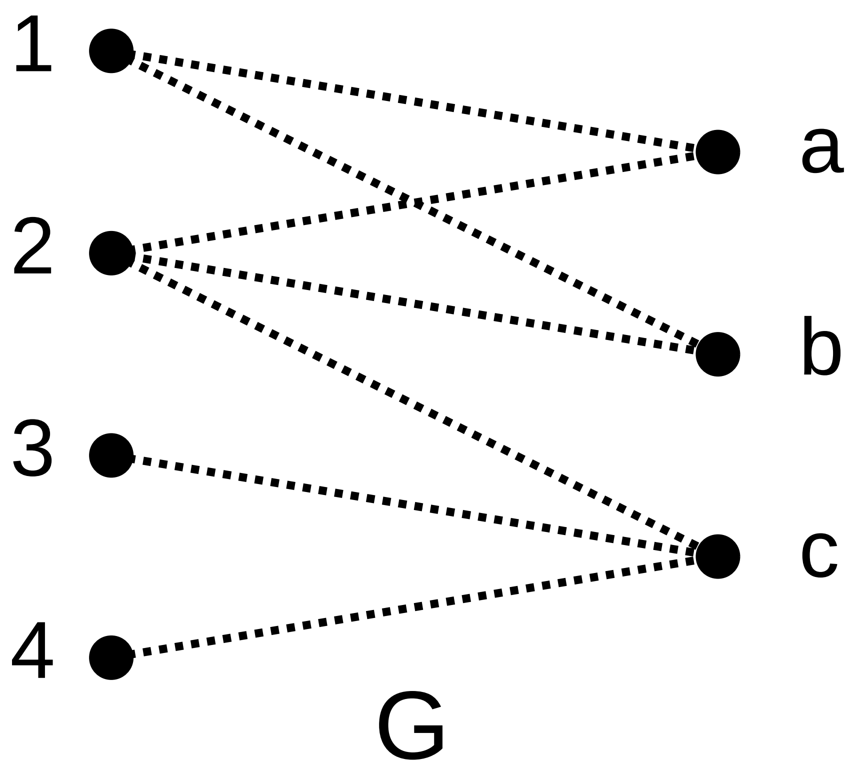


マッチング

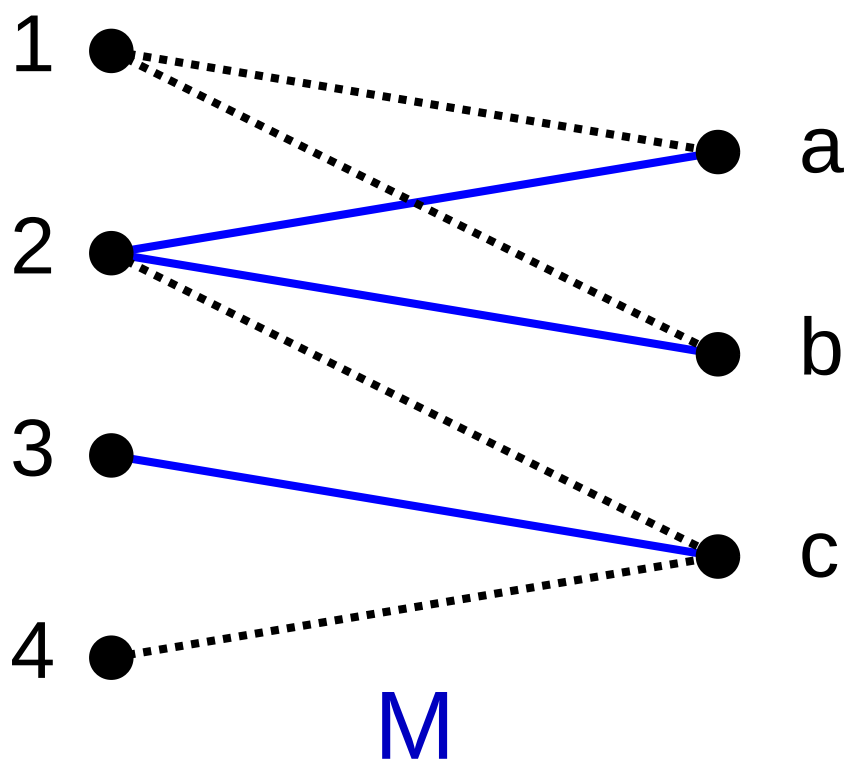
$M \subseteq A$ は, 次の (*) を満たすとき, G のマッチングと呼ばれる.
(*) 任意の相異なる 2 つの枝 $a_1, a_2 \in M$ に対して, $\partial^+ a_1 \neq \partial^+ a_2$ かつ $\partial^- a_1 \neq \partial^- a_2$.



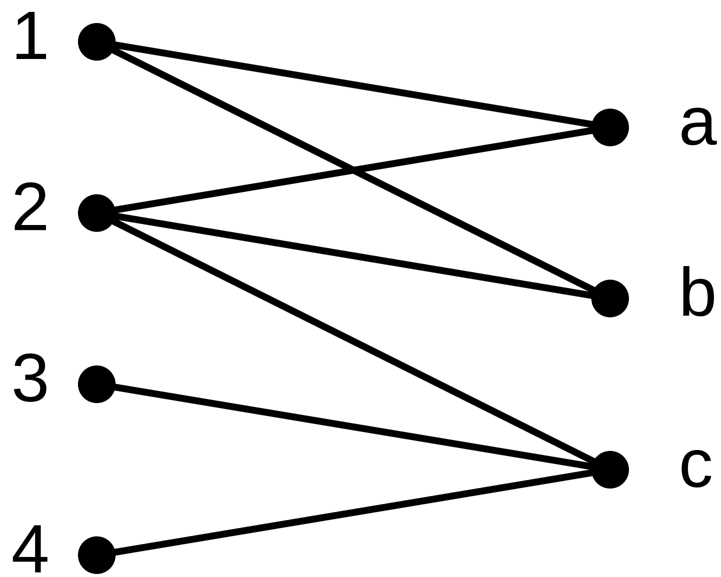
M は G のマッチングではない



M は G のマッチングではない



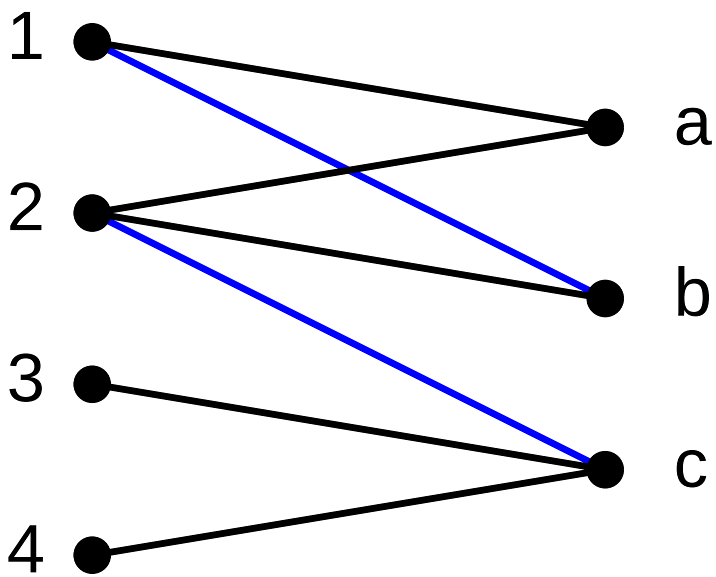
マッチングと$\{0,1\}$-行列



$\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

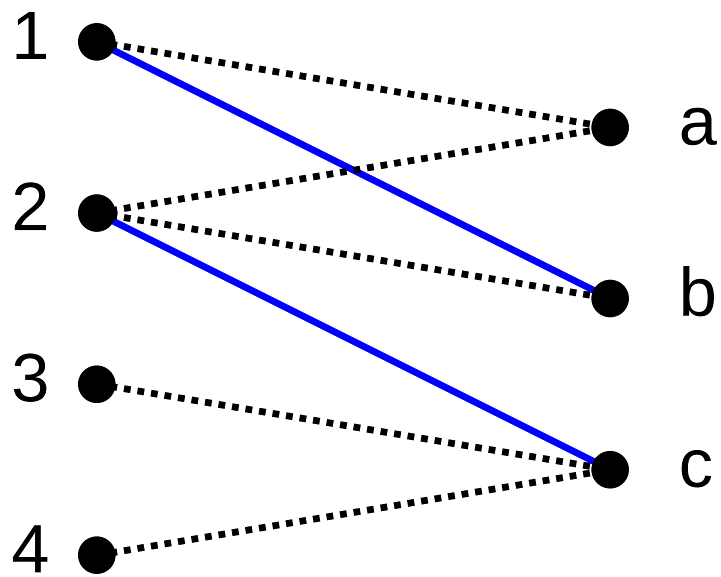
マッチングと $\{0,1\}$-行列



$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

マッチングと $\{0,1\}$-行列



$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

最大マッチング問題

枝の本数 $|M|$ が最大の G のマッチングを最大マッチングと呼び, 最大マッチングを求める問題を最大マッチング問題と呼ぶ.

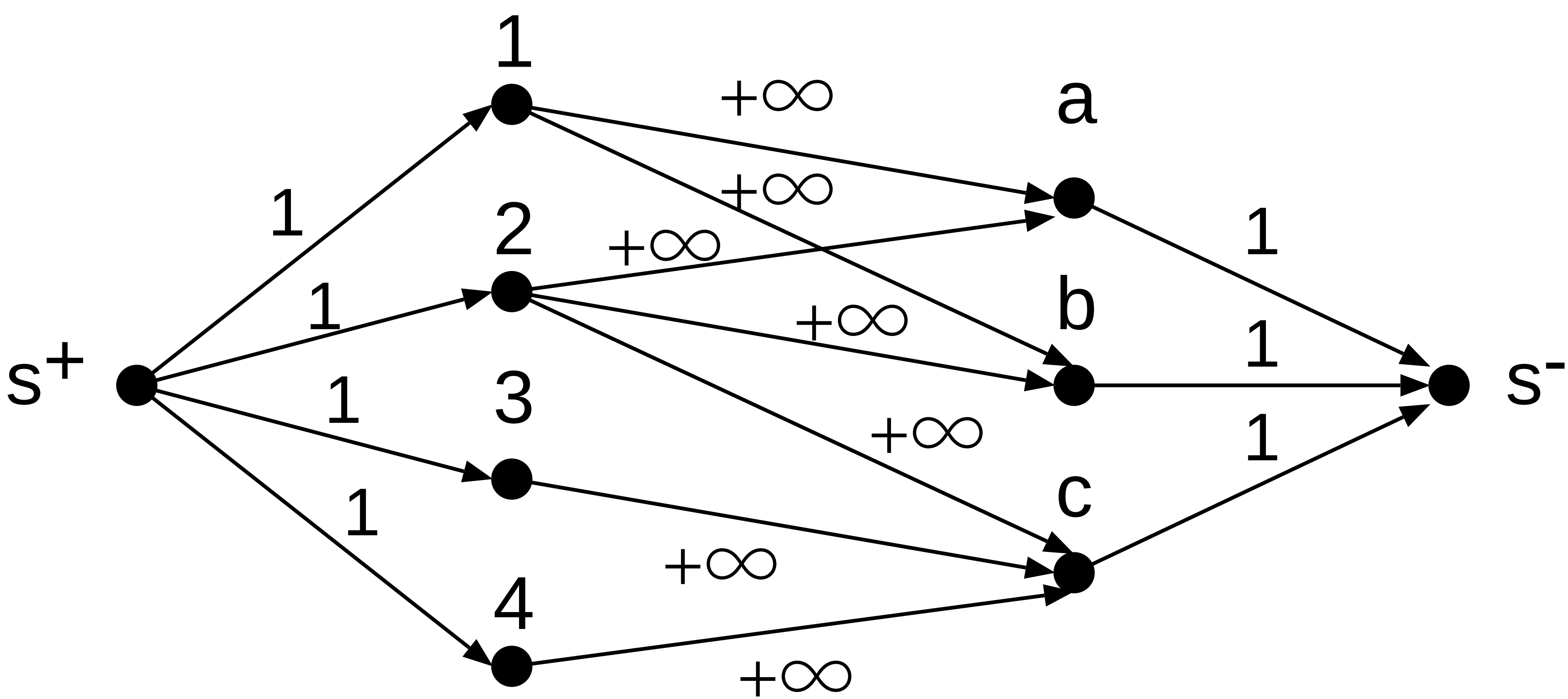
最大マッチング問題の解き方

最大マッチング問題の解き方

ネットワーク $\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ 上の最大フロー問題に変換する.

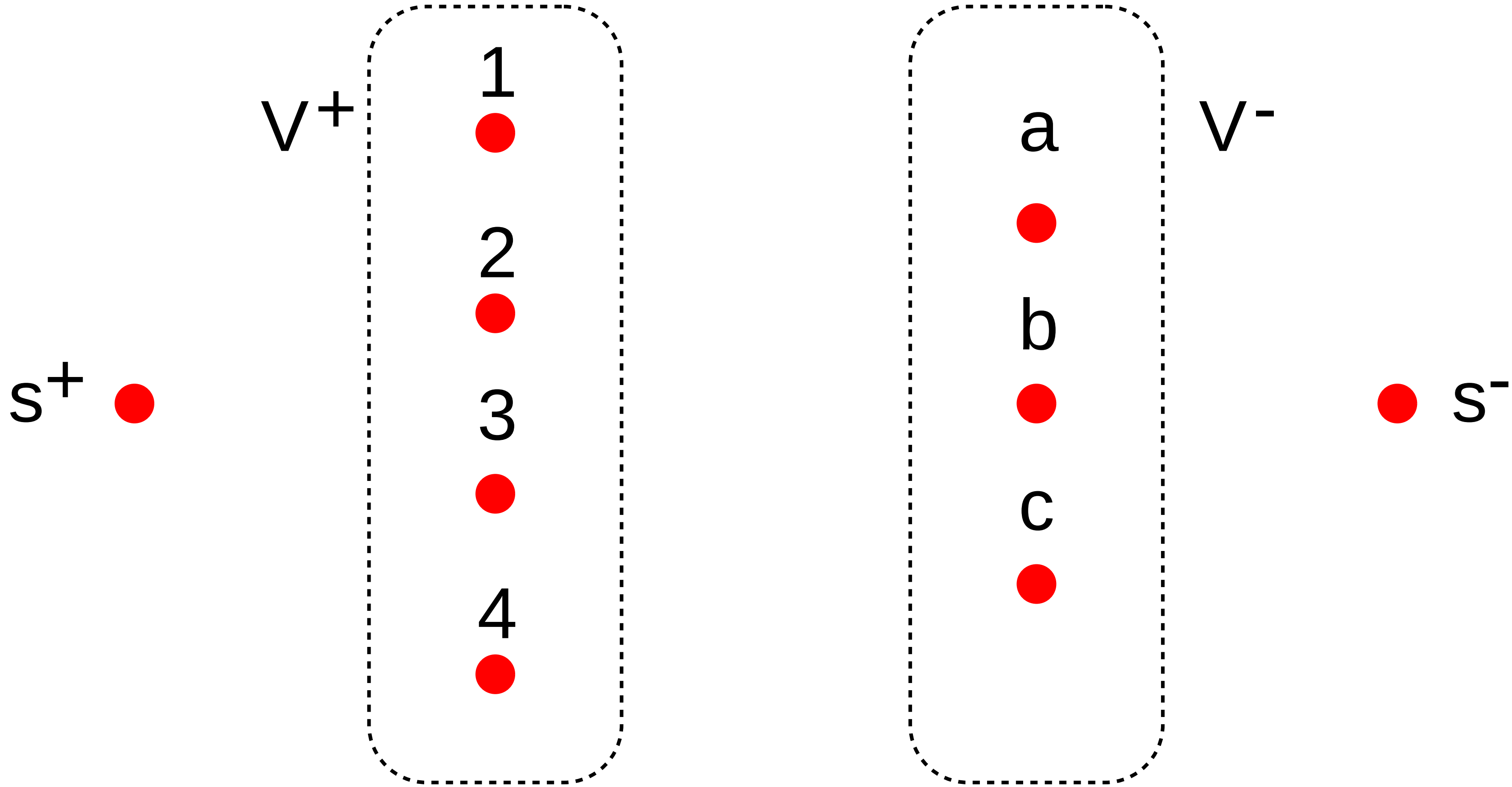
最大マッチング問題の解き方

ネットワーク $N_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ 上の最大フロー問題に変換する.

