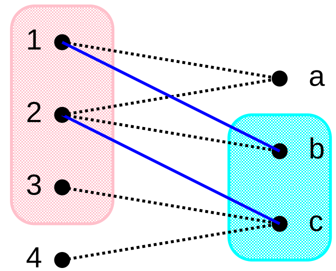
グラフとネットワーク (第13回)

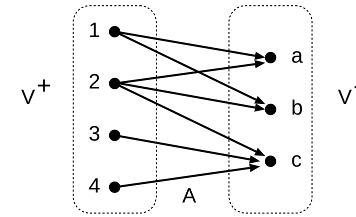
安藤 和敏
ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp
静岡大学工学部

2.4 マッチングと被覆



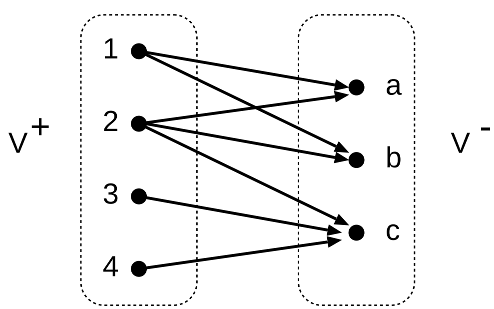
2部グラフ (⇒ テキスト p. 11)

グラフ $G=(V,A)$ の点集合 V が V^+ と V^- に分割
れて， 各枝 $a\in A$ が V^+ の点から出て V^- の点に
るとき， G を2部グラフと呼んで，
$G=(V^+,V^-;A)$ と表す．



G=(V+, V- ; A)

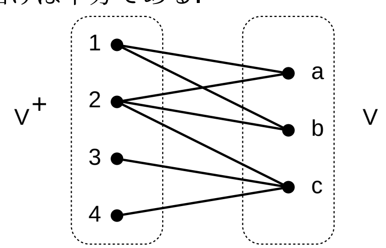
2部グラフ $G=(V^+,V^-;A)$ の例



の例では, $V^+=\{1,2,3,4\}$, $V^-=\{a,b,c\}$,
$=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(2,c),(3,c),(4,c)\}$.

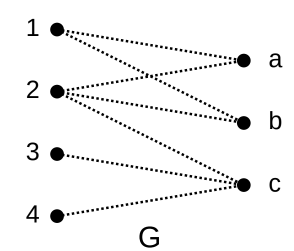
2部グラフの描き方の約束

枝は V^+ から V^- への向きを持つので，無向グラフ
として描けば十分である．



2部グラフと $\{0,1\}$-行列

2部グラフは自然は方法で, $\{0,1\}$-行列と対応す



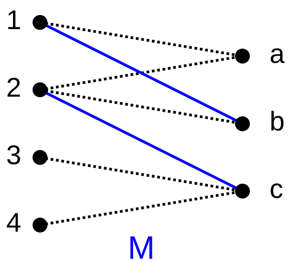
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

M_G

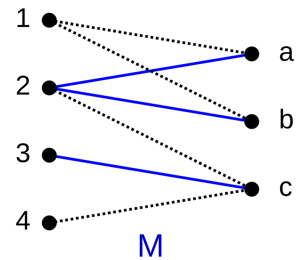
$$M_G(i,x)=\begin{cases} 1 & \text{if } (i,x)\in A, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

マッチング

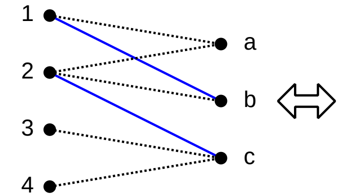
$\subseteq A$ は, 次の (*) を満たすとき, G のマッチン
と呼ばれる.
任意の相異なる 2 つの枝 $a_1, a_2 \in M$ に対して,
$a_1 \neq \partial^+ a_2$ かつ $\partial^- a_1 \neq \partial^- a_2$.



