グラフとネットワーク (第12回)

安藤 和敏

ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

アルゴリズムの正当性

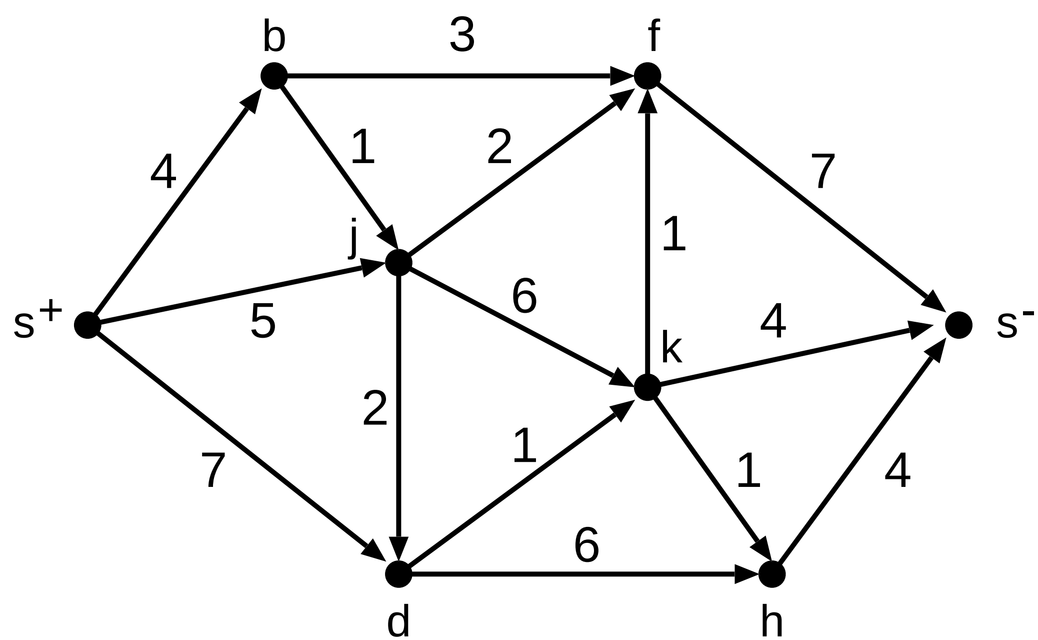
以下では, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性について説明する.

アルゴリズムの正当性

以下では, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性について説明する． 正当性の証明において重要な役割を果たすカットという概念に関連して最小カット問題に対するアルゴリズムについても説明する.

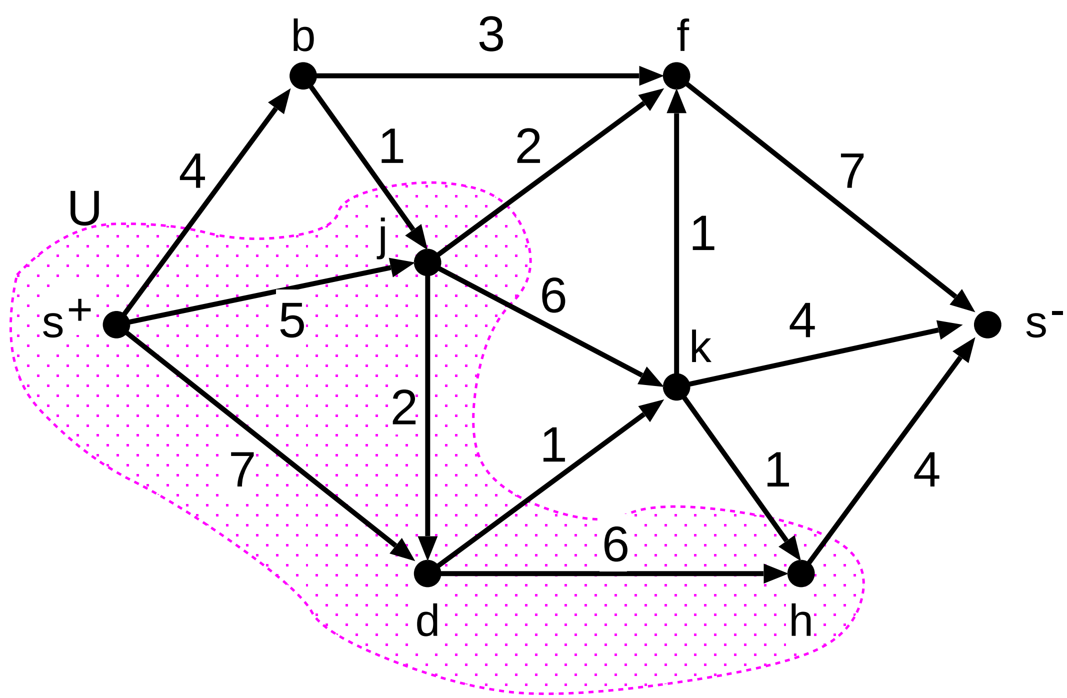
ネットワークのカット

$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ をネットワークとする.