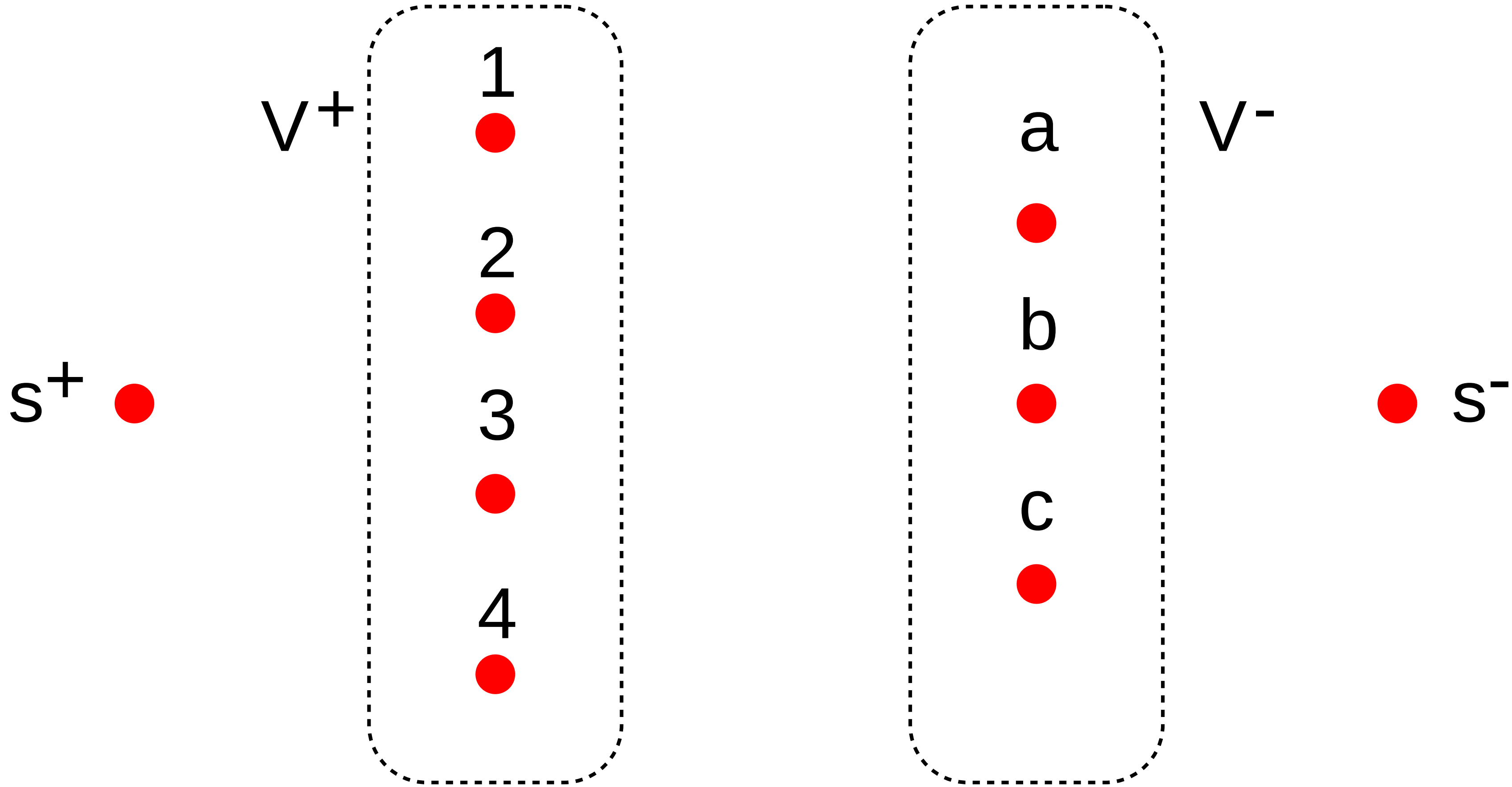


$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方

$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



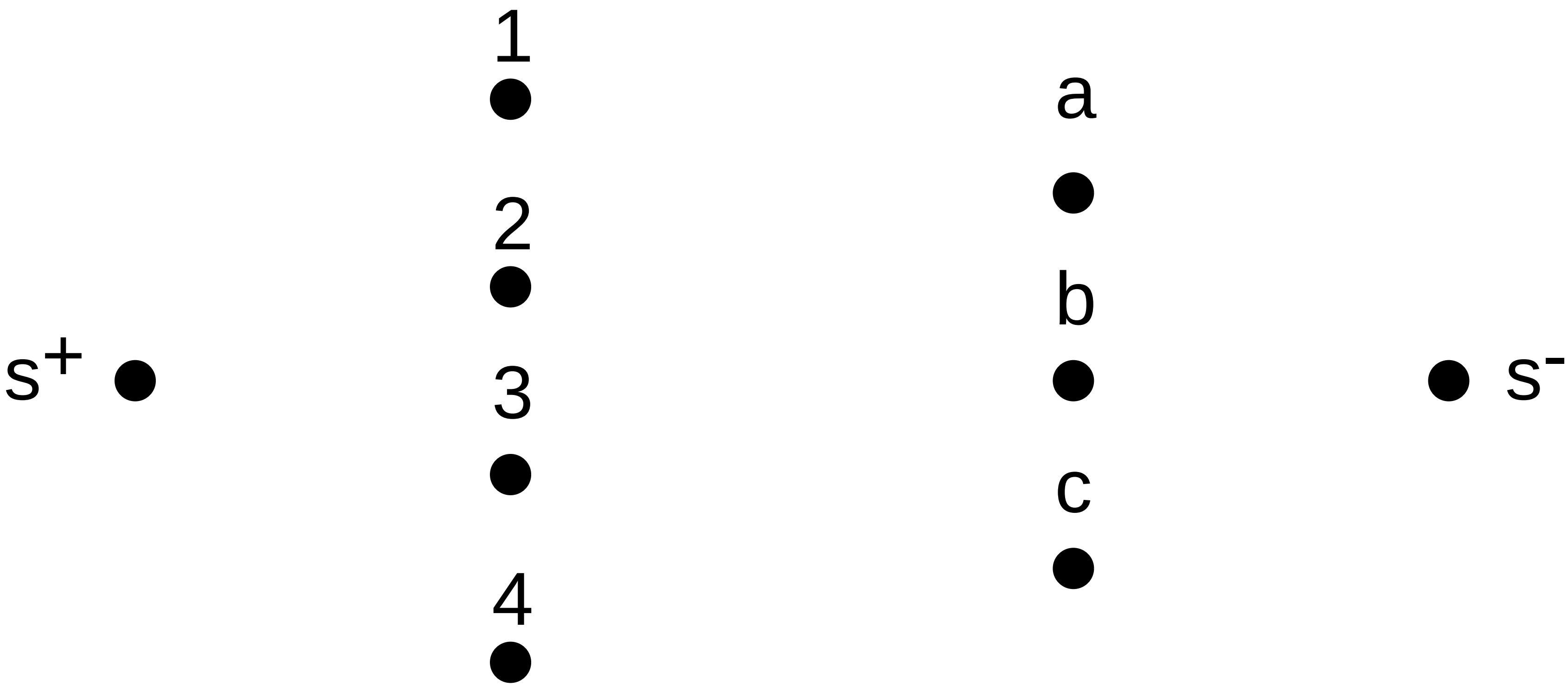
$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



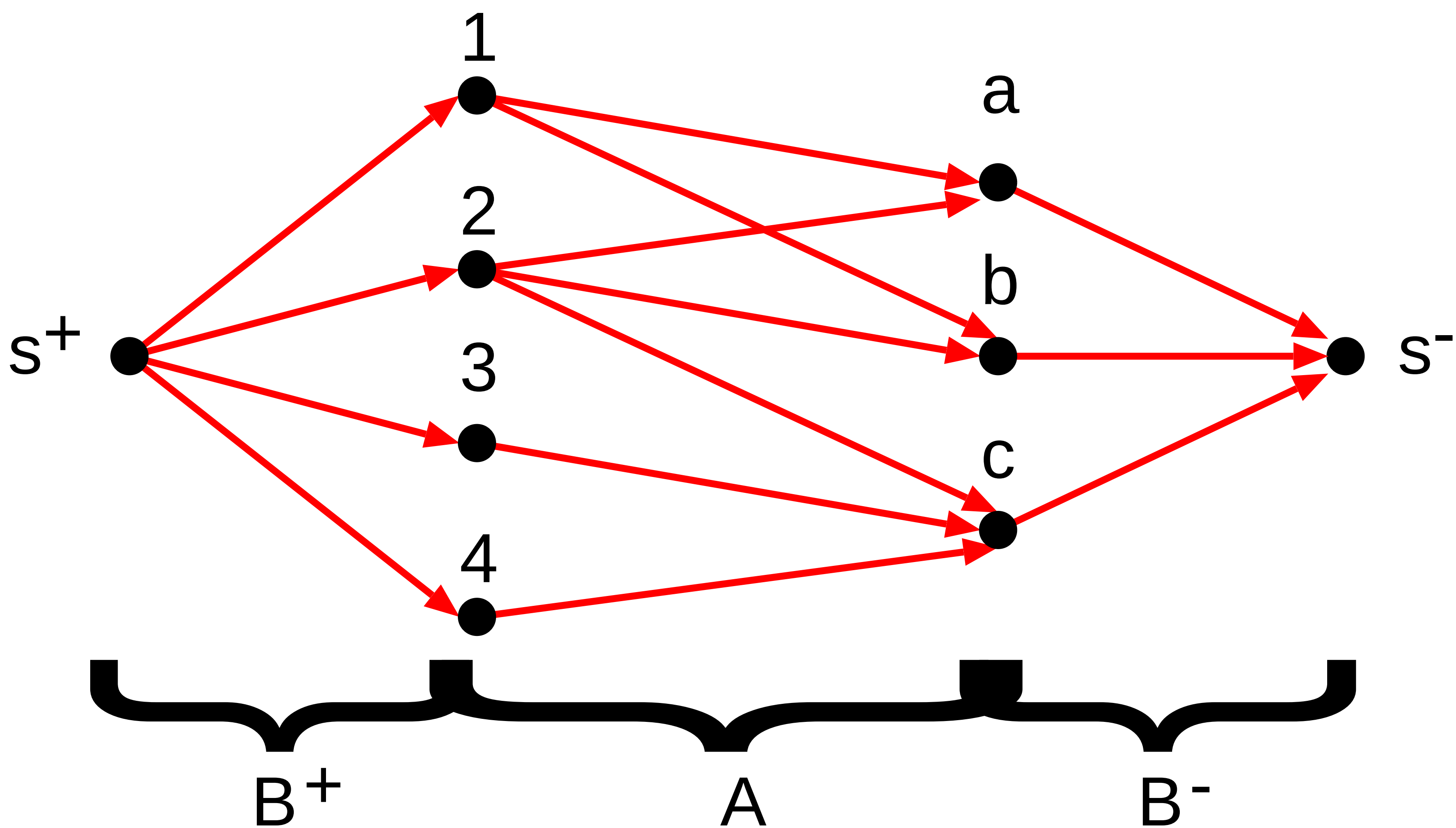
$$\hat{V} = V^+ \cup V^- \cup \{s^+, s^-\} \tag{2.139}$$

$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方

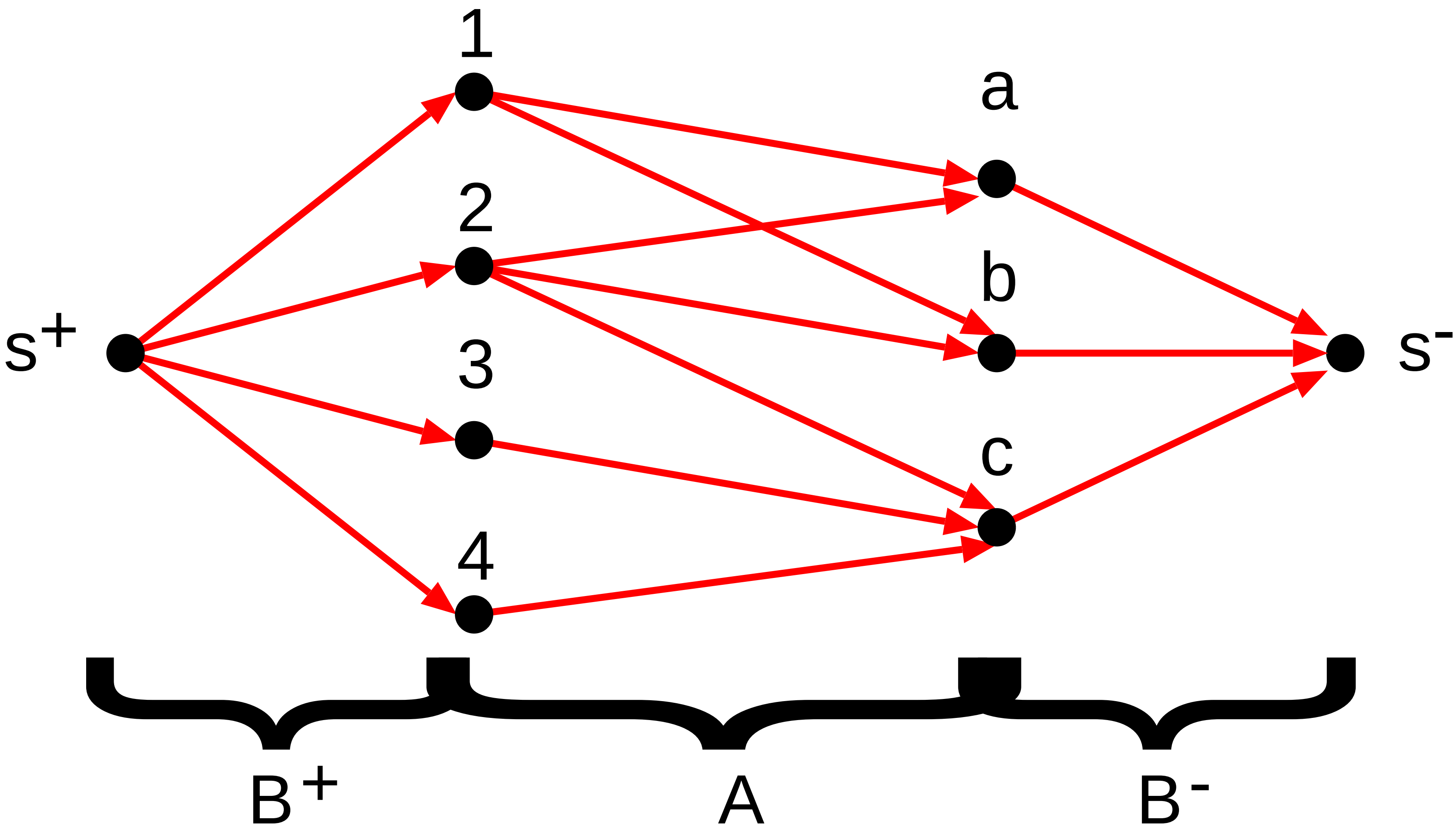
$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



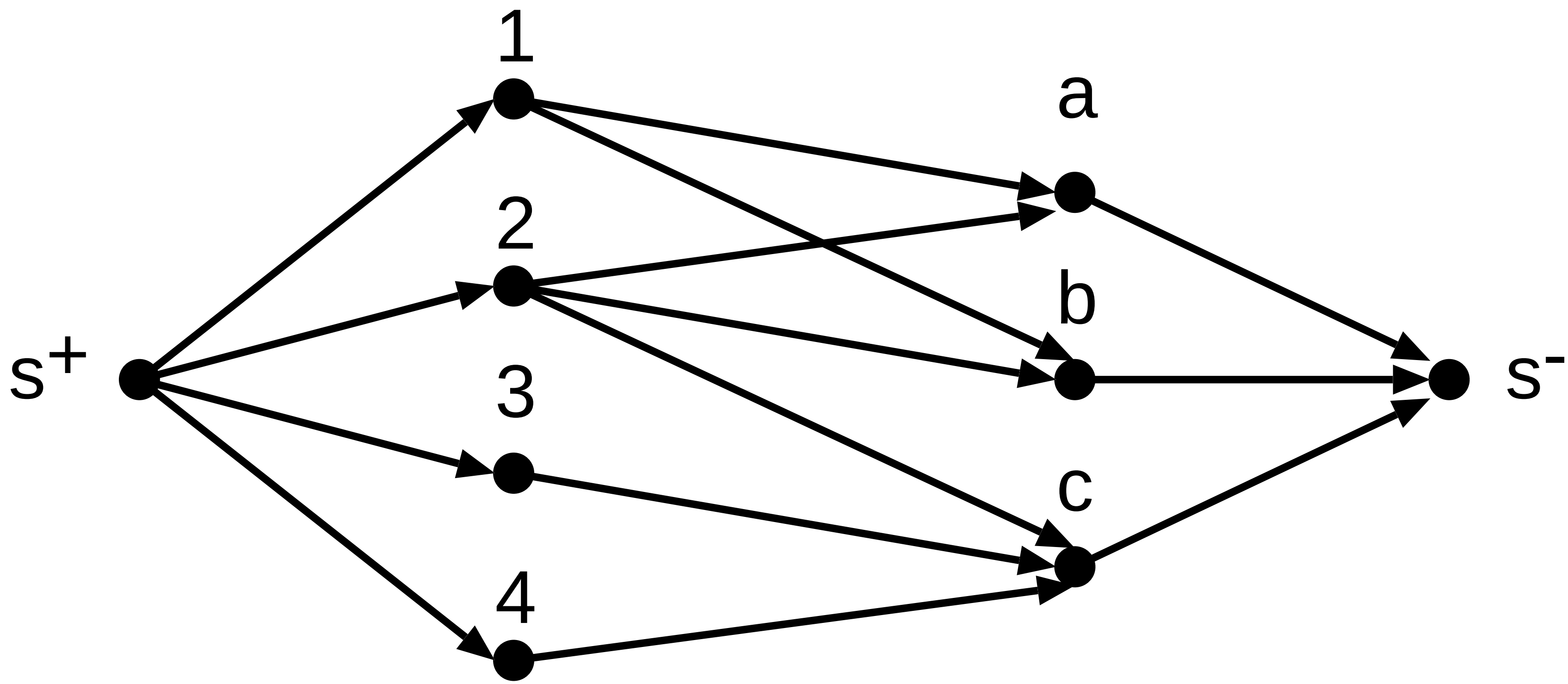
$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