M は G のマッチングではない



マッチングと $\{0,1\}$-行列



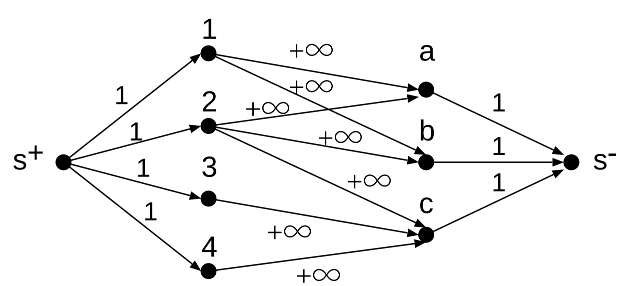
$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

最大マッチング問題

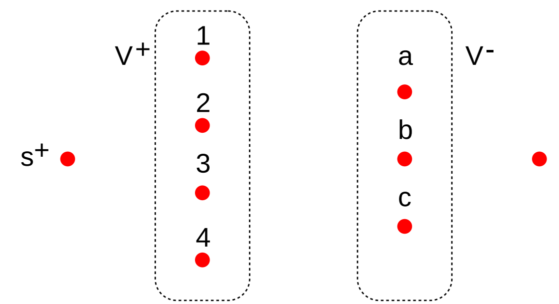
の本数 $|M|$ が最大の G のマッチングを最大マッチ
グと呼び, 最大マッチングを求める問題を最大マッ
ング問題と呼ぶ.

最大マッチング問題の解き方

ネットワーク $\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ 上の最大
フロー問題に変換する.

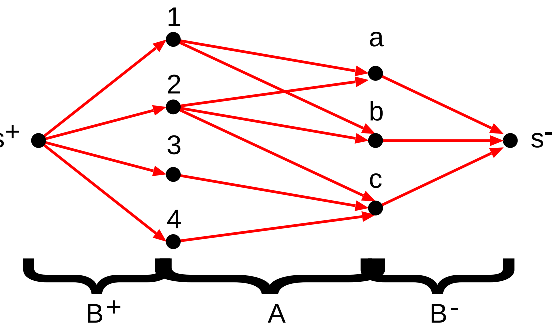


$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り



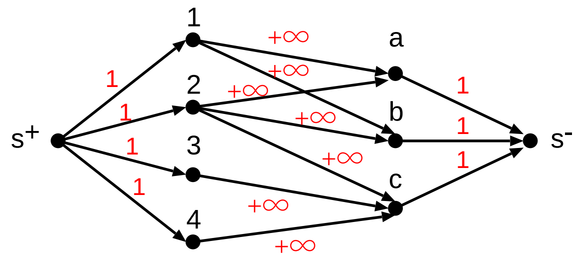
$$\hat{V} = V^+ \cup V^- \cup \{s^+, s^-\} \qquad (2.1$$

$_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方



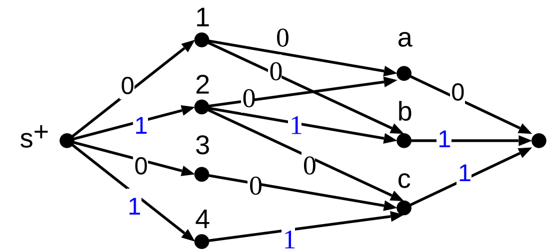
$$\hat{A} = A \cup B^+ \cup B^- \qquad (2.140)$$

$\mathcal{N}_G = (\hat{G} = (\hat{V}, \hat{A}), s^+, s^-, c)$ の作り方

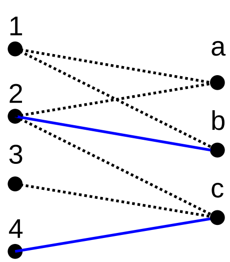


$$c(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in B^+ \cup B^-, \\ +\infty & \text{if } a \in A \end{cases} \qquad (2.143)$$

$\mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー $\varphi \Rightarrow G$ のマッチン



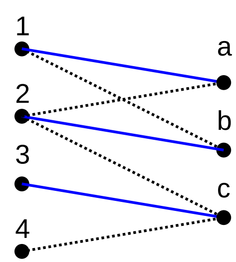
整数値フロー φ ($v^*(\varphi) = 2$)



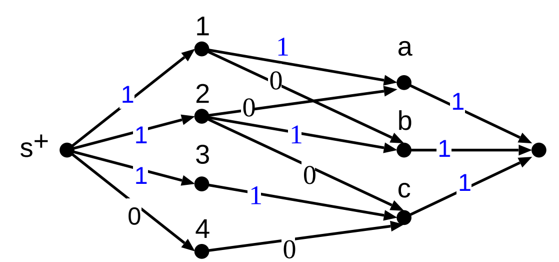
$$M = \{a \mid a \in A, \varphi(a) = 1\} \qquad (2.144)$$

, G のマッチング ($|M| = 2$).