ネットワークのカット

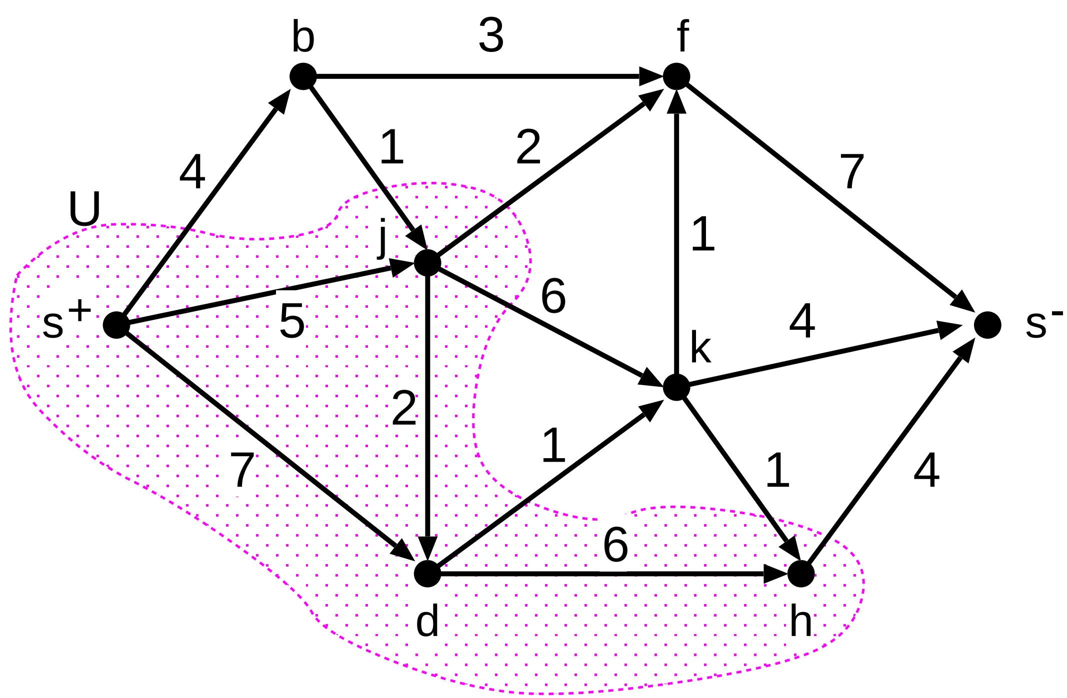
$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ をネットワークとする.
$s^+ \in U,\ s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことをカット (cut) と呼ぶ.



カット $U = \{s^+, d, j\}$

カットの容量

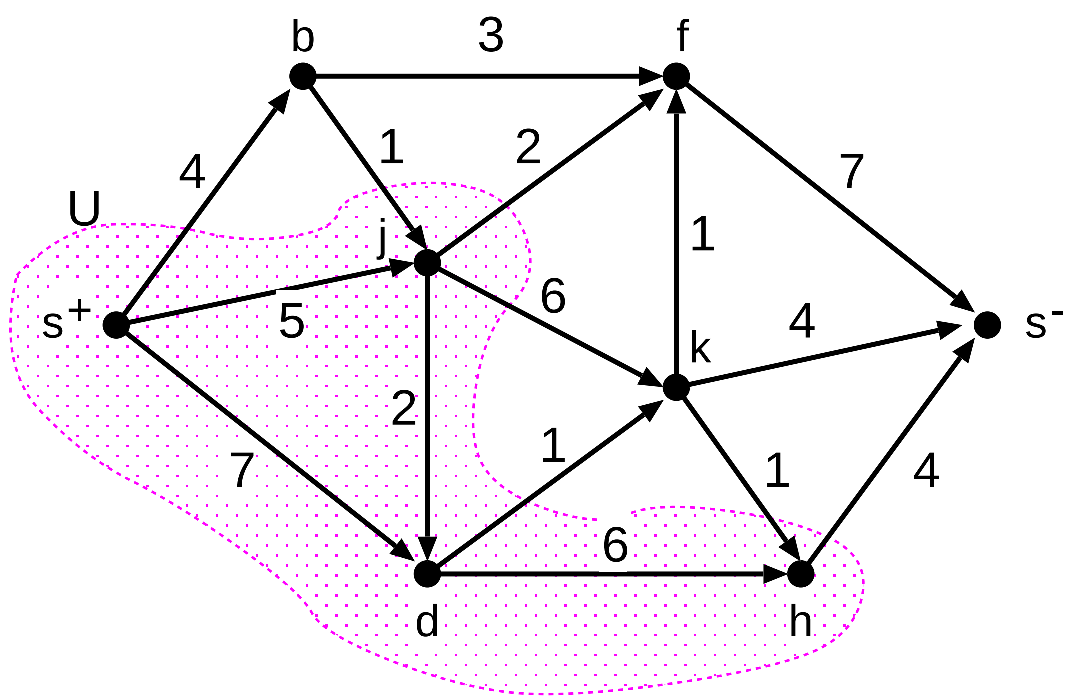
カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は次式で定義される:



カットの容量

カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は次式で定義される:

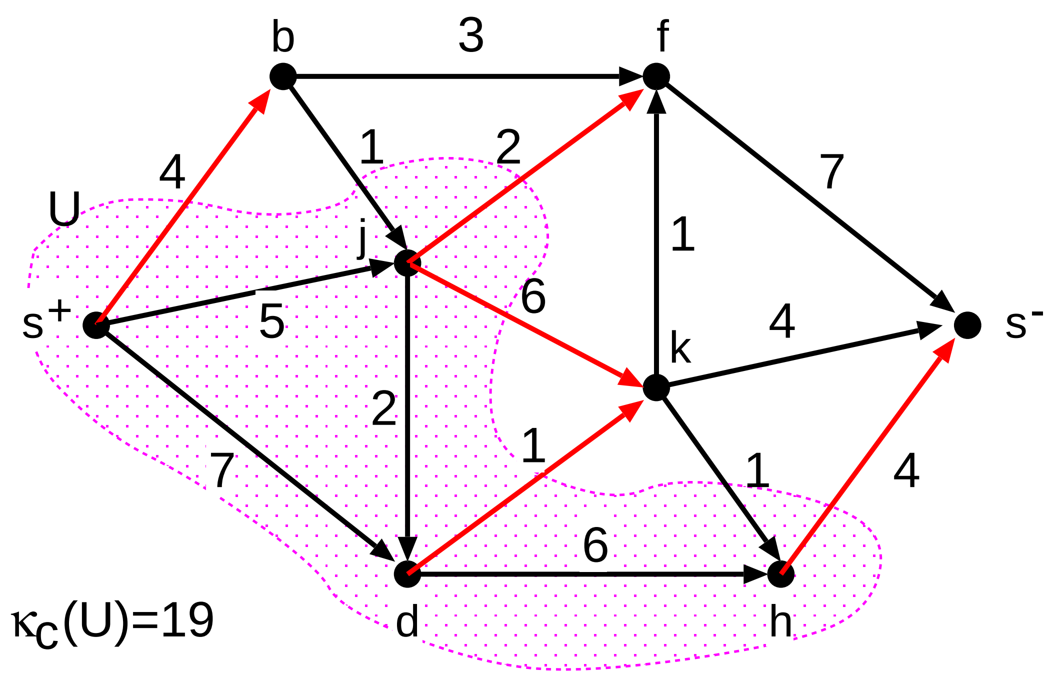
$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \tag{2.29}$$



カットの容量

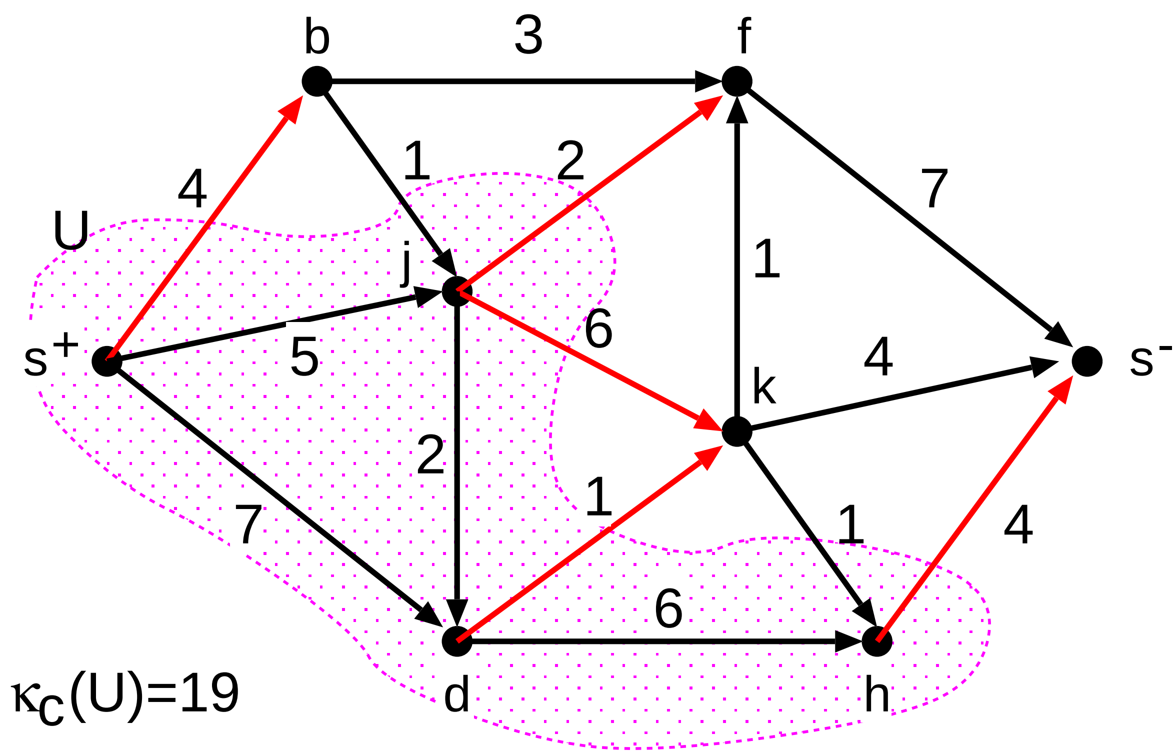
カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は次式で定義される:

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \qquad (2.29)$$



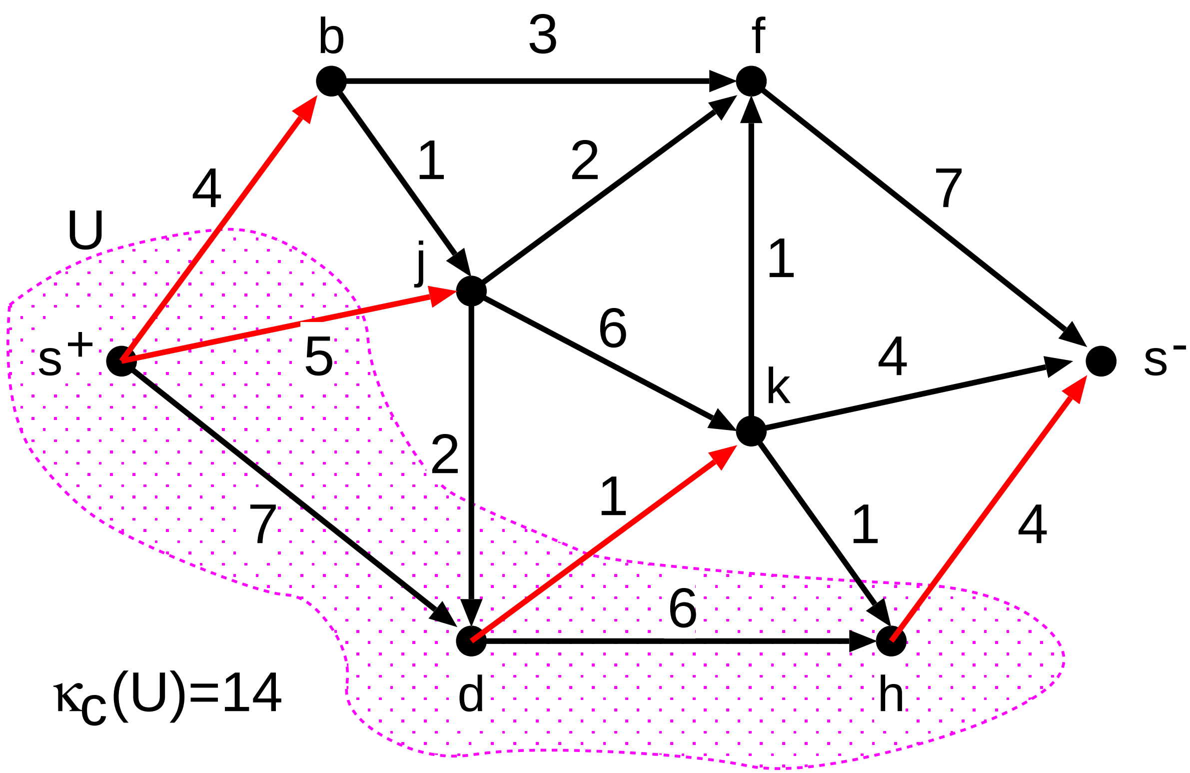
最小カット

容量が最小のカットを最小カットと呼ぶ.



最小カット

容量が最小のカットを最小カットと呼ぶ.



補題 2.7

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \leq \kappa_c(U) \tag{2.30}$$

が成り立つ.
(別の言い方をすると,

「任意のフローの流量は, 任意のカットの容量以下」

.)

(補題 2.7 の証明)

$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\
&= \kappa_c(U).
\end{aligned}$$

(黒板で説明)

式(2.32)

補題 2.7 から,

$$\begin{aligned}&\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N}\text{ 中のフロー}\}\\&\le \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N}\text{ のカット}\}\end{aligned} \tag{2.32}$$

を得る.

定理 2.a (アルゴリズムの正当性)

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(定理2.aの証明)

もし, $\mathcal{N}$ の**ある**カット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \qquad (*)$$