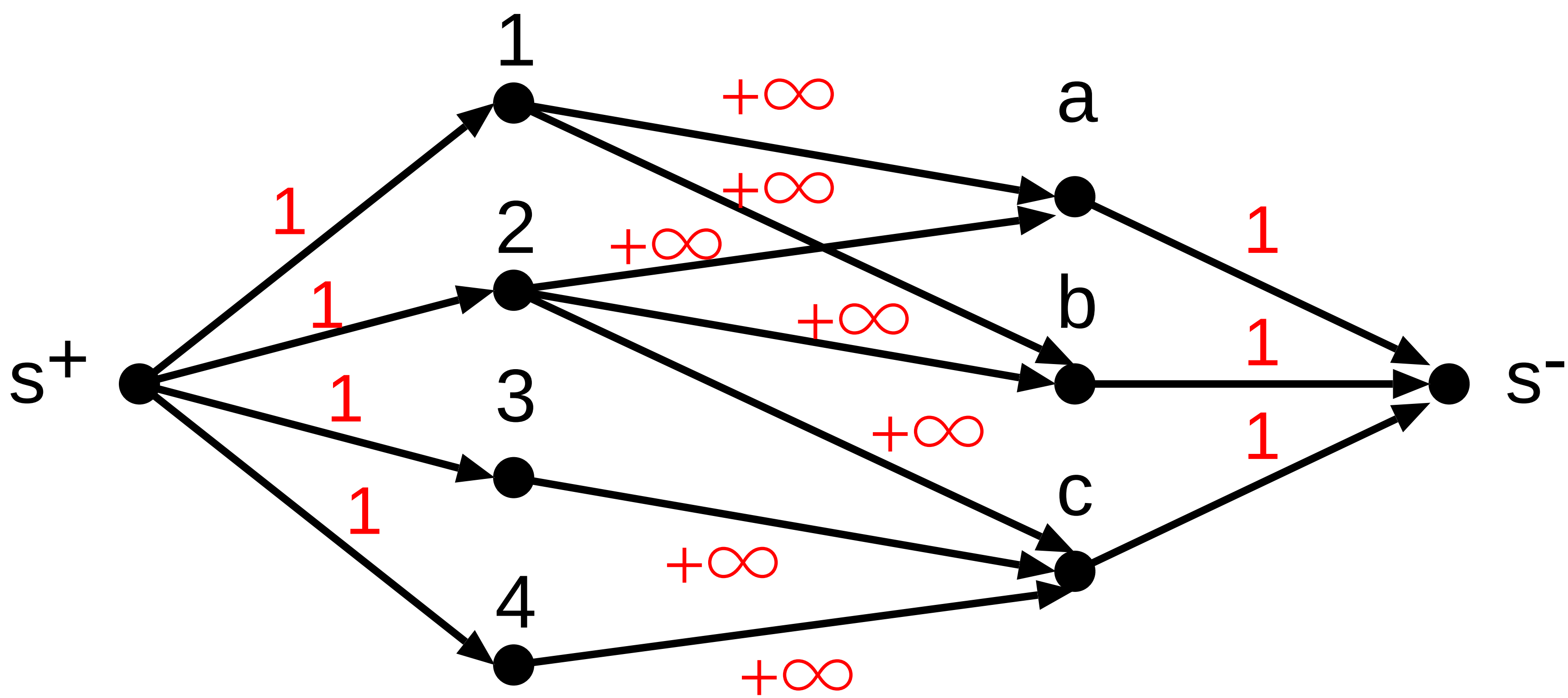
$$\hat{A} = A \cup B^+ \cup B^- \qquad (2.140)$$

$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方

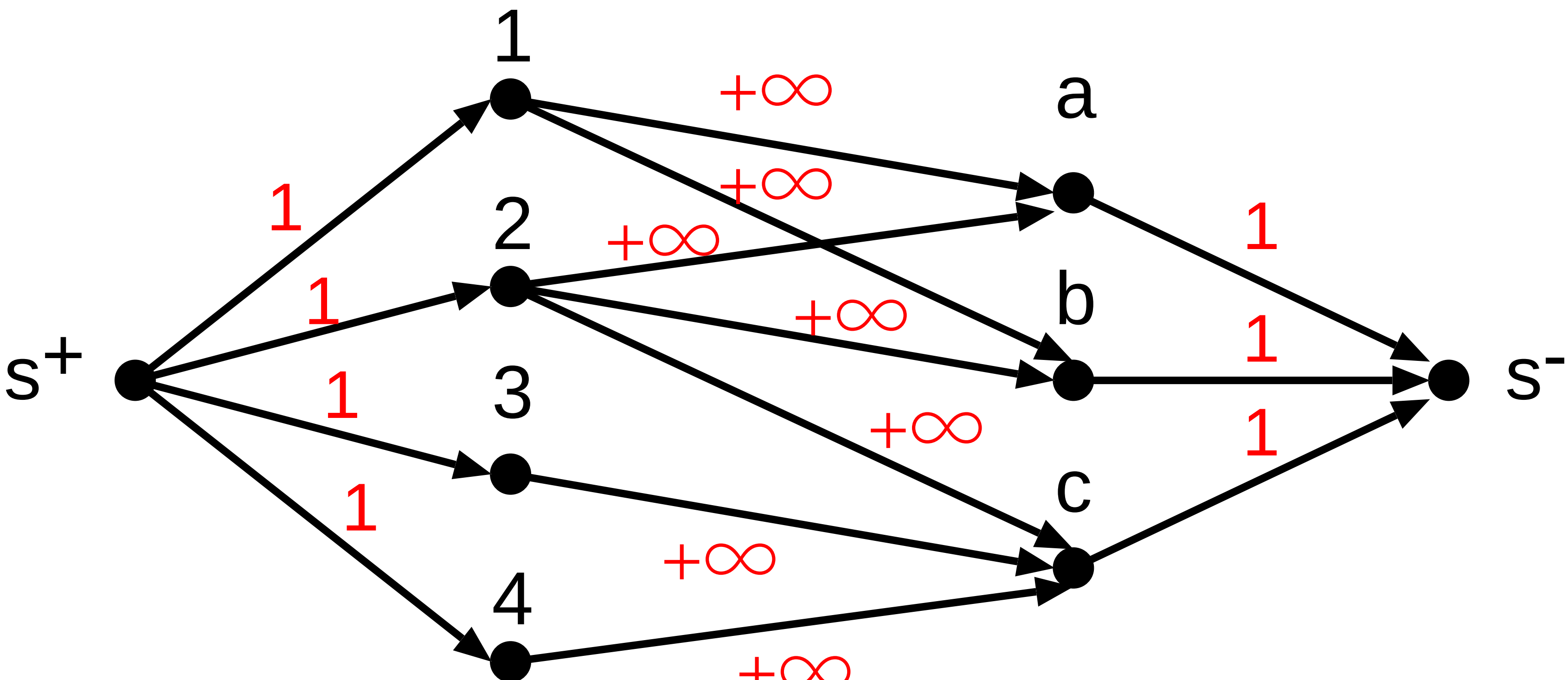
$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方

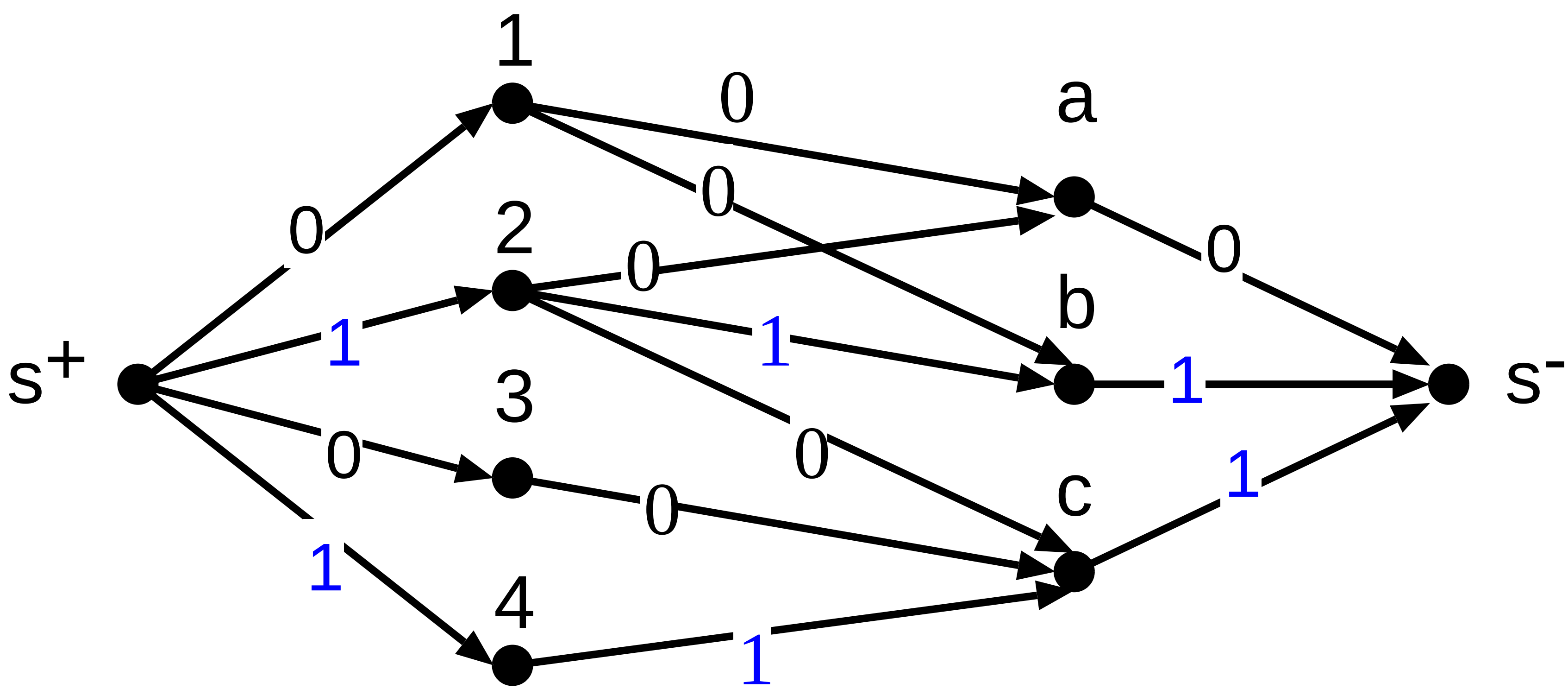


$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方

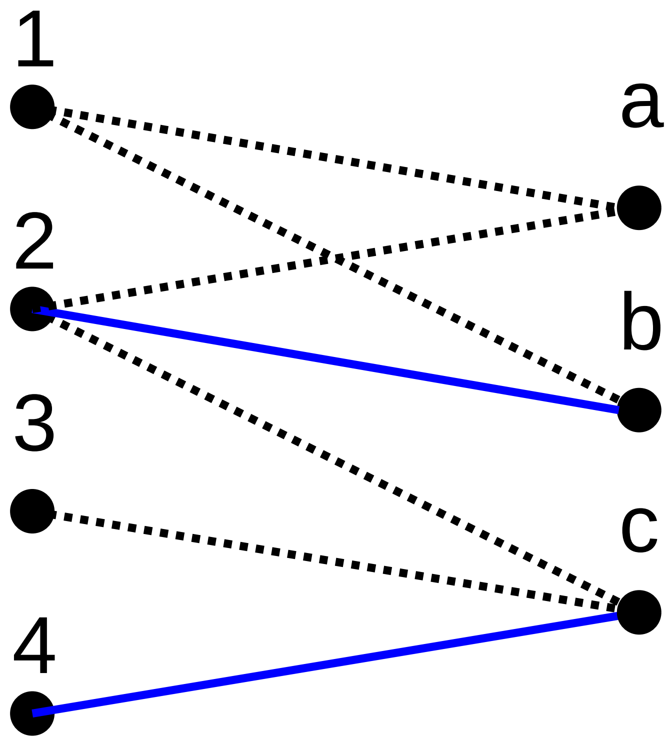


$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in B^+ \cup B^-, \\ +\infty & \text{if } a \in A \end{cases} \qquad (2.143)$$

N_G 中の整数値フロー $\varphi \Rightarrow G$ のマッチング M



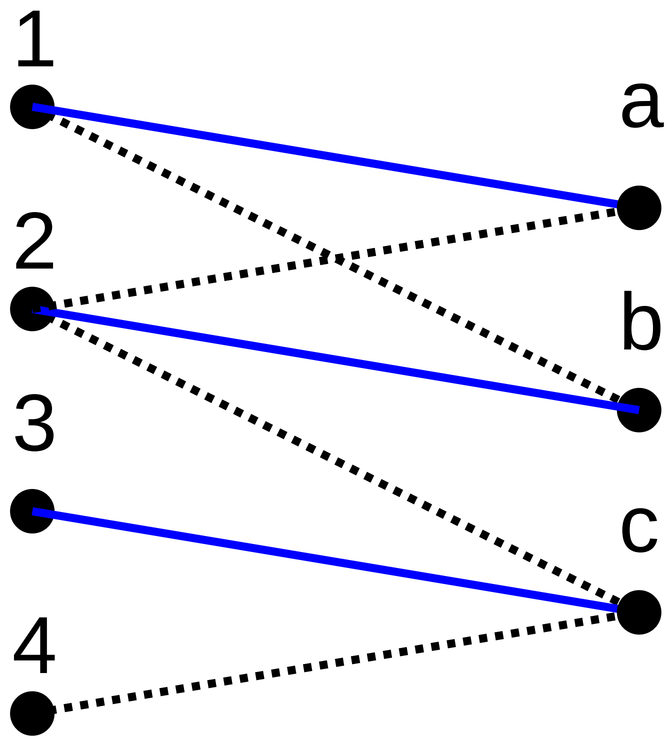
整数値フロー φ $\left(v^*(\varphi) = 2\right)$



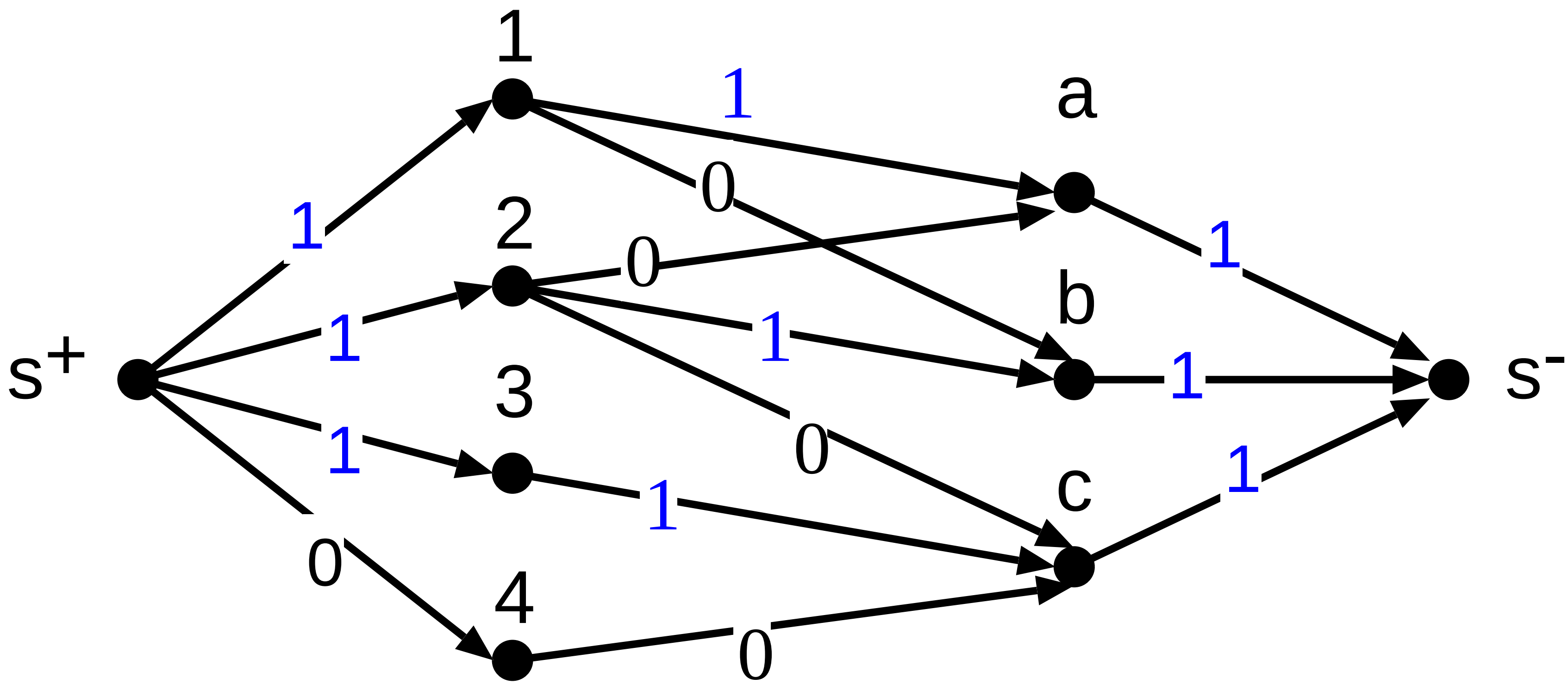
$$M = \{a \mid a \in A, \varphi(a) = 1\} \tag{2.144}$$

は, G のマッチング ($|M| = 2$).

G のマッチング $M \Rightarrow \mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー



G のマッチング M ($|M| = 3$)



$$\varphi(a) = 1 \ (a \in M), \quad \varphi(a) = 0 \ (a \in A \setminus M) \quad (2.145)$$

で定義される φ は, N_G の整数値フロー ($v^*(\varphi) = 3$).

G のマッチング $\Leftrightarrow N_G$ 中の整数値フロー

- G のマッチングと N_G 中の整数値フローとは 1 対 1 に対応する.

G のマッチング $\Leftrightarrow \mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー

- G のマッチングと $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フローとは 1 対 1 に対応する.
- G のマッチング M と $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー φ が対応しているとき,

$$|M| = v^*(\varphi)$$

が成り立つ.