G のマッチング $M \Rightarrow \mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー φ



G のマッチング M ($|M| = 3$)



$$\varphi(a) = 1 \ (a \in M), \quad \varphi(a) = 0 \ (a \in A \setminus M) \quad (2.1$$

で定義される φ は, $\mathcal{N}_G$ の整数値フロー ($v^*(\varphi) =$

のマッチング ⇔ $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー

G のマッチングと $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フローとは 1 対 1 に対応する.

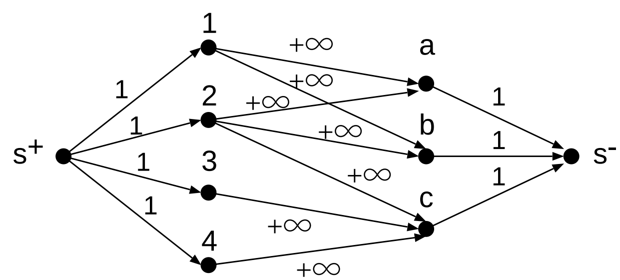
G のマッチング M と $\mathcal{N}_G$ 中の整数値フロー φ が対応しているとき,

$$|M| = v^*(\varphi)$$

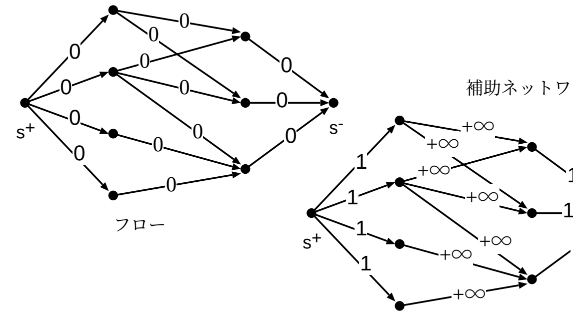
が成り立つ.

したがって, 枝の本数 $|M|$ が最大のマッチングを求めるためには, $\mathcal{N}_G$ 中の最大整数値フローを見付ければよい.

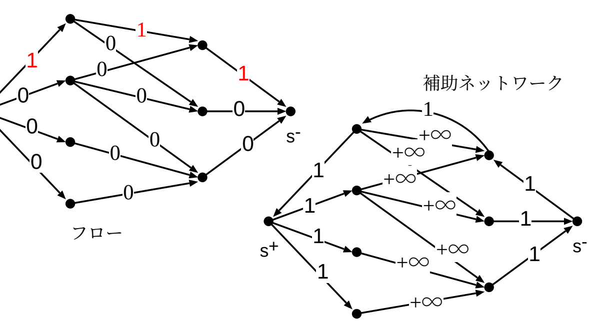
$\mathcal{N}_G$ 中の整数値最大フローを求める



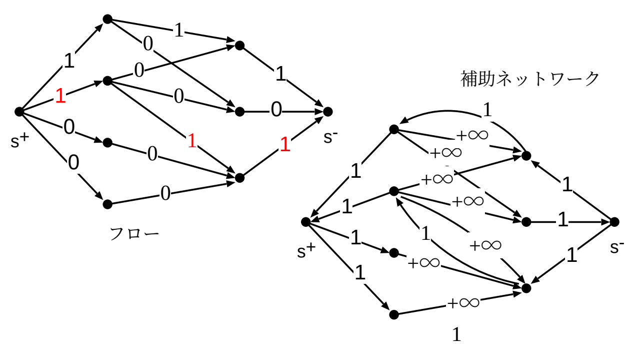
最大フローを求める (1)