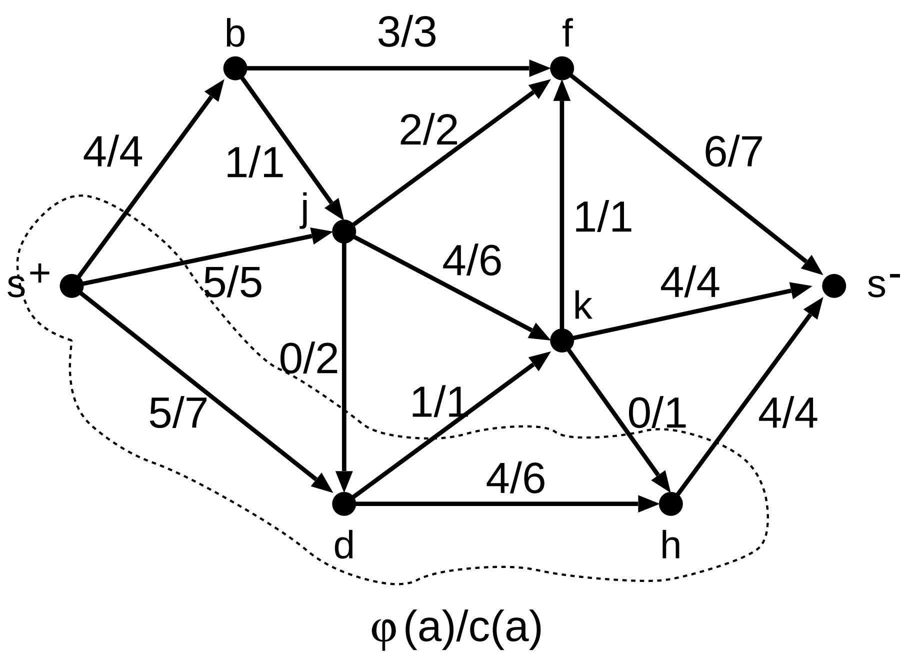
が成り立つのならば,

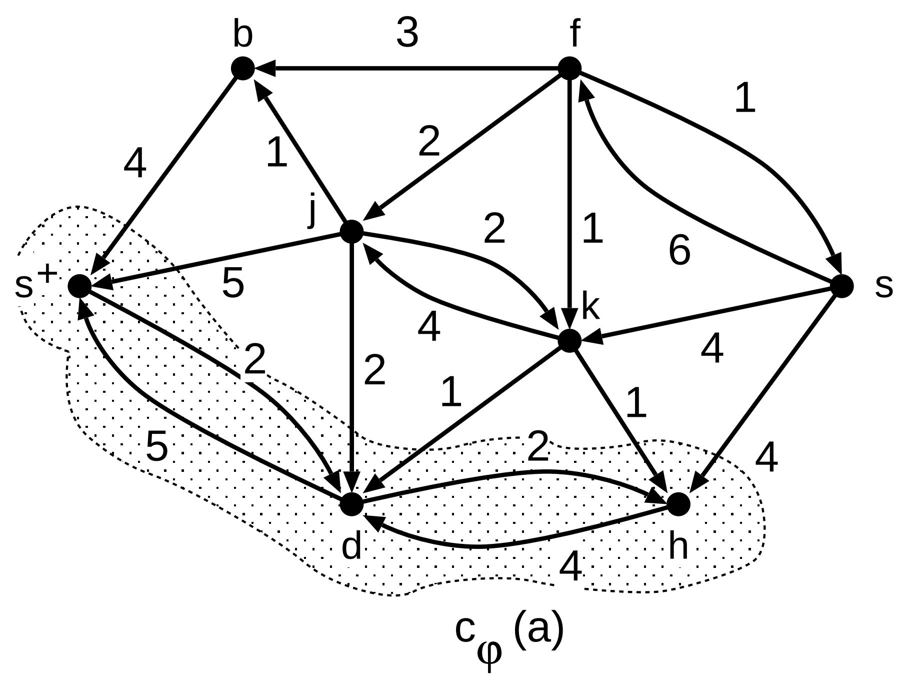
$$\begin{aligned} \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N}\text{ のカット}\} & \\ \leq\ & \kappa_c(W) \\ =\ & v^*(\varphi) \\ \leq\ & \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N}\text{ 中のフロー}\} \end{aligned}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大流であり, W は最小カットである.

(定理2.aの証明)

W を, s^+ を始点とする $\mathcal{N}_\varphi$ の有向道で到達可能な点全体とする. $s^+ \in W$ かつ $s^- \notin W$ なので, W はカットである.





アルゴリズムが終了したときの φ と補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

(定理 2.a の証明)

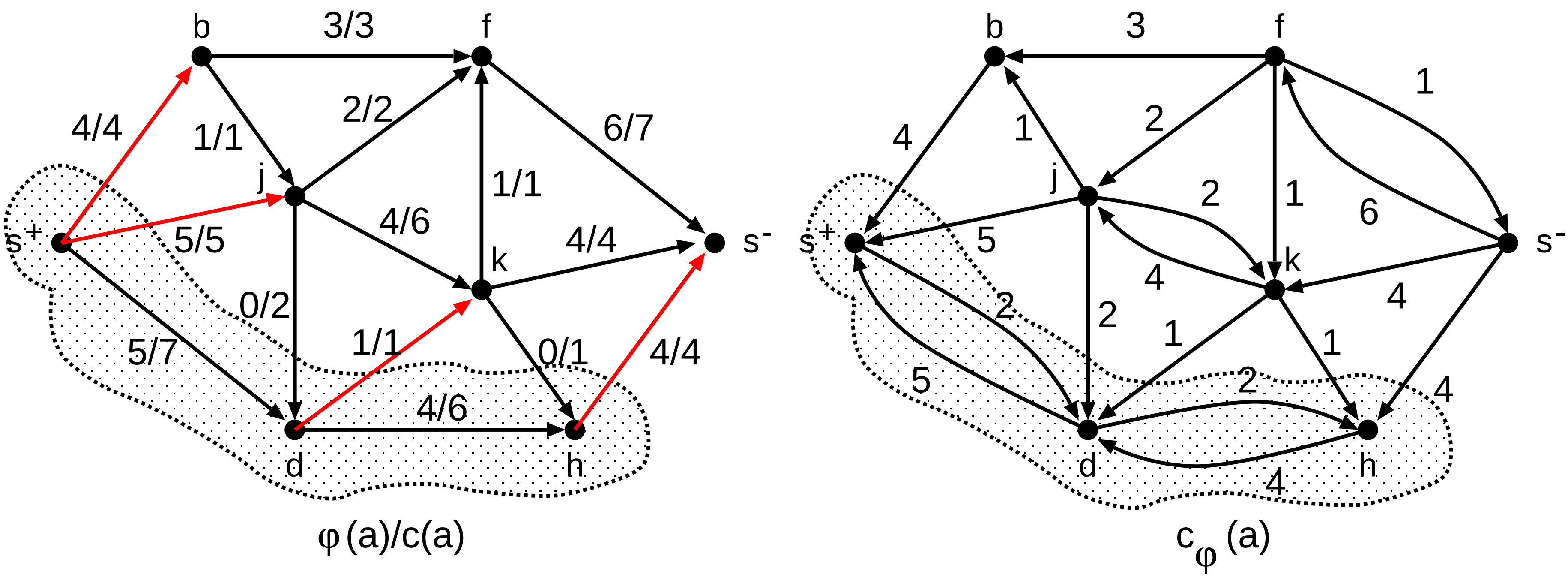
この W に対して,

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \qquad (*)$$

を示せば証明は終りである.