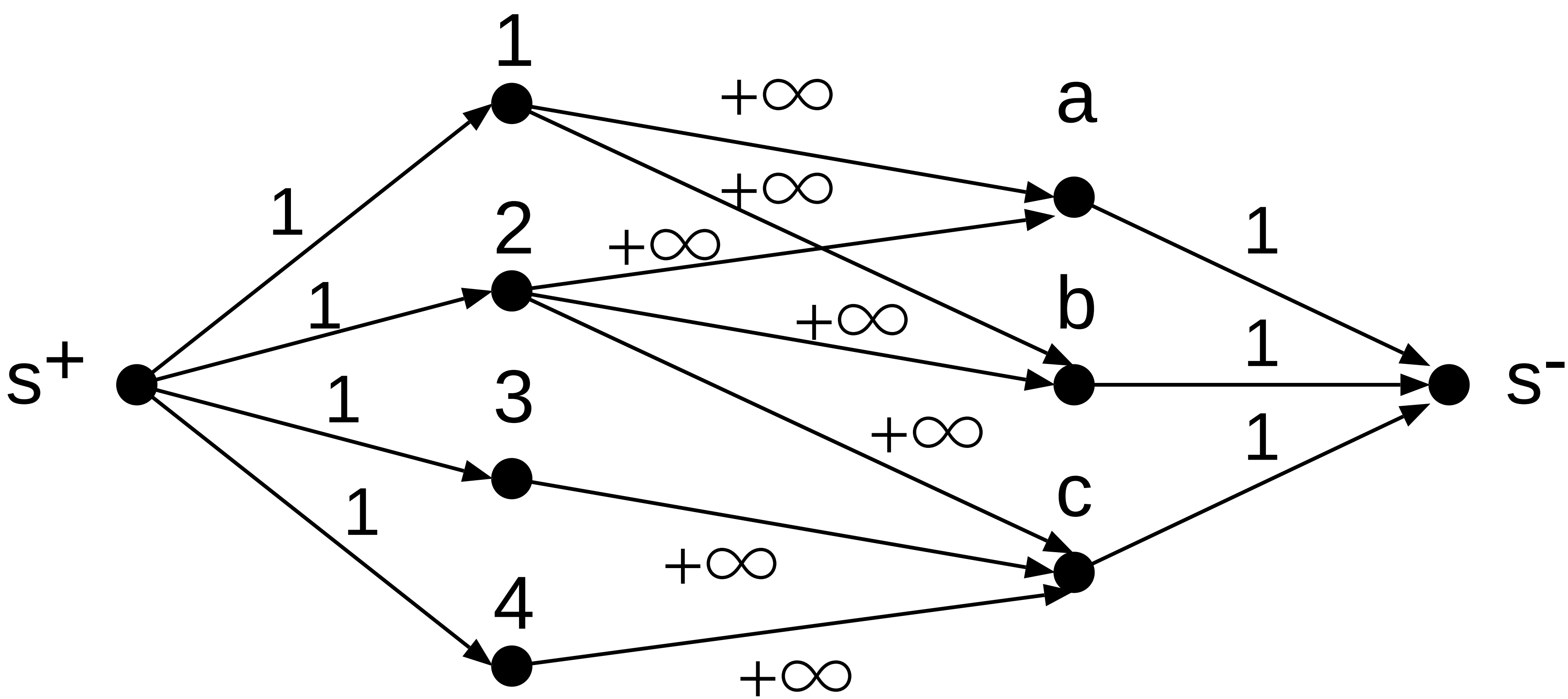
G のマッチング $\Leftrightarrow$ $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー

- G のマッチングと $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フローとは 1 対 1 に対応する.
- G のマッチング M と $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー φ が対応しているとき,

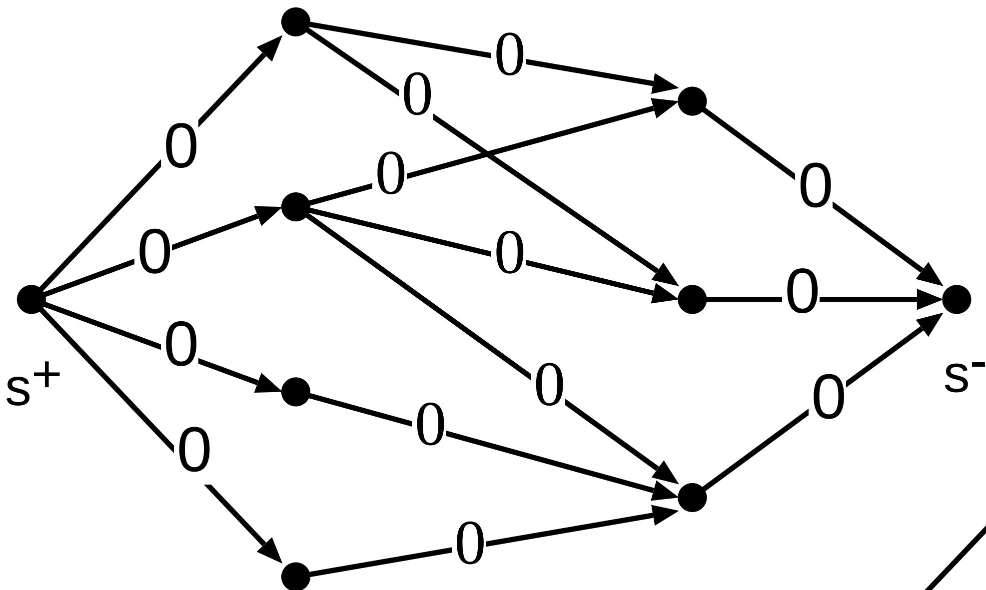
$$|M| = v^*(\varphi)$$

  が成り立つ.
- したがって, 枝の本数 $|M|$ が最大のマッチングを求めるためには, $\mathcal{N}_G$ 中の最大整数値フローを見付ければよい.

$\mathcal{N}_G$ 中の整数値最大フローを求める

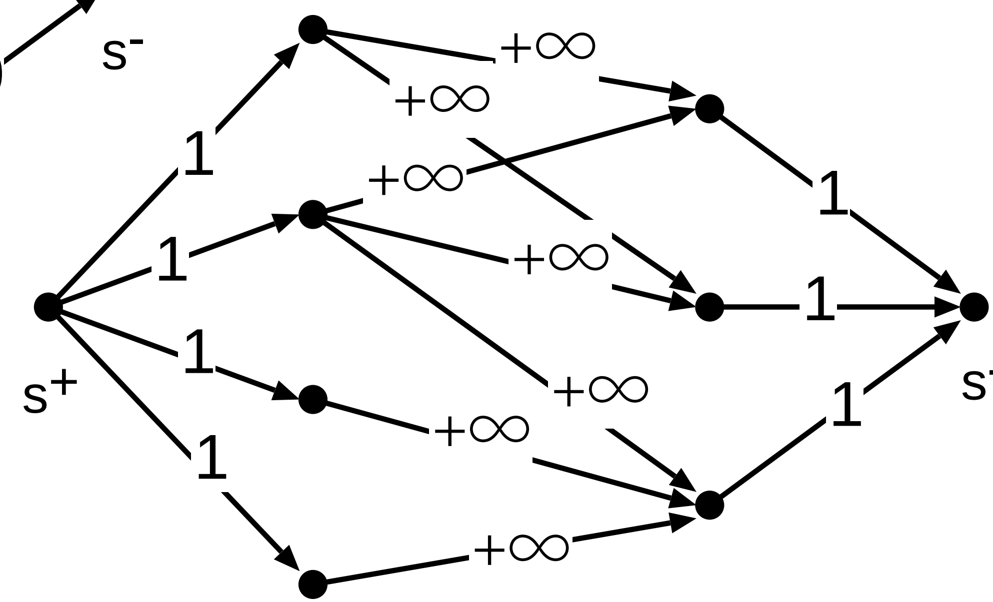


最大フローを求める(1)

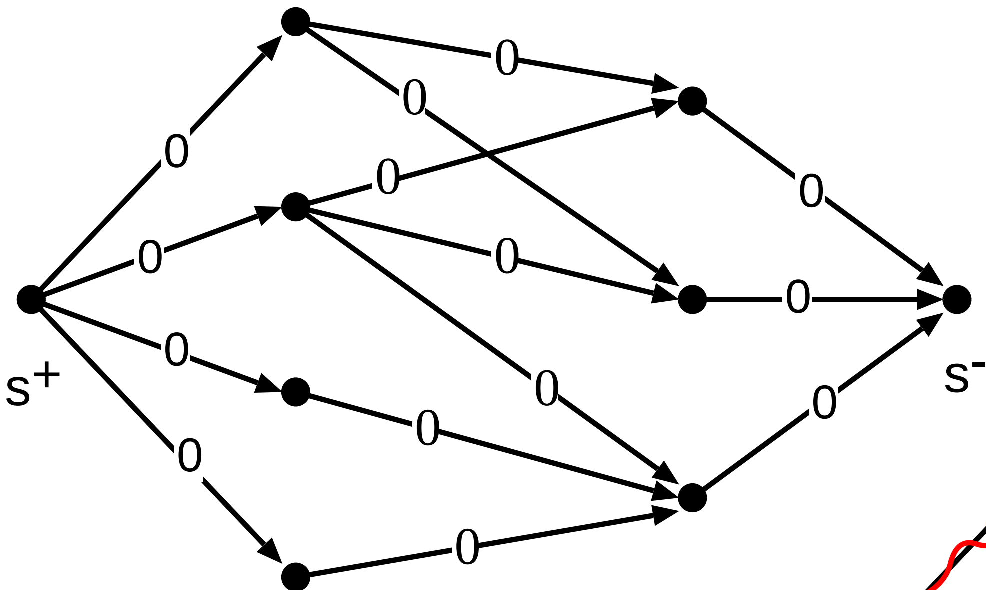


フロー

補助ネットワーク

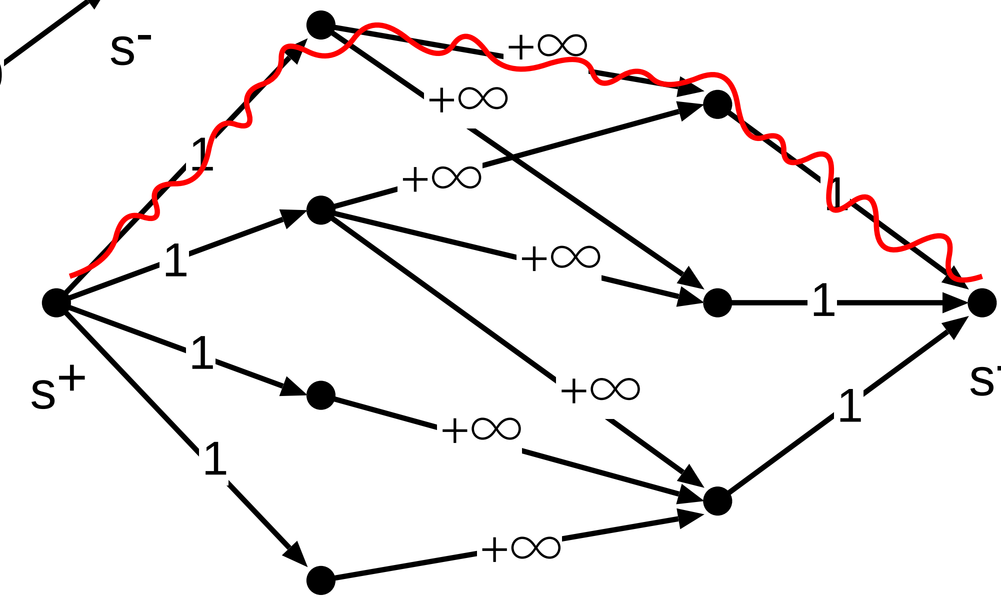


最大フローを求める(1)

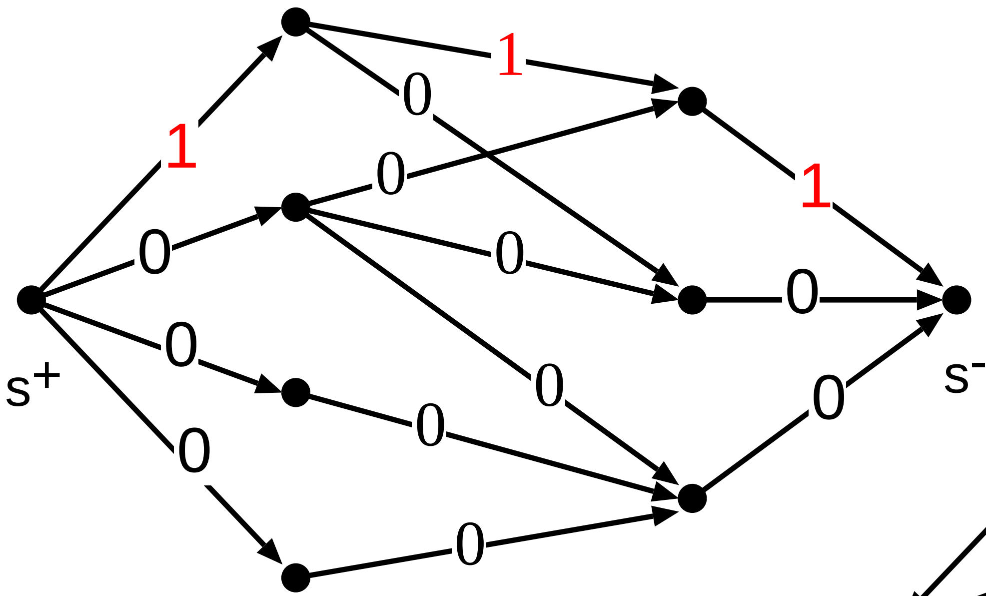


フロー

補助ネットワーク

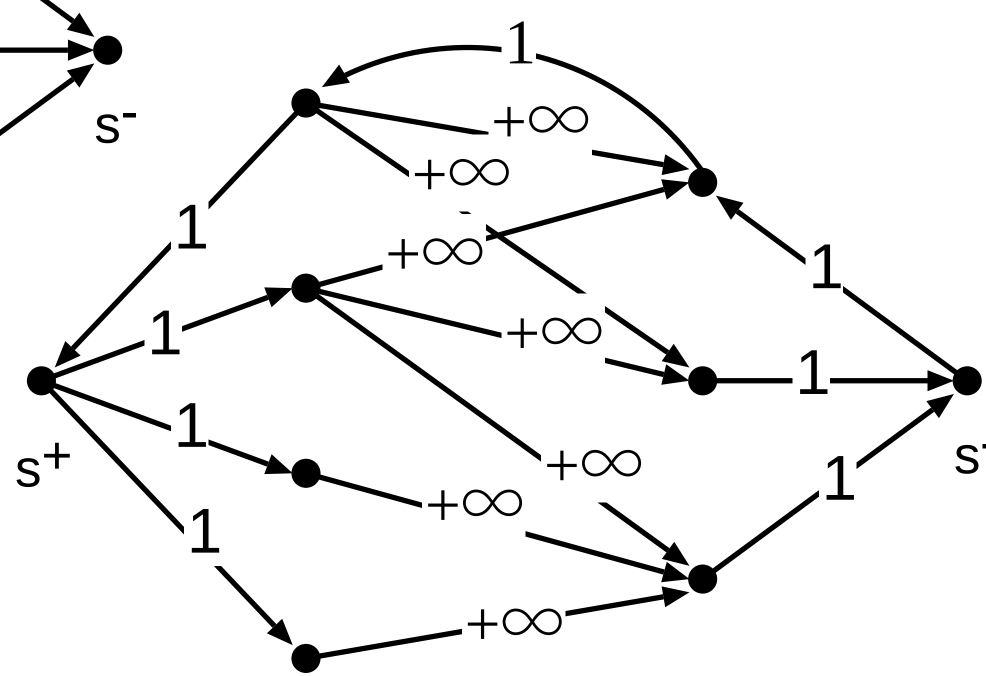


最大フローを求める(2)

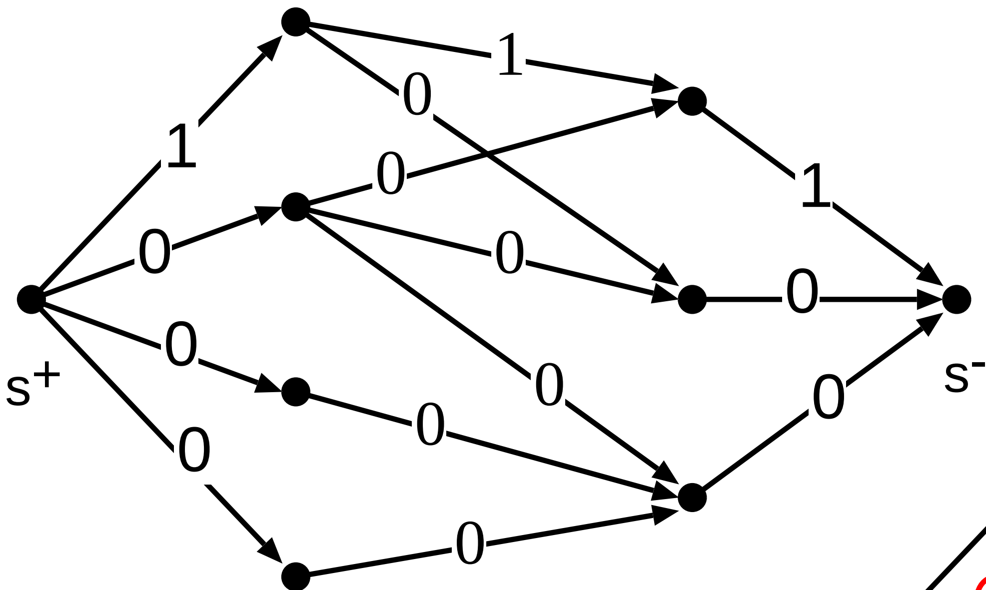


フロー

補助ネットワーク

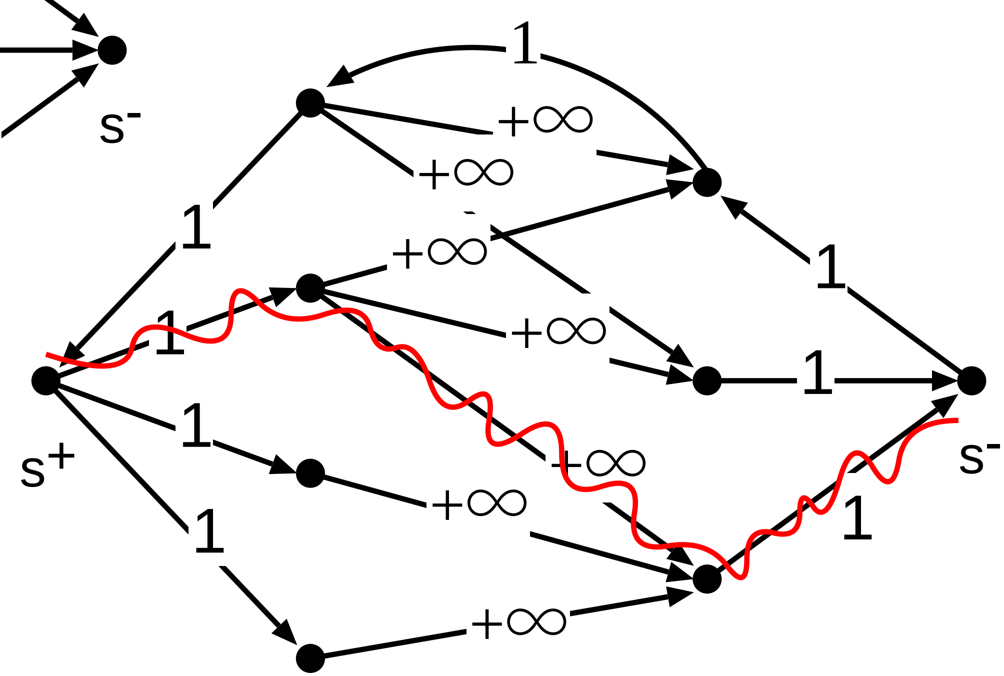


最大フローを求める(2)