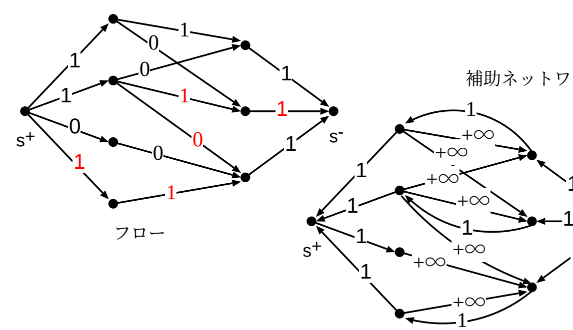
最大フローを求める (2)



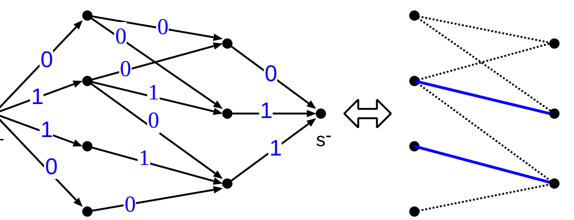
最大フローを求める (3)



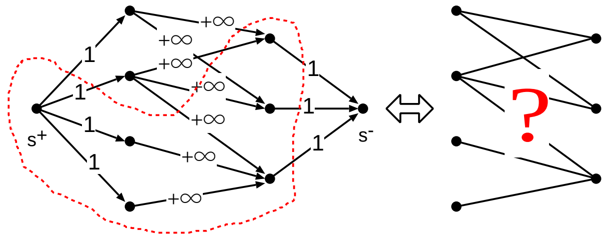
最大フローを求める (4)



最大-最小定理



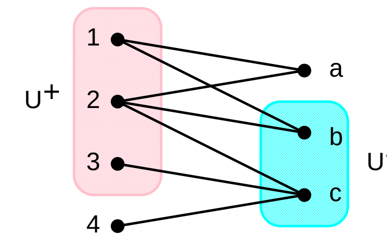
$_G$ 中フローと G のマッチングが対応しているのは
かったけれど,



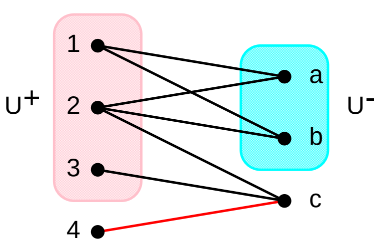
$\mathcal{N}_G$ のカットは G の何に対応するのか?

被覆

2 つの点集合 $U^+ \subseteq V^+$, $U^- \subseteq V^-$ の対 (U^+, U^-)
次の (**) を満たすとき, G の被覆と呼ばれる.
(**) 任意の枝 $a \in A$ に対して, $\partial^+ a \in U^+$ または
$\partial^- a \in U^-$.

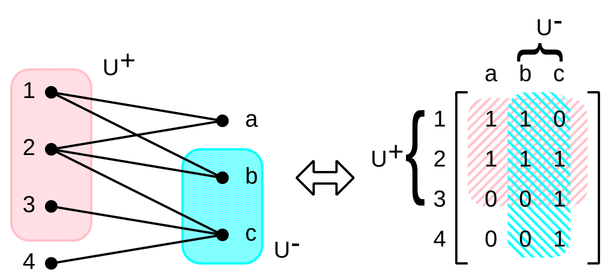


次の (U^+, U^-) は, G の被覆ではない

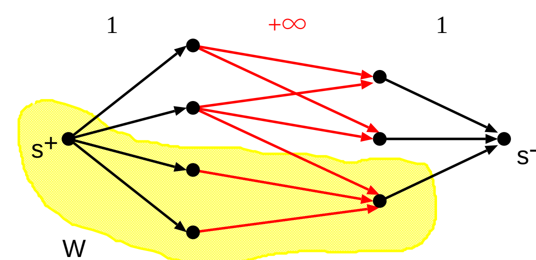


支 $(4, c)$ に注目.)