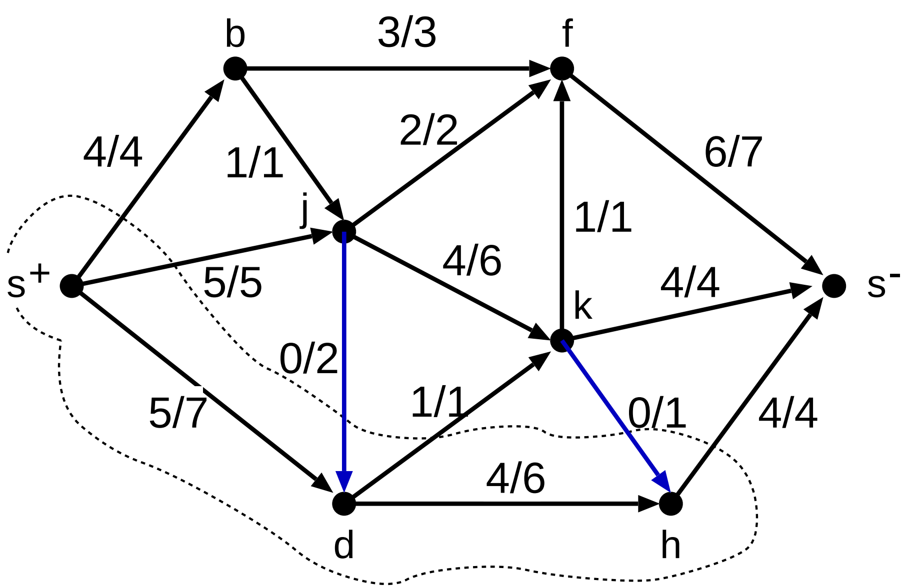
(定理 2.a の証明)

(ア) ネットワーク N において W から出る枝 a は, 補助ネットワーク N_φ の中には存在しないから, $\varphi(a) = c(a)$.

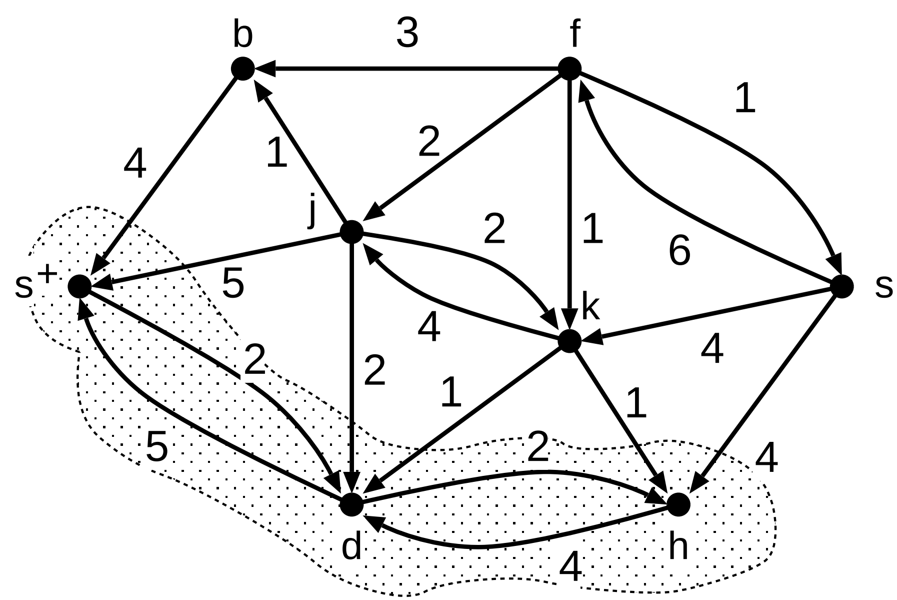


(定理 2.a の証明)

(イ) ネットワーク N において W に入る枝 a' に対して, その逆向き枝 $\bar{a}'$ は補助ネットワーク N_φ の中には存在しないから, $\varphi(a') = 0$.



φ(a)/c(a)



c_φ (a)

$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} 0 \\
&= \kappa_c(W)
\end{aligned}
$$

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理)

$$\begin{aligned}&\max\{v^*(\varphi)\mid\varphi:\mathcal{N}\text{ 中のフロー}\}\\&=\min\{\kappa_c(U)\mid U:\mathcal{N}\text{ のカット}\}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

注意 2.b

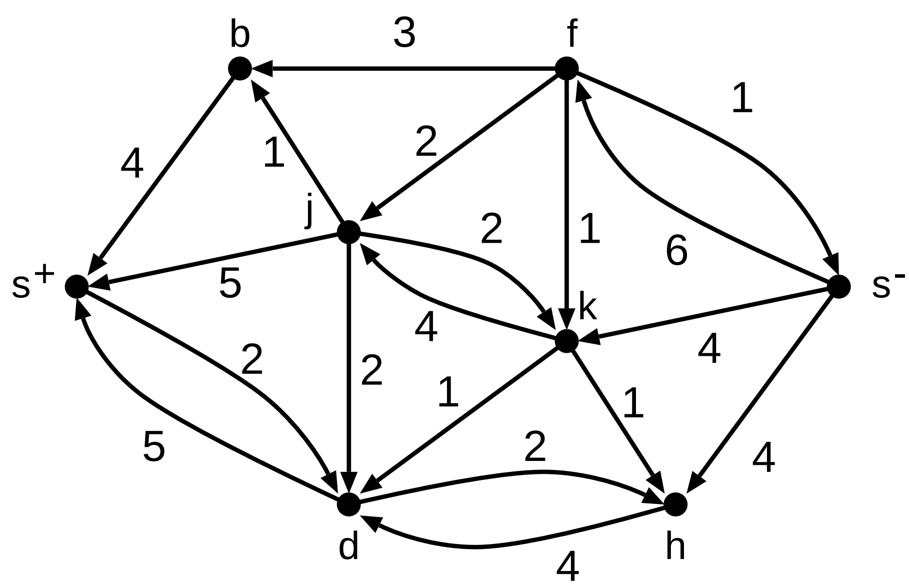
全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの各反復においてフローの流量は少くとも 1 ずつ増加する．したがって, 有限回で最大流に到達する.