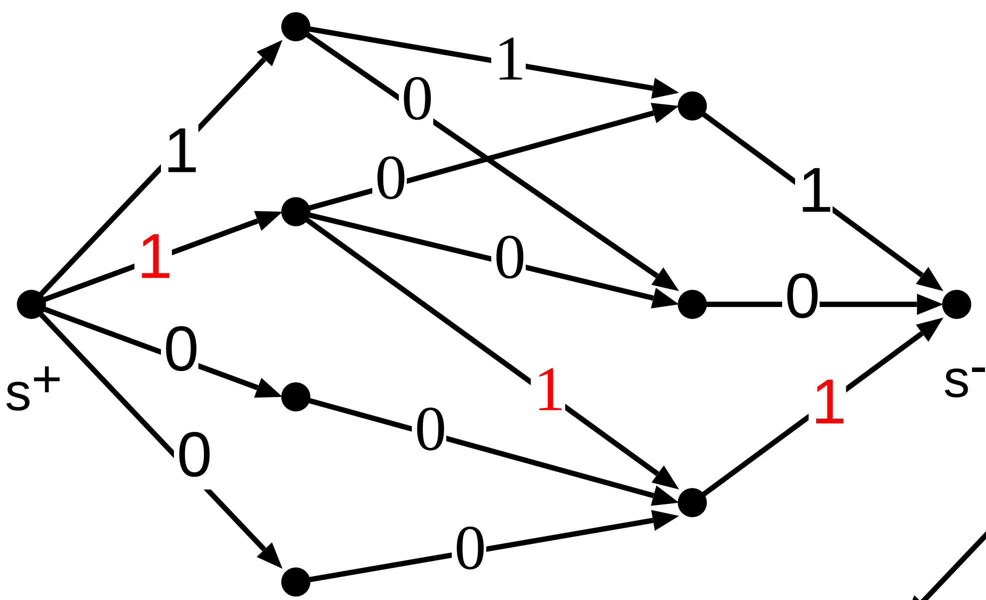


フロー

補助ネットワーク

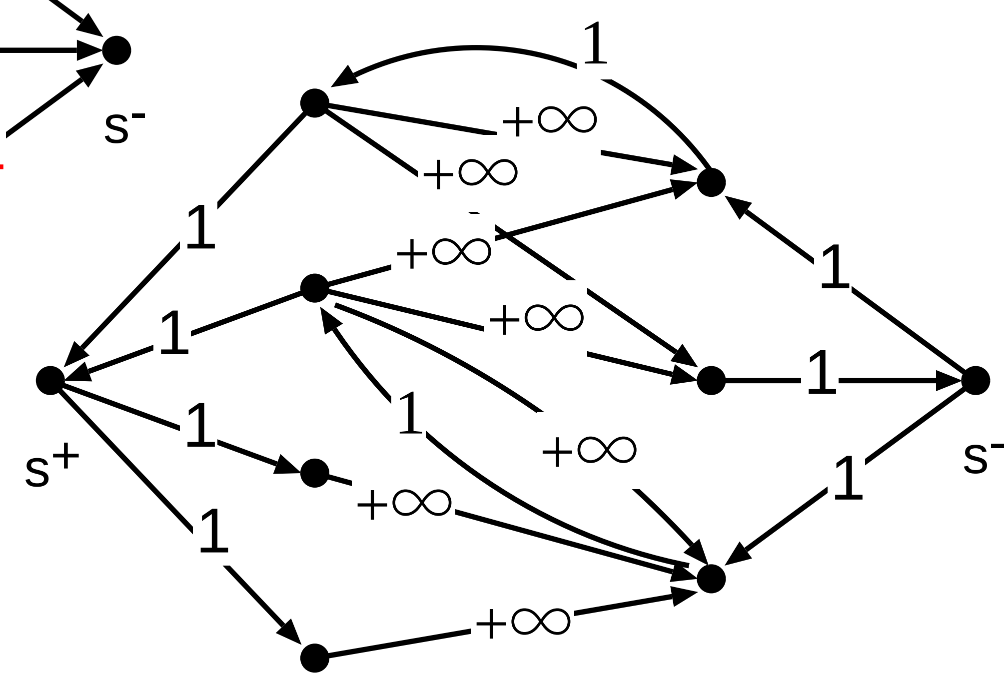


最大フローを求める (3)



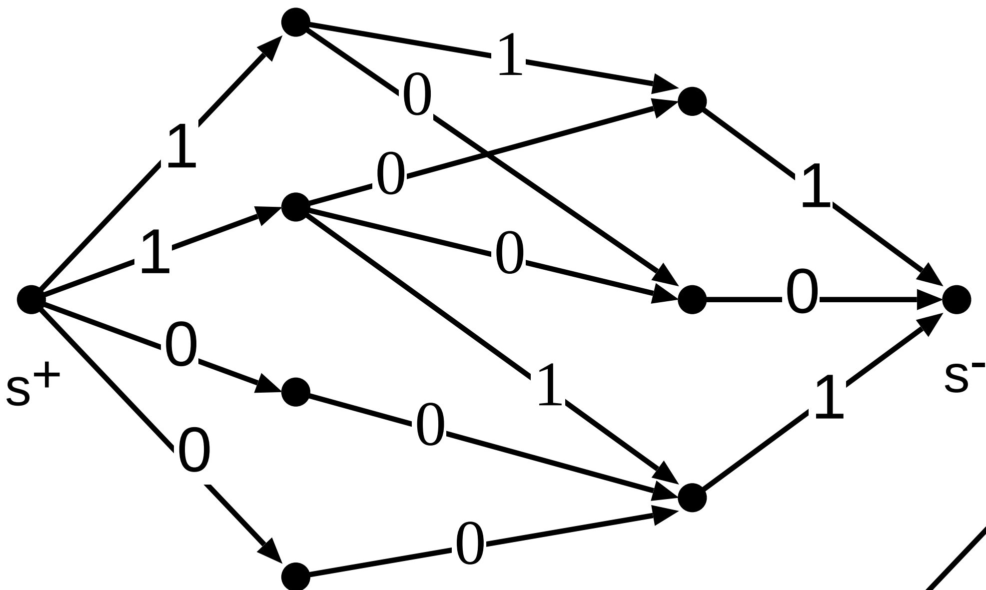
フロー

補助ネットワーク



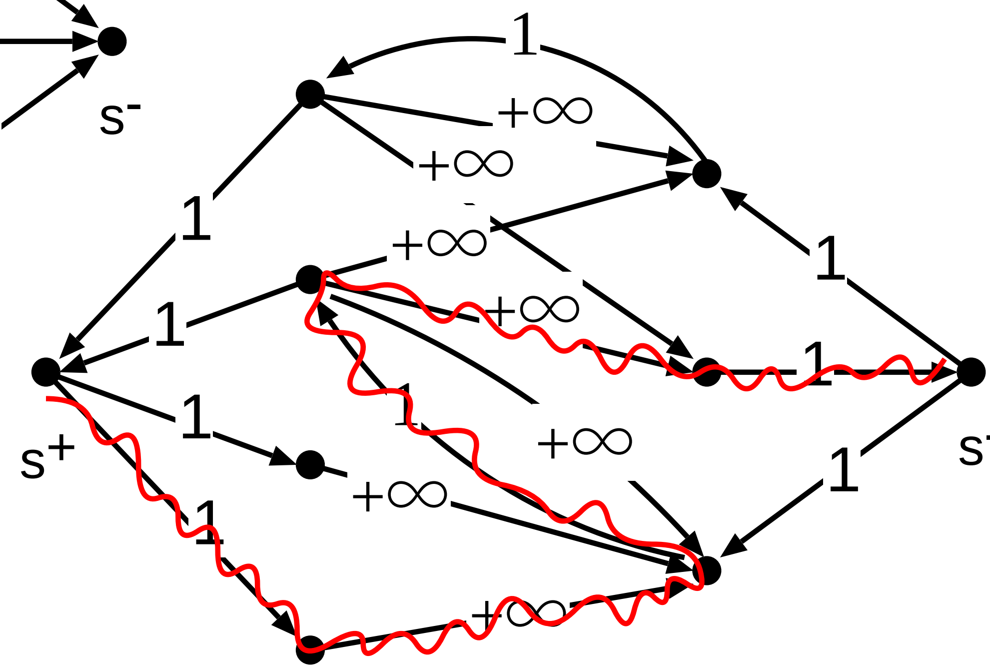
1

最大フローを求める(3)



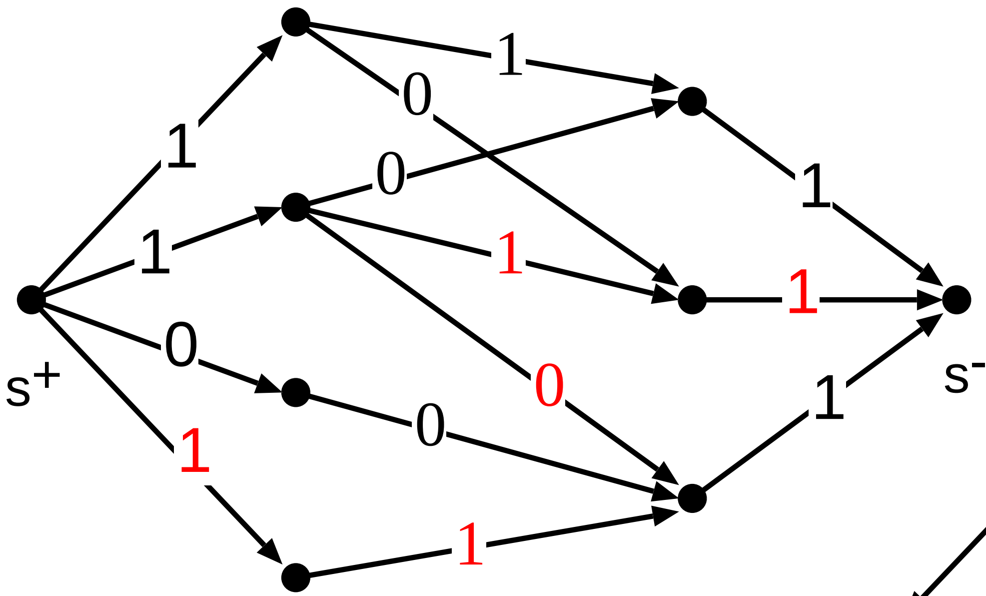
フロー

補助ネットワーク



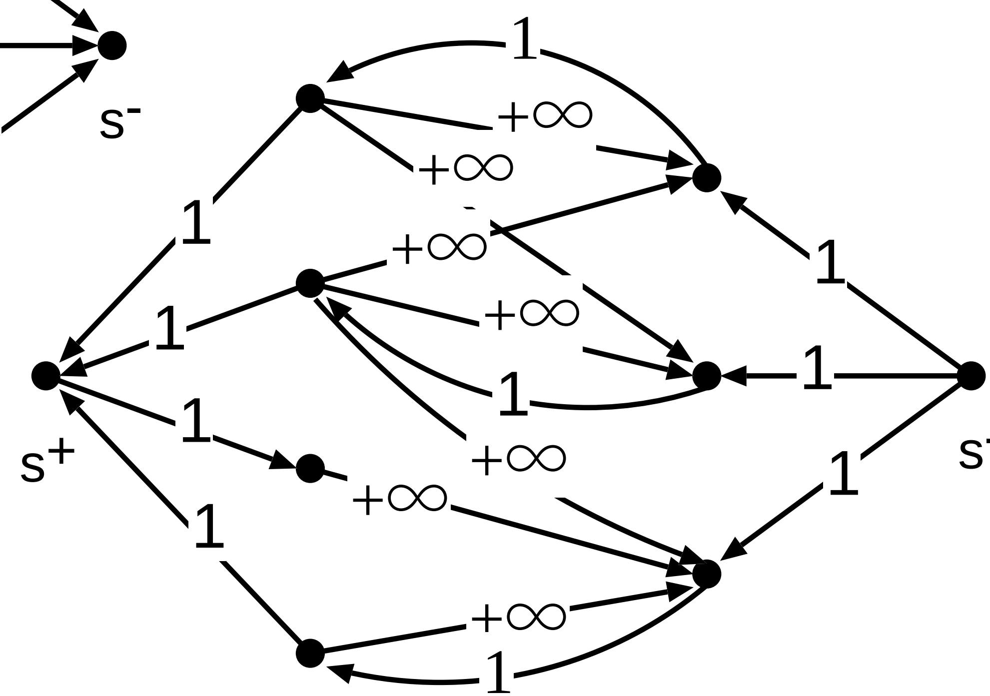
1

最大フローを求める(4)

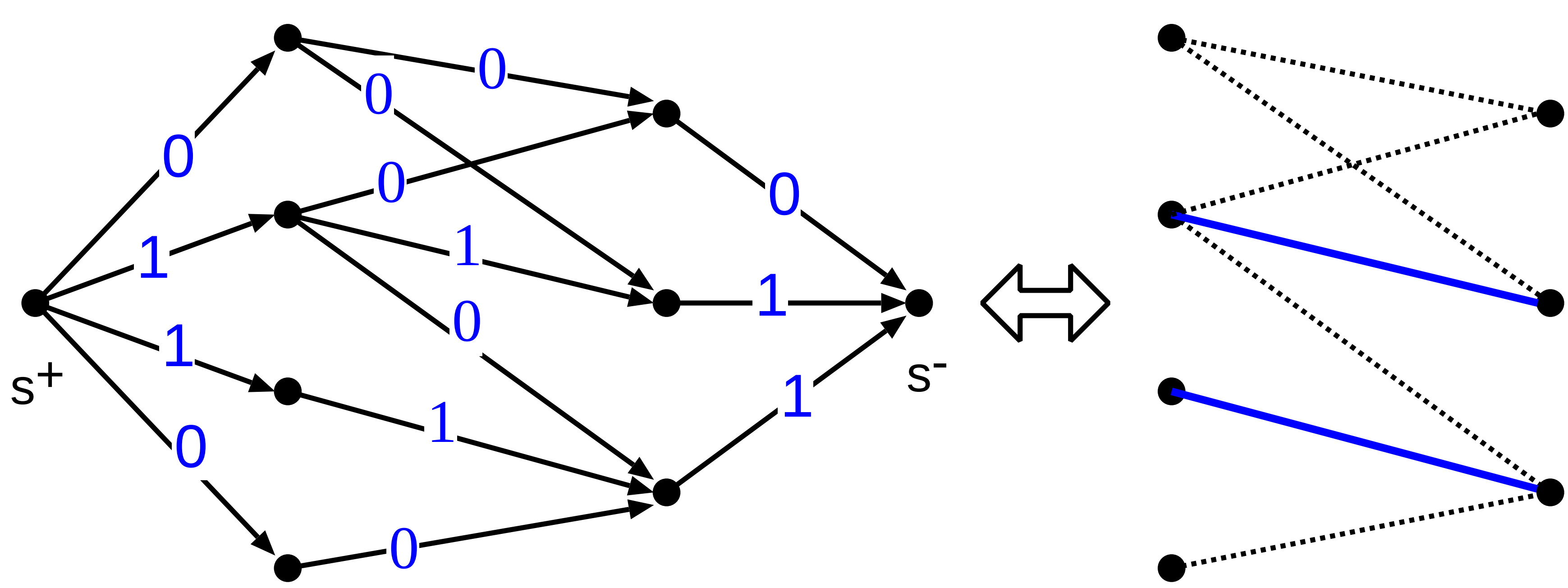


フロー

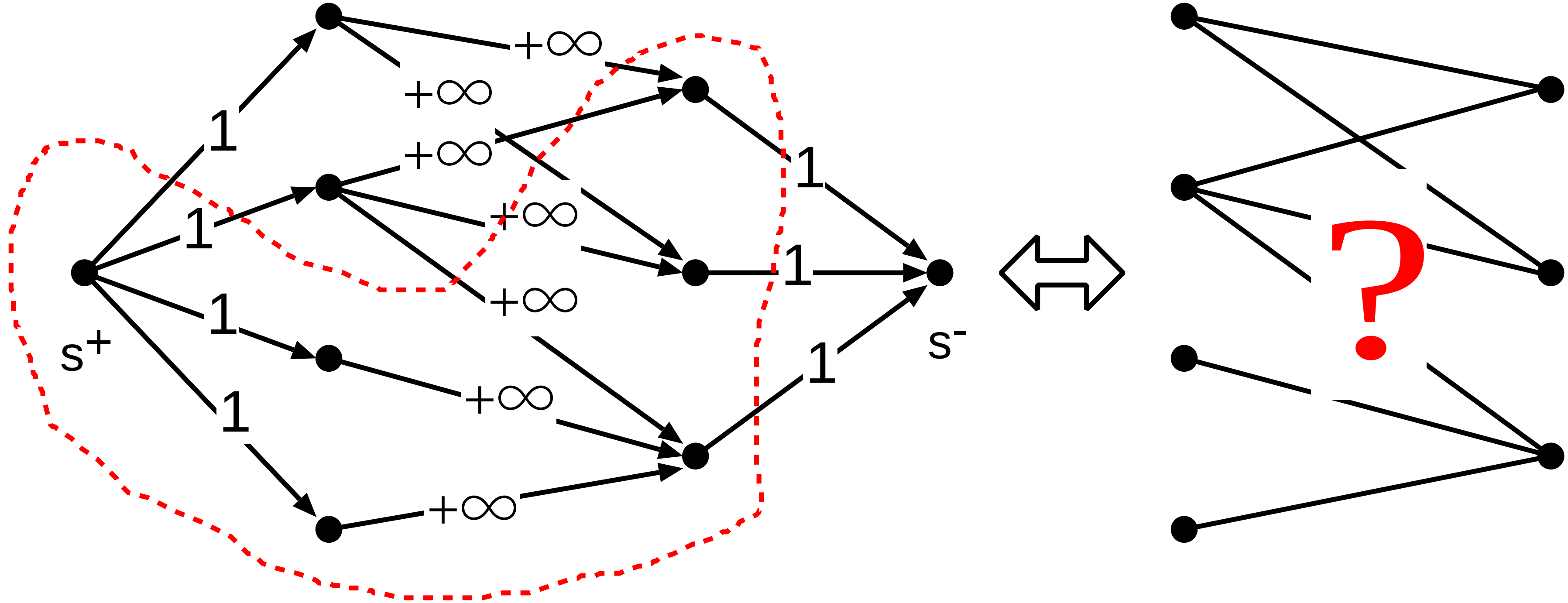
補助ネットワーク



最大-最小定理



$\mathcal{N}_G$ 中フローと G のマッチングが対応しているのは分かったけれど,



$\mathcal{N}_G$ のカットは G の何に対応するのか?