被覆と $\{0, 1\}$-行列

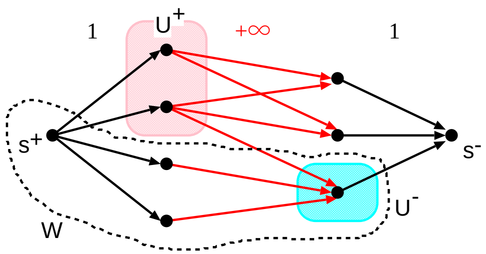


$\mathcal{N}_G$ の容量が有限のカット $\Rightarrow$ G の被



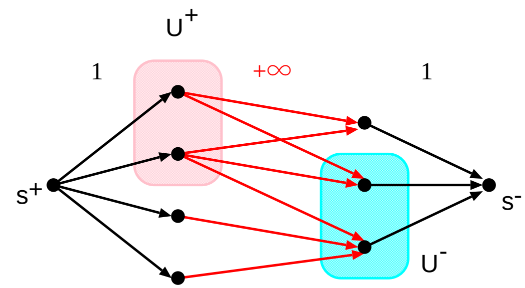
容量が有限のカット W ($\kappa_c(W) = 3$)

Gの被覆 $\Rightarrow$ $\mathcal{N}_G$の容量が有限のカット

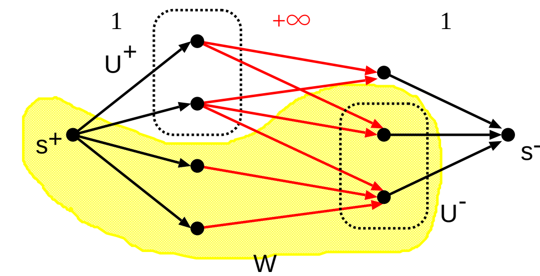


$$U^+ = V^+ \setminus W, \quad U^- = V^- \cap W \qquad (2.146)$$

(U^+, U^-)は, Gの被覆 ($|U^+| + |U^-| = 3$).



Gの被覆 (U^+, U^-) ($|U^+| + |U^-| = 4$)



$$W = \{s^+\} \cup (V^+ \setminus U^+) \cup U^- \qquad (2.1$$

Wは$\mathcal{N}_G$の容量が有限カット $\kappa_c(W) = 4$.

Gの被覆 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{N}_G$の有限容量のカット

Gの被覆と$\mathcal{N}_G$の有限な容量を持つカットとは1対1に対応する.

Gの被覆(U^+, U^-)と$\mathcal{N}_G$のカットWが対応しているとき,

$$|U^+| + |U^-| = \kappa_c(W)$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\max\{|M| \mid M \text{ は } G \text{ のマッチング}\} \\
&= \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi \text{ は } \mathcal{N}_G \text{ のフロー}\} \\
&= \min\{\kappa_c(W) \mid W \text{ は } \mathcal{N}_G \text{ のカット}\} \\
&= \min\{|U^+| + |U^-| \mid (U^+, U^-) \text{ は } G \text{ の被覆}\}.
\end{aligned}$$

(2.148)

最大マッチング・最小被覆定理

任意の2部グラフGにおいて,

$$\begin{aligned}
&\max\{|M| \mid M \text{ は } G \text{ のマッチング}\} \\
&= \min\{|U^+| + |U^-| \mid (U^+, U^-) \text{ は } G \text{ の被覆}\}
\end{aligned}$$

(2.147)

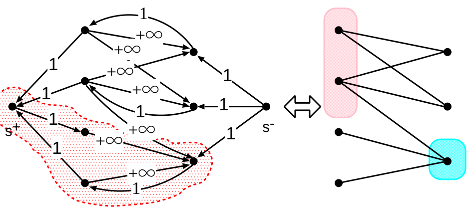
右辺の最小値を与える被覆を最小被覆と呼ぶ.

最小被覆の求め方

ットワーク $\mathcal{N}_G$ の最小カット W を求めて，

$$U^+ = V^+ \setminus W, \quad U^- = V^- \cap W \tag{2.146}$$

よって (U^+, U^-) を決めればよい．



最小カット W = {s+, 3, 4, c}　　最小被覆 (U+, U-) = ({1, 2}, {c})

宿題

以下の 2 部グラフ $G = (V^+, V^-; A)$ の最大マッチングと最小被覆を求めよ．