定理 2.6

容量関数 $c\colon A \to \mathbf{R}$ が整数値関数であるとき, 整数値 (各枝のフローの値が整数) の最大フローが存在する.

最小カットの求め方

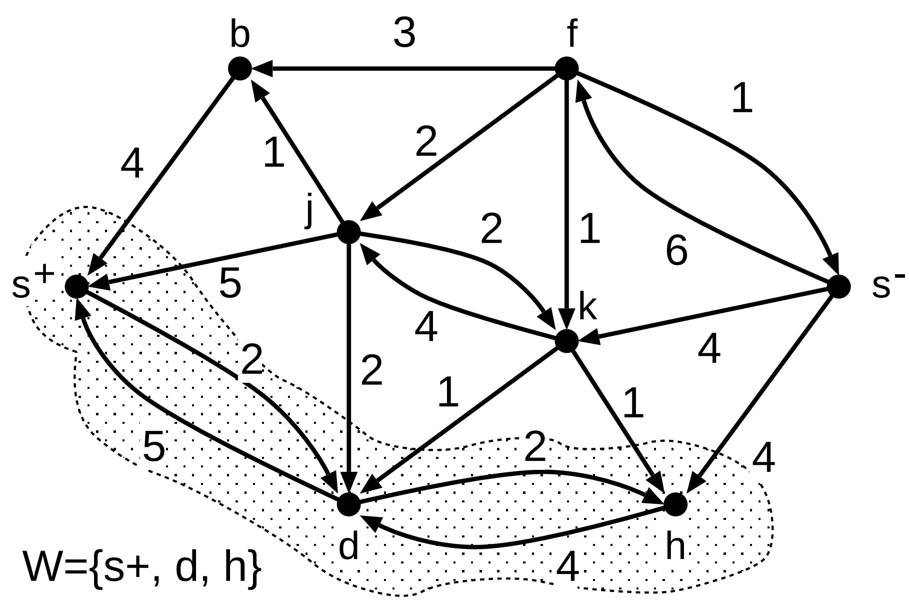
定理 2.5 の証明から, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ の補助ネットワーク N_φ において,



c_φ (a)

最小カットの求め方

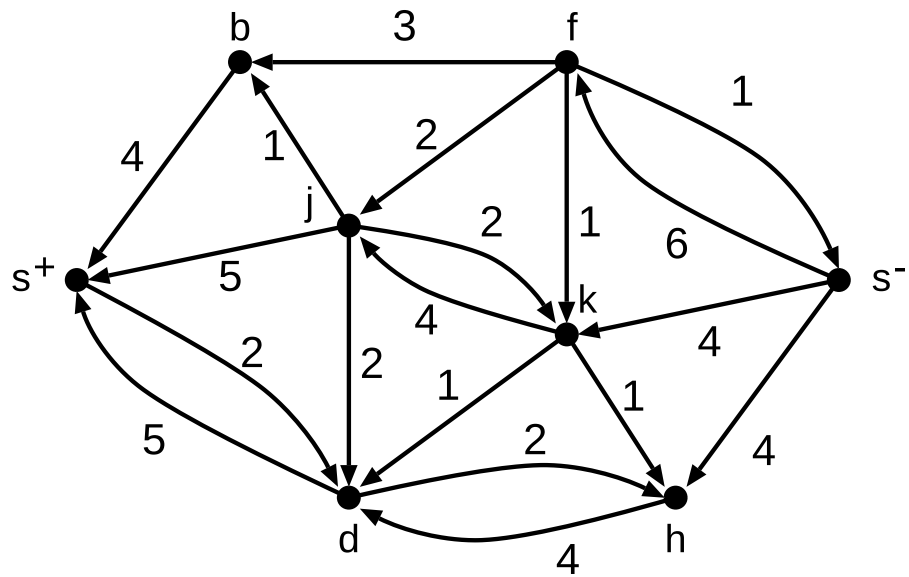
定理2.5の証明から, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフローφの補助ネットワークN_φにおいて, s^+から有向道によって到達可能な点の全体をWとすると. Wは最小カットになる.



c_φ (a)