被覆

被覆

2 つの点集合 $U^+ \subseteq V^+$, $U^- \subseteq V^-$ の対 (U^+, U^-) は, 次の (**) を満たすとき, G の被覆と呼ばれる.

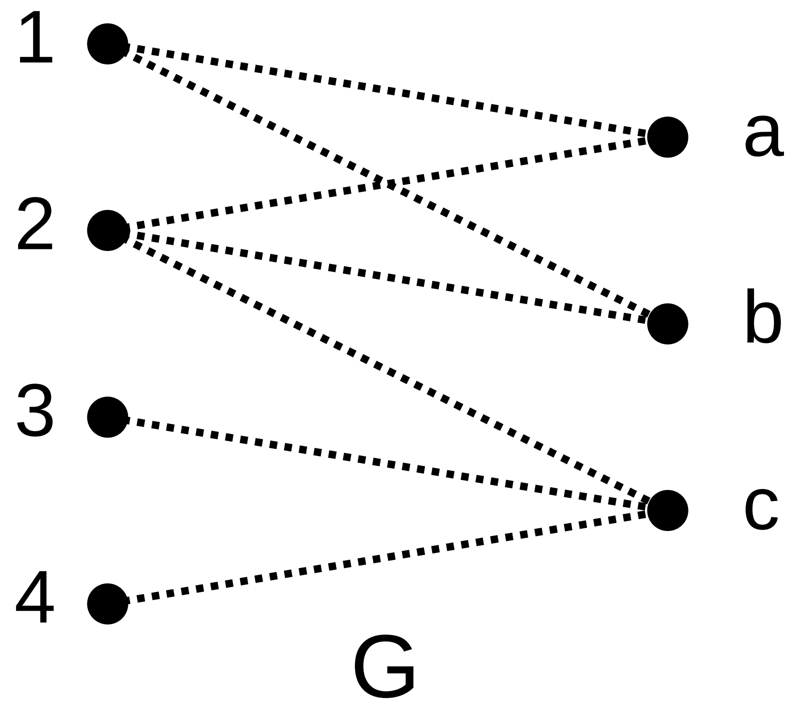
被覆

2 つの点集合 $U^+ \subseteq V^+$, $U^- \subseteq V^-$ の対 (U^+, U^-) は, 次の (**) を満たすとき, G の被覆と呼ばれる.
(**) 任意の枝 $a \in A$ に対して, $\partial^+ a \in U^+$ または $\partial^- a \in U^-$.

被覆

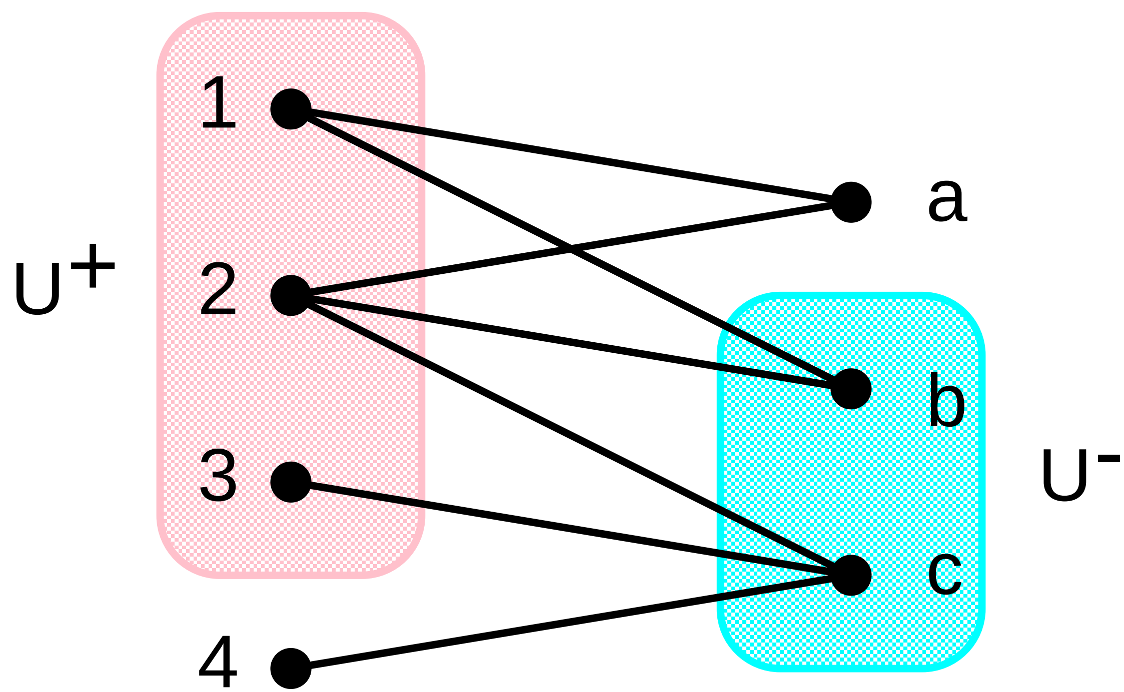
2つの点集合 $U^+ \subseteq V^+$, $U^- \subseteq V^-$ の対 (U^+, U^-) は, 次の (**) を満たすとき, G の被覆と呼ばれる.

(**) 任意の枝 $a \in A$ に対して, $\partial^+ a \in U^+$ または $\partial^- a \in U^-$.



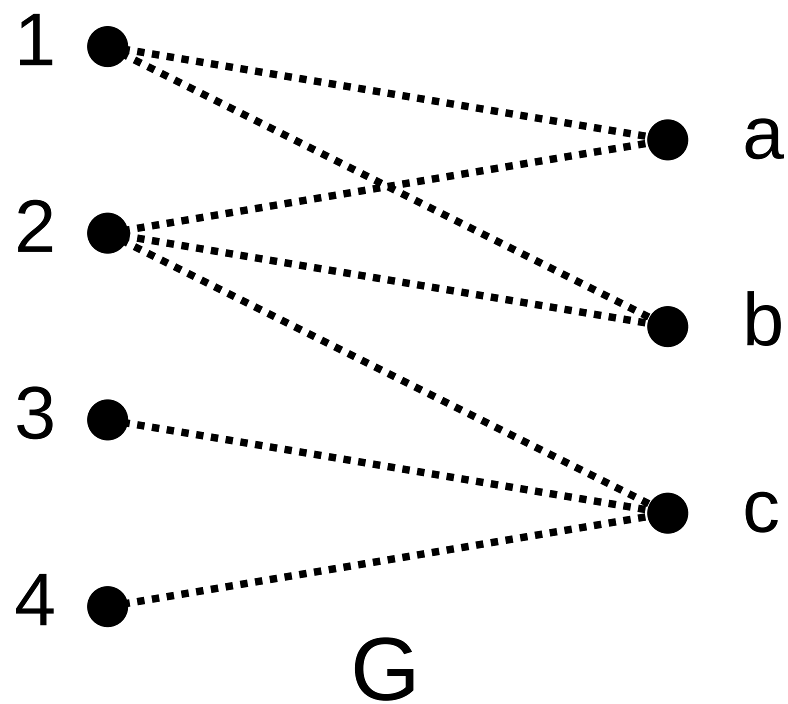
被覆

2つの点集合 $U^+ \subseteq V^+$, $U^- \subseteq V^-$ の対 (U^+, U^-) は, 次の (**) を満たすとき, G の被覆と呼ばれる.
(**) 任意の枝 $a \in A$ に対して, $\partial^+ a \in U^+$ または $\partial^- a \in U^-$.

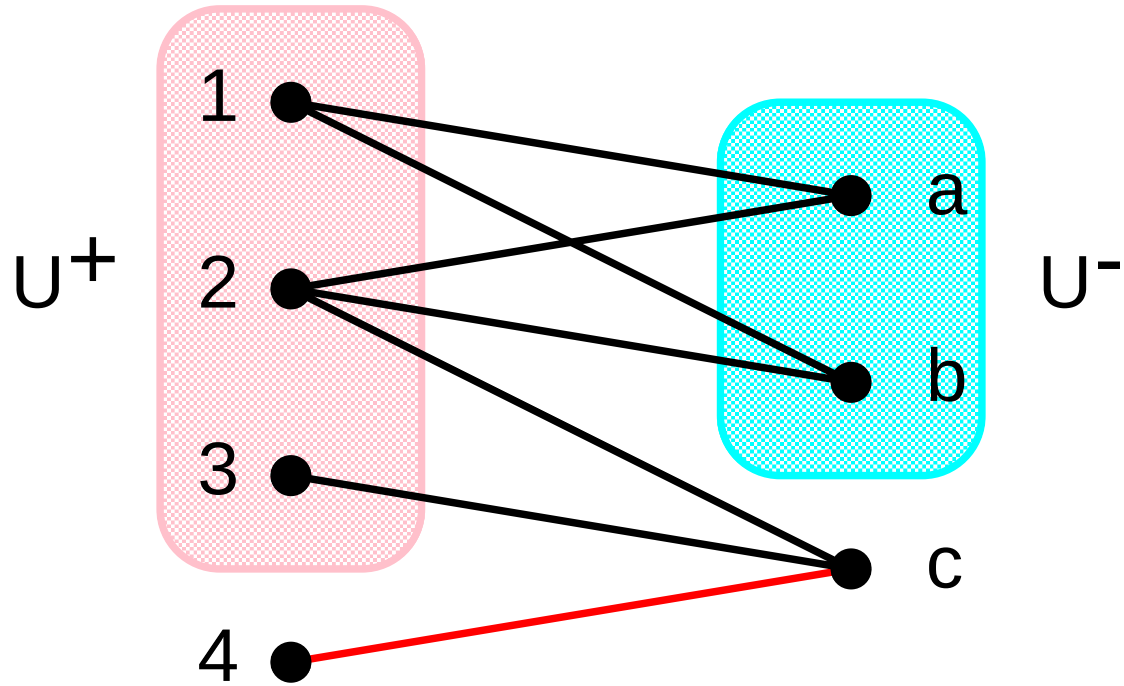


次の (U^+, U^-) は, G の被覆ではない

次の (U^+, U^-) は, G の被覆ではない

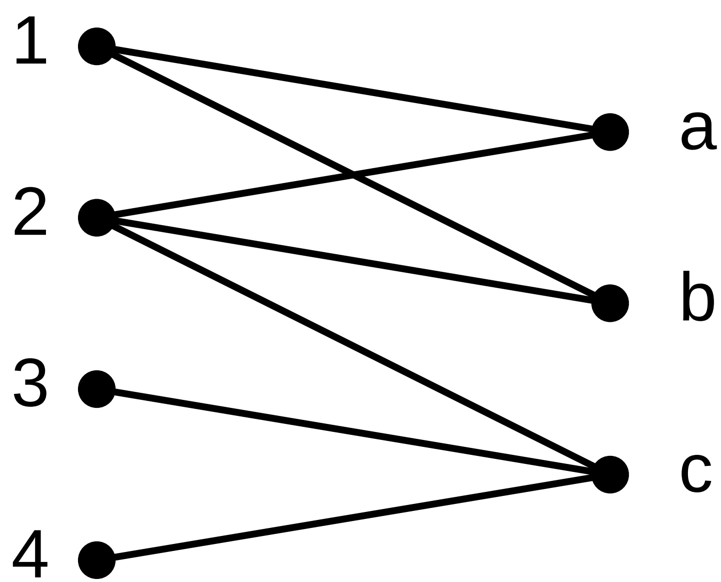


次の (U^+, U^-) は, G の被覆ではない



(枝 $(4, c)$ に注目.)

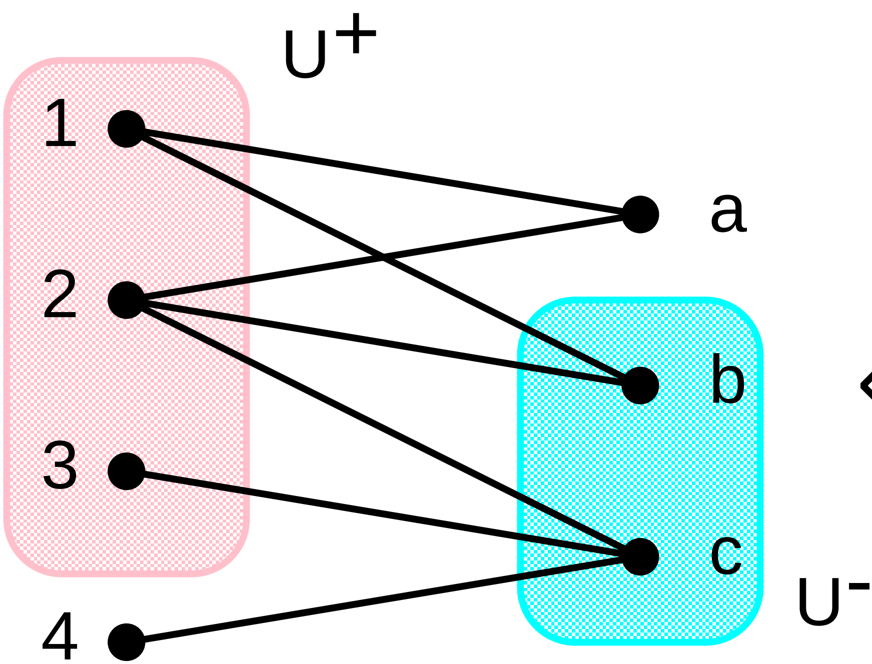
被覆と $\{0,1\}$-行列



$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

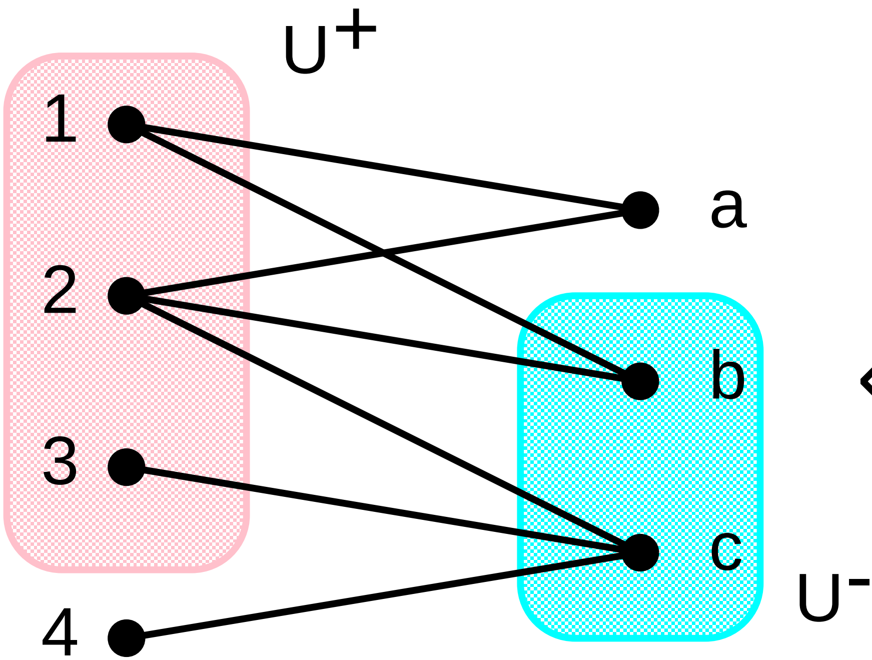
被覆と $\{0, 1\}$-行列



$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{array}{c}
\\
1\\
2\\
3\\
4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}\\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

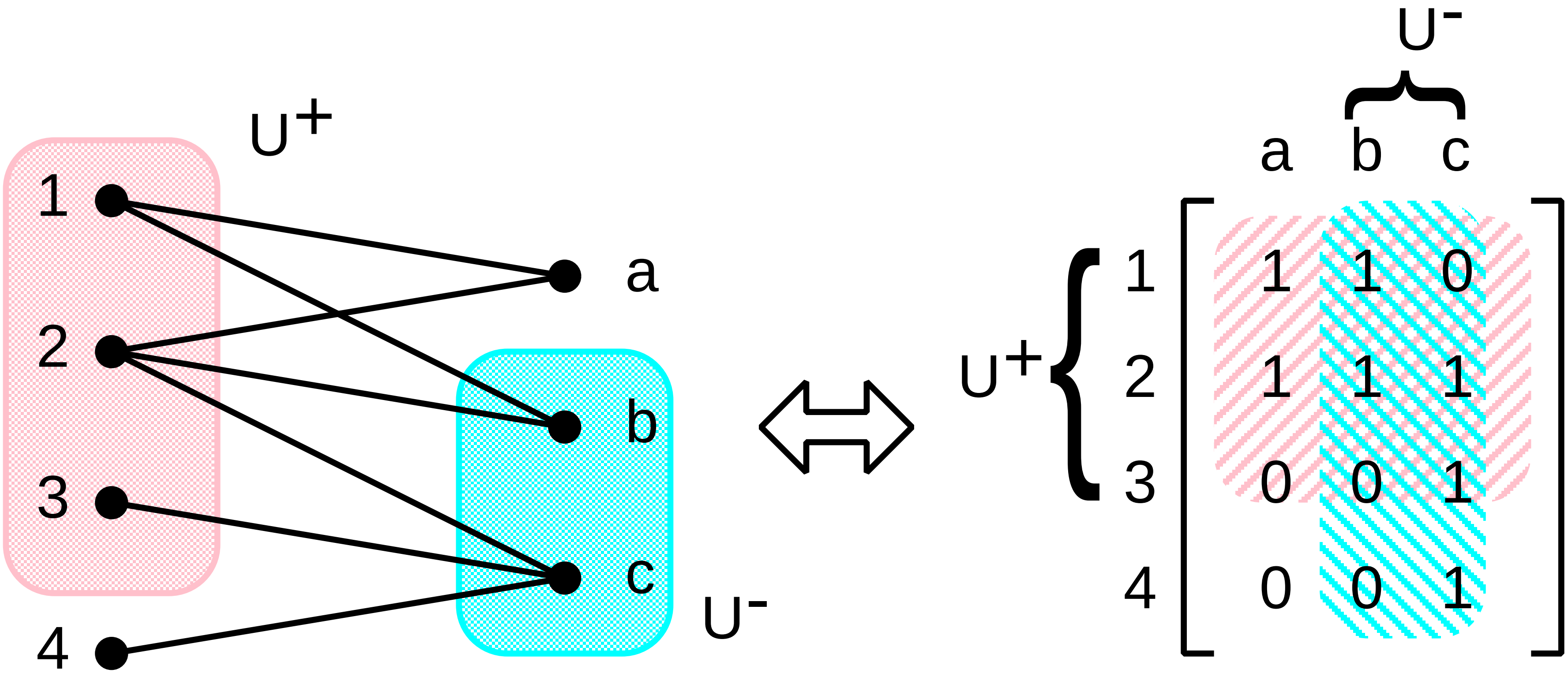
被覆と $\{0, 1\}$-行列



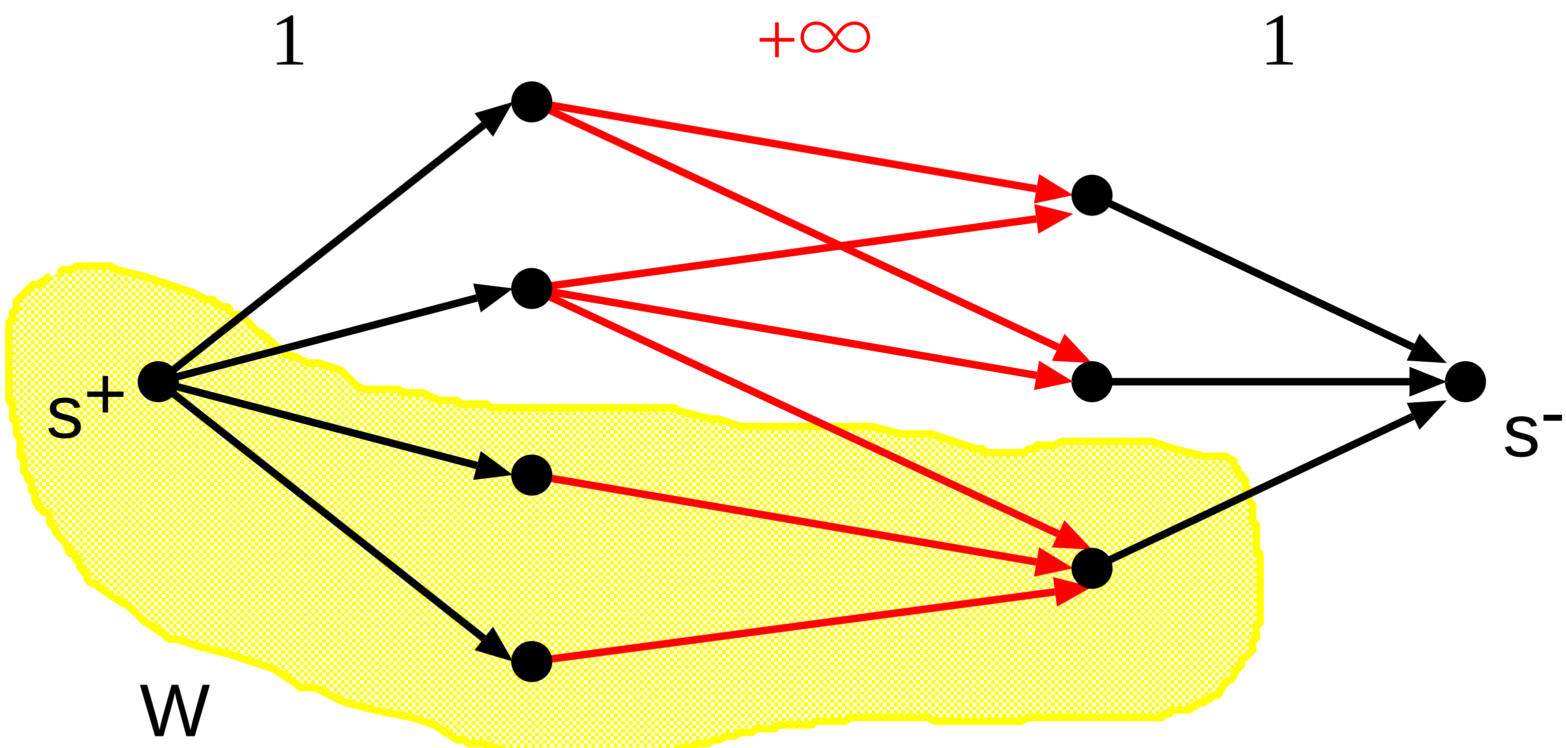
$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ U^+ \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

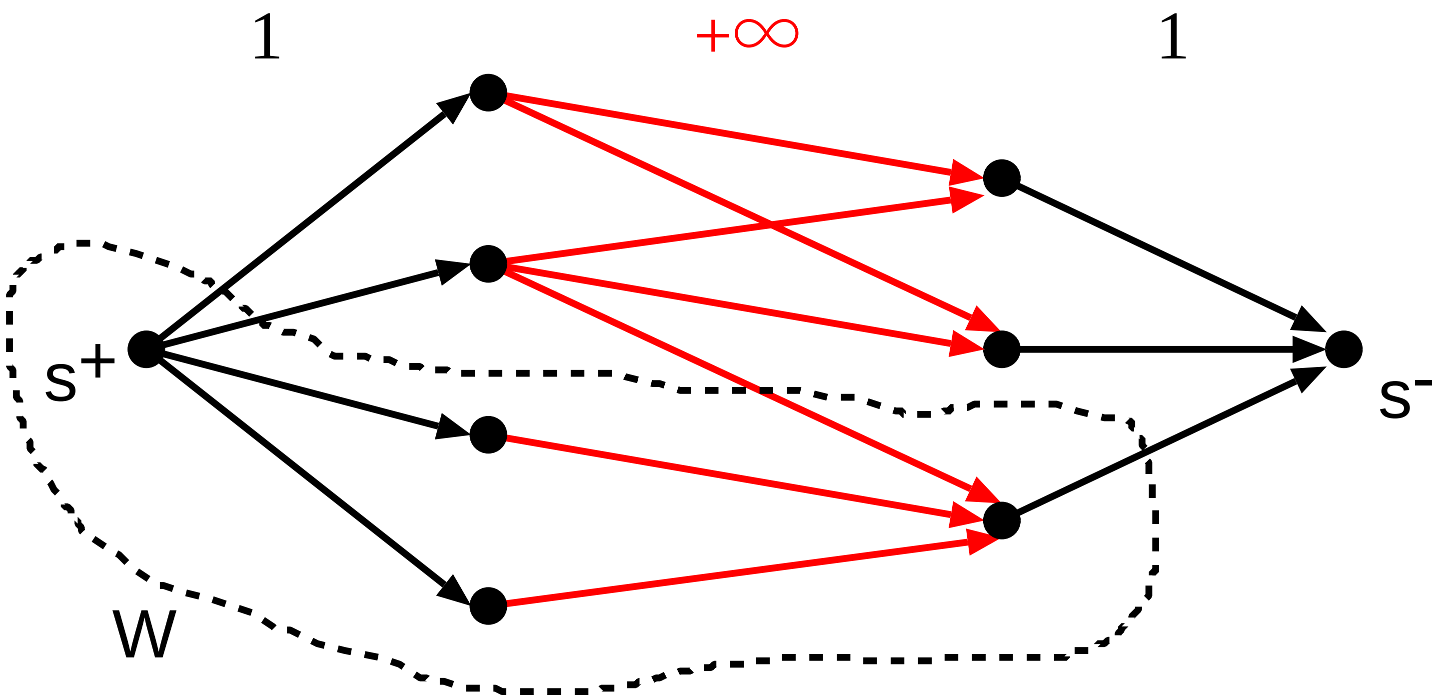
被覆と $\{0,1\}$-行列

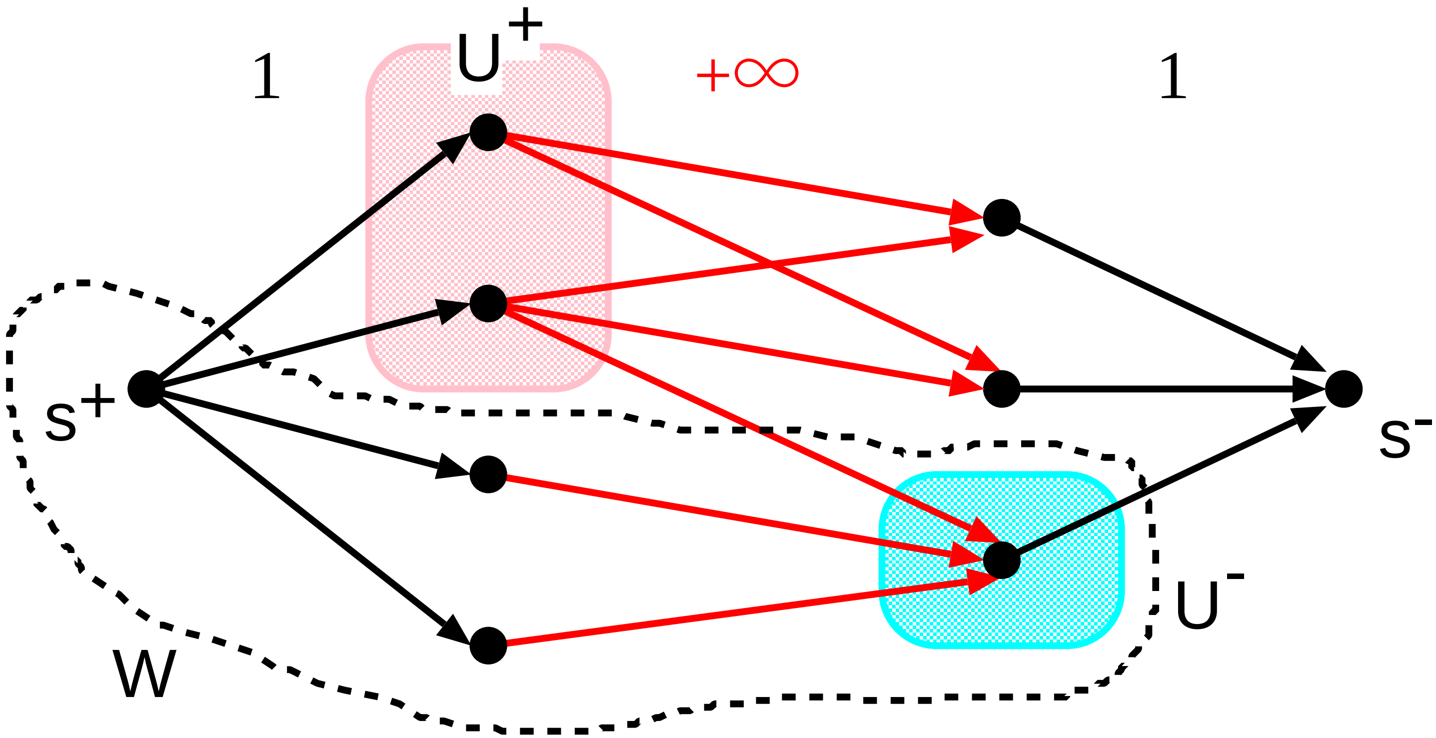


$\mathcal{N}_G$ の容量が有限のカット $\Rightarrow G$ の被覆

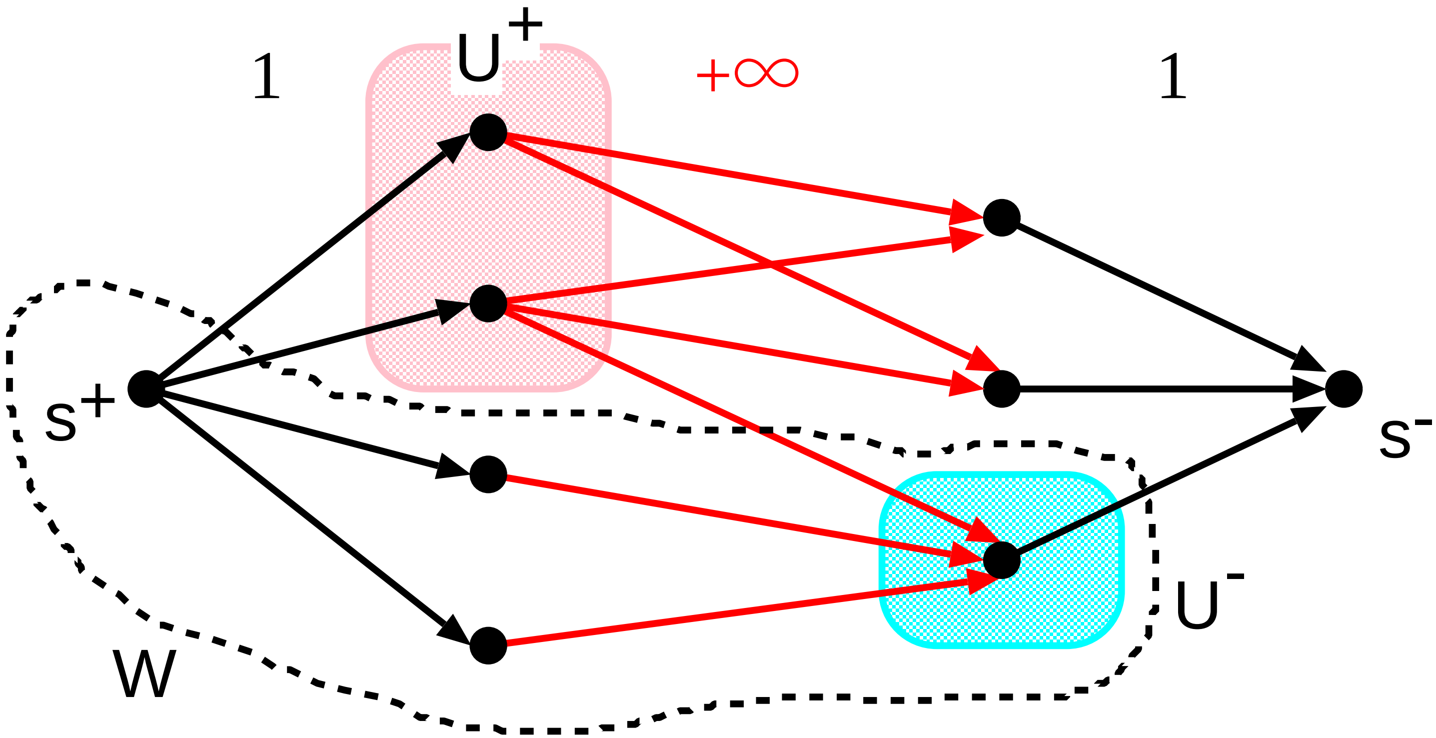


容量が有限のカット W ($\kappa_c(W) = 3$)


1
+∞
1
s+
s-
W



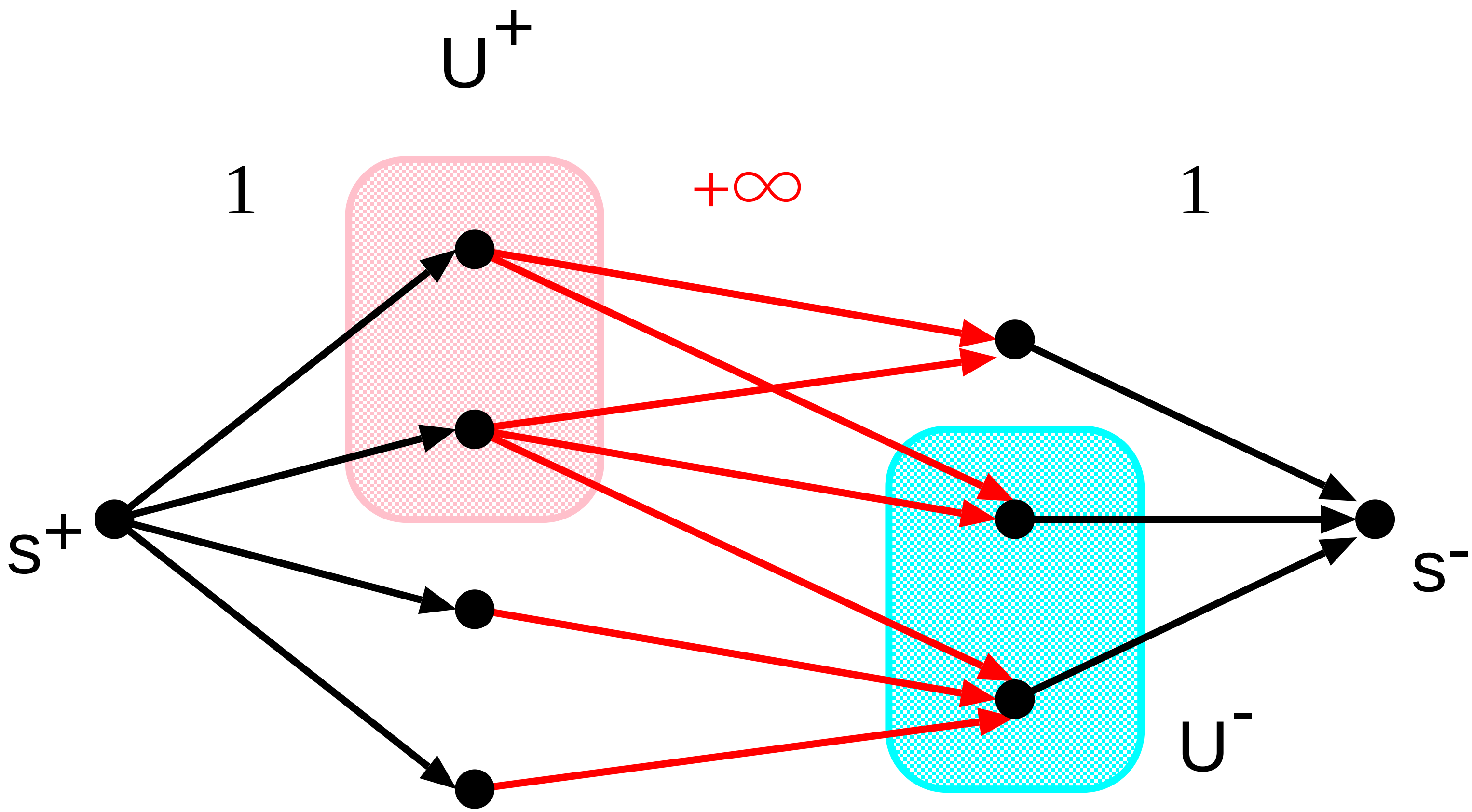
$$U^+ = V^+ \setminus W, \quad U^- = V^- \cap W \tag{2.146}$$