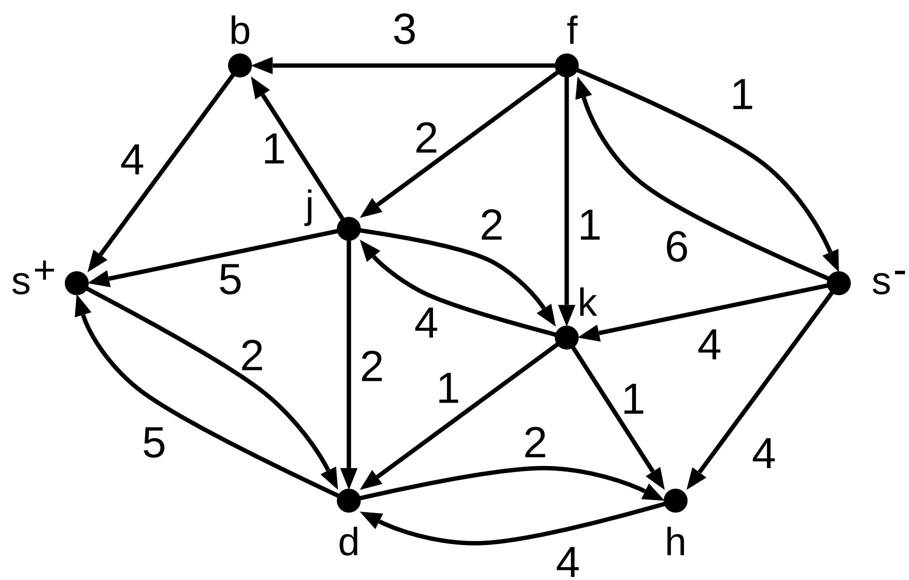
全ての最小カットの求め方

この補助ネットワーク N_φ を用いると, **全ての**最小カットも求めることができる.



$c_\varphi(a)$

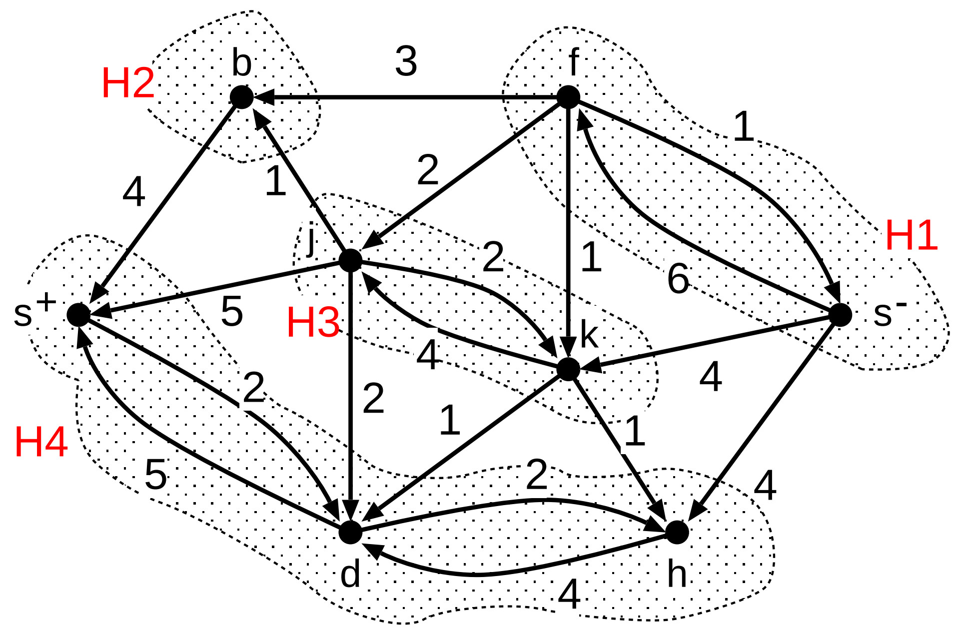
全ての最小カットの求め方



$c_{\varphi}(a)$

全ての最小カットの求め方

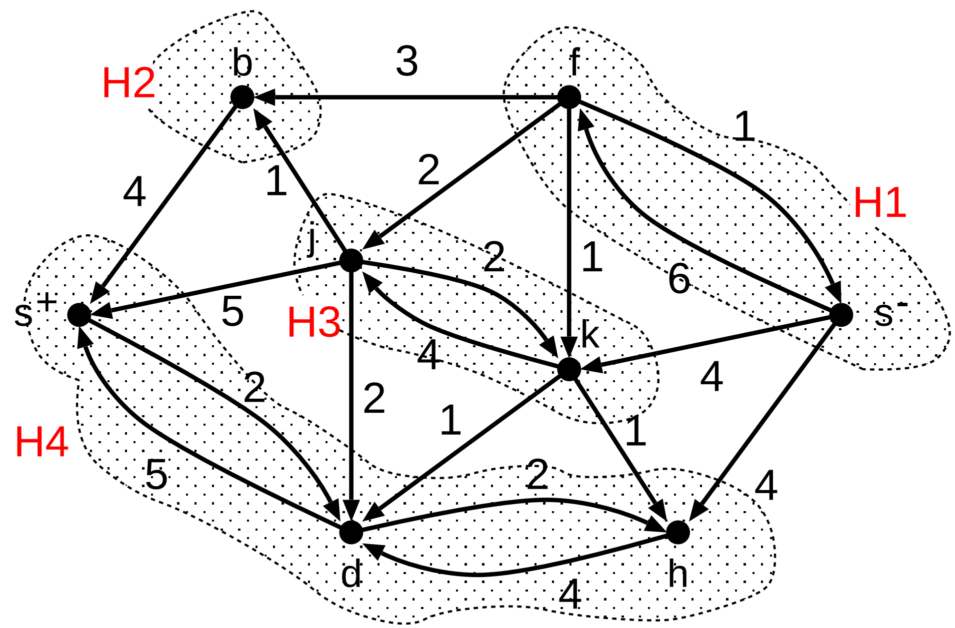
まず, 補助ネットワークを強連結成分分解する.



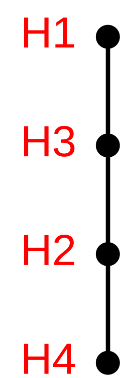
c_φ (a)

全ての最小カットの求め方

まず, 補助ネットワークを強連結成分分解する.
そして, そのハッセ図を求める.



c_φ (a)



練習問題

先週の演習問題のネットワークの全ての最小カットを求めよ.