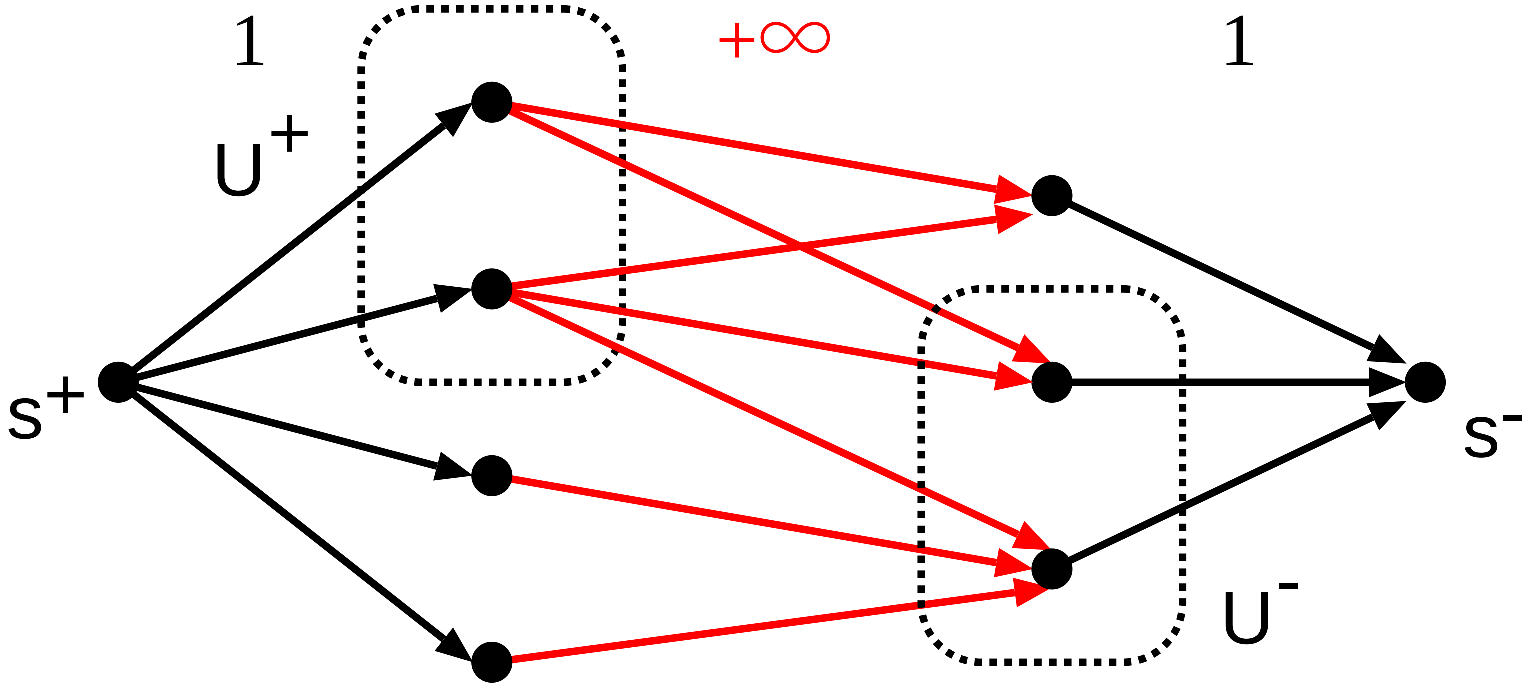
$$U^+ = V^+ \setminus W, \quad U^- = V^- \cap W \tag{2.146}$$

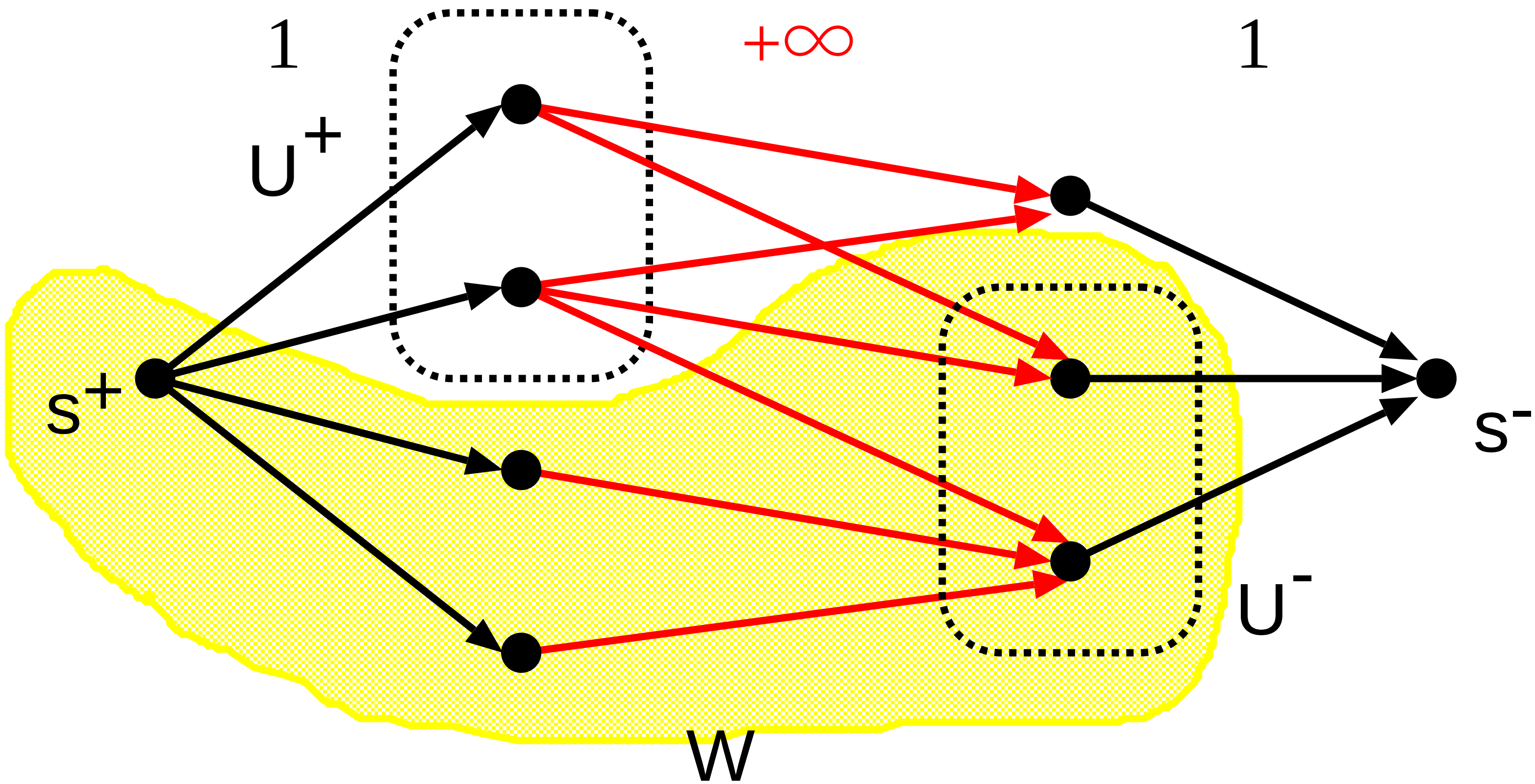
(U^+, U^-) は, G の被覆 ($|U^+| + |U^-| = 3$).

G の被覆 $\Rightarrow \mathcal{N}_G$ の容量が有限のカット

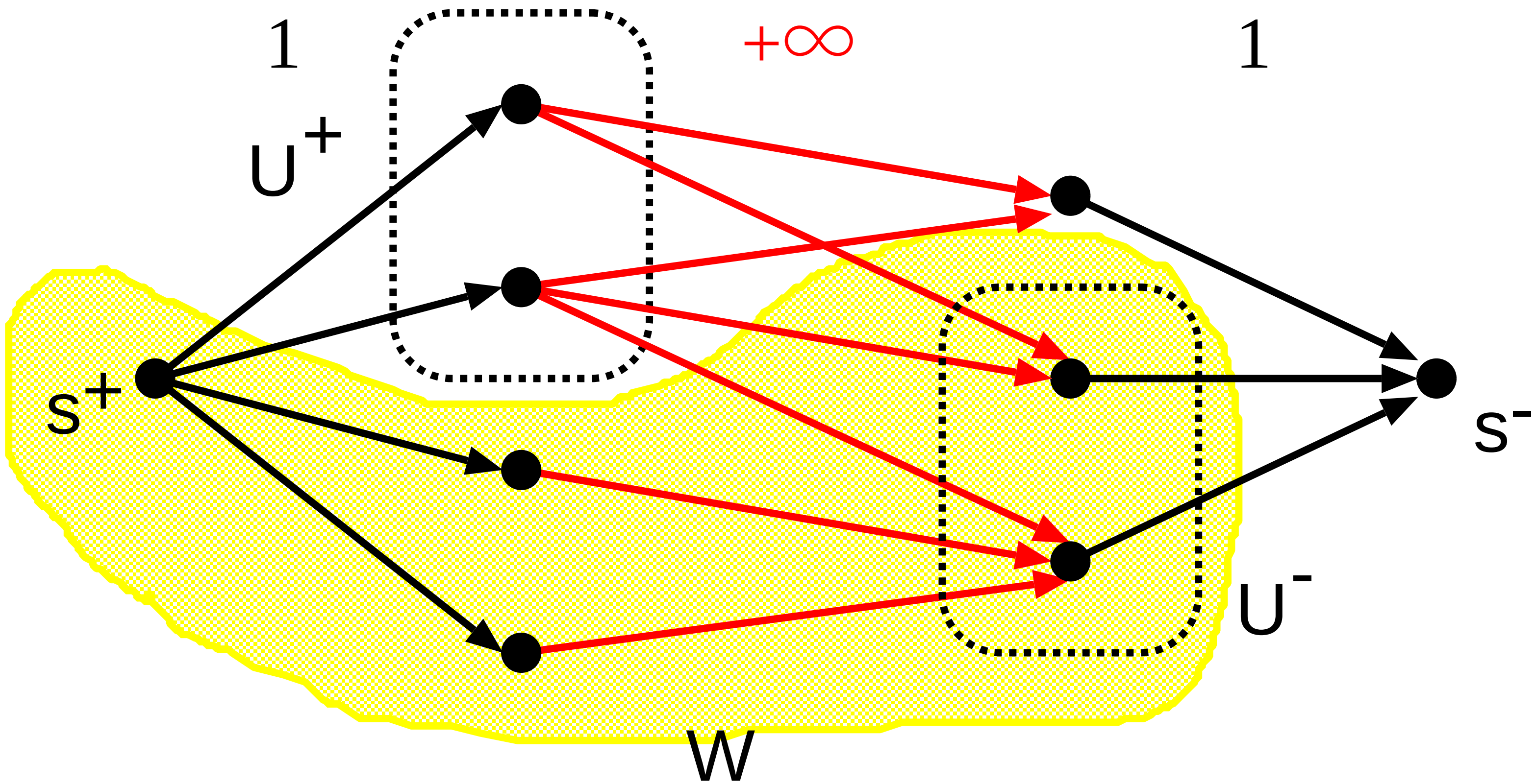


G の被覆 (U^+, U^-) $(|U^+| + |U^-| = 4)$


1
+∞
1
U+
s+
s-
U-



$$W = \{s^+\} \cup (V^+ \setminus U^+) \cup U^- \qquad (2.147)$$



$$W = \{s^+\} \cup (V^+ \setminus U^+) \cup U^- \qquad (2.147)$$

W は$\mathcal{N}_G$ の容量が有限カット $\kappa_c(W) = 4$.

G の被覆 $\Leftrightarrow N_G$ の有限容量のカット

- G の被覆と N_G の有限な容量を持つカットとは 1 対 1 に対応する.

Gの被覆 $\Leftrightarrow$ N_Gの有限容量のカット

- Gの被覆とN_Gの有限な容量を持つカットとは1対1に対応する.
- Gの被覆(U^+, U^-)とN_GのカットWが対応しているとき,

$$|U^+| + |U^-| = \kappa_c(W)$$

が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\max\{|M| \mid M \text{ は } G \text{ のマッチング }\} \\
&= \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi \text{ は } \mathcal{N}_G \text{ のフロー }\} \\
&= \min\{\kappa_c(W) \mid W \text{ は } \mathcal{N}_G \text{ のカット }\} \\
&= \min\{|U^+| + |U^-| \mid (U^+, U^-) \text{ は } G \text{ の被覆 }\}.
\end{aligned}
$$

(2.148)

最大マッチング・最小被覆定理

任意の 2 部グラフ G において,

$$\max\{|M| \mid M \text{ は } G \text{ のマッチング}\}$$
$$= \min\{|U^+| + |U^-| \mid (U^+, U^-) \text{ は } G \text{ の被覆}\}. \quad (2.148)$$

最大マッチング・最小被覆定理

任意の 2 部グラフ G において,

$$\begin{aligned}
&\max\{|M| \mid M \text{ は } G \text{ のマッチング}\} \\
= \ &\min\{|U^+| + |U^-| \mid (U^+, U^-) \text{ は } G \text{ の被覆}\}.
\end{aligned}$$

(2.147)

右辺の最小値を与える被覆を最小被覆と呼ぶ.

最小被覆の求め方

最小被覆の求め方

ネットワーク N_G の最小カット W を求めて，

$$U^+ = V^+ \setminus W, \quad U^- = V^- \cap W \tag{2.146}$$

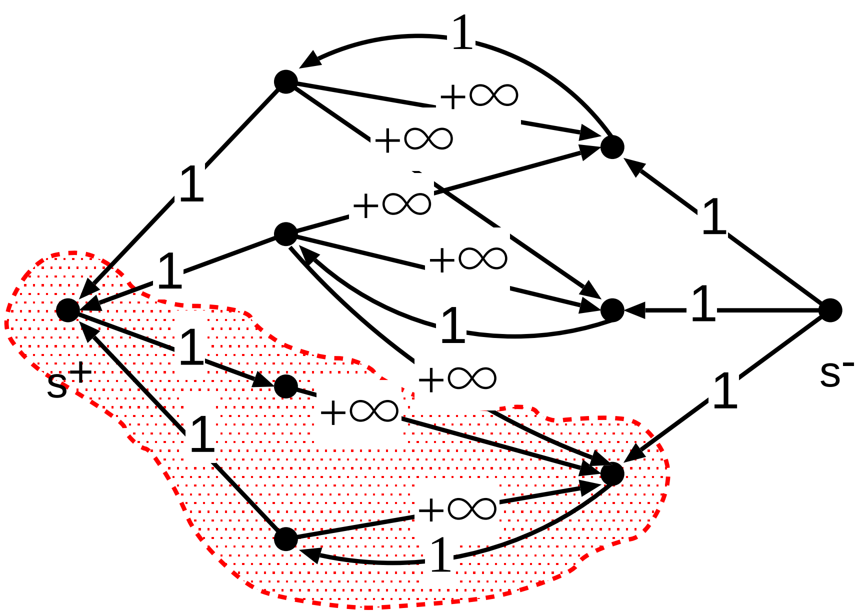
によって (U^+, U^-) を決めればよい．

最小被覆の求め方

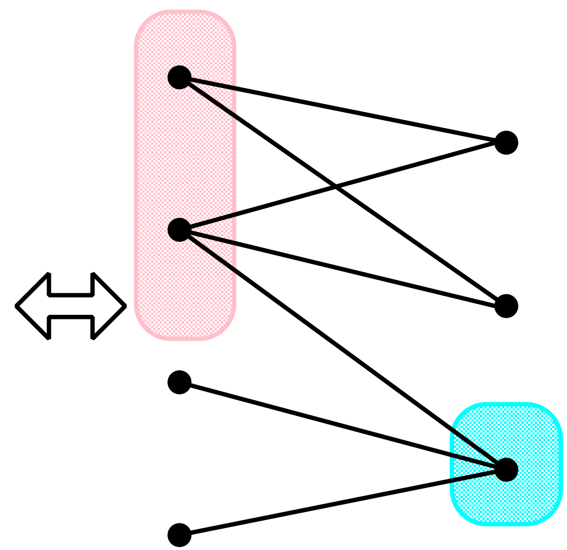
ネットワーク N_G の最小カット W を求めて,

$$U^+ = V^+ \setminus W, \quad U^- = V^- \cap W \qquad (2.146)$$

によって (U^+, U^-) を決めればよい.



最小カット W = {s+, 3, 4, c}



最小被覆 (U+, U-) = ({1, 2}, {c})

宿題

以下の 2 部グラフ $G = (V^+, V^-; A)$ の最大マッチングと全ての最小被覆を求めよ.