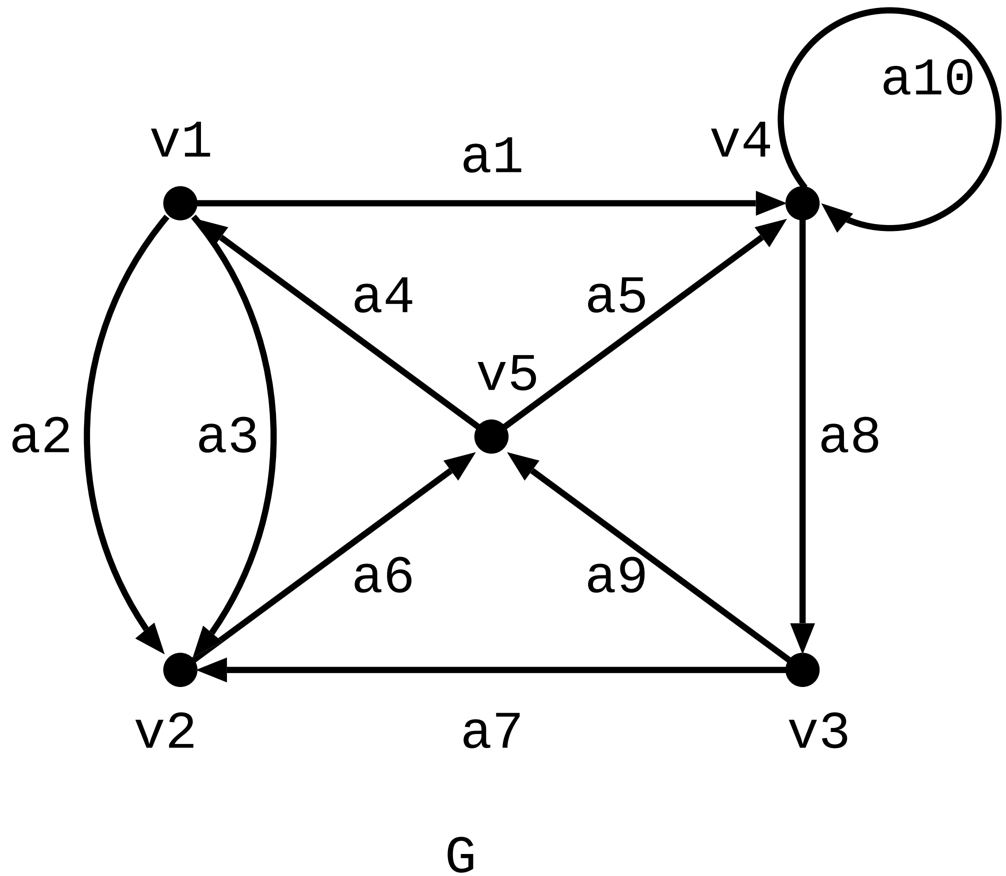
グラフとネットワーク (第1回)

静岡大学システム工学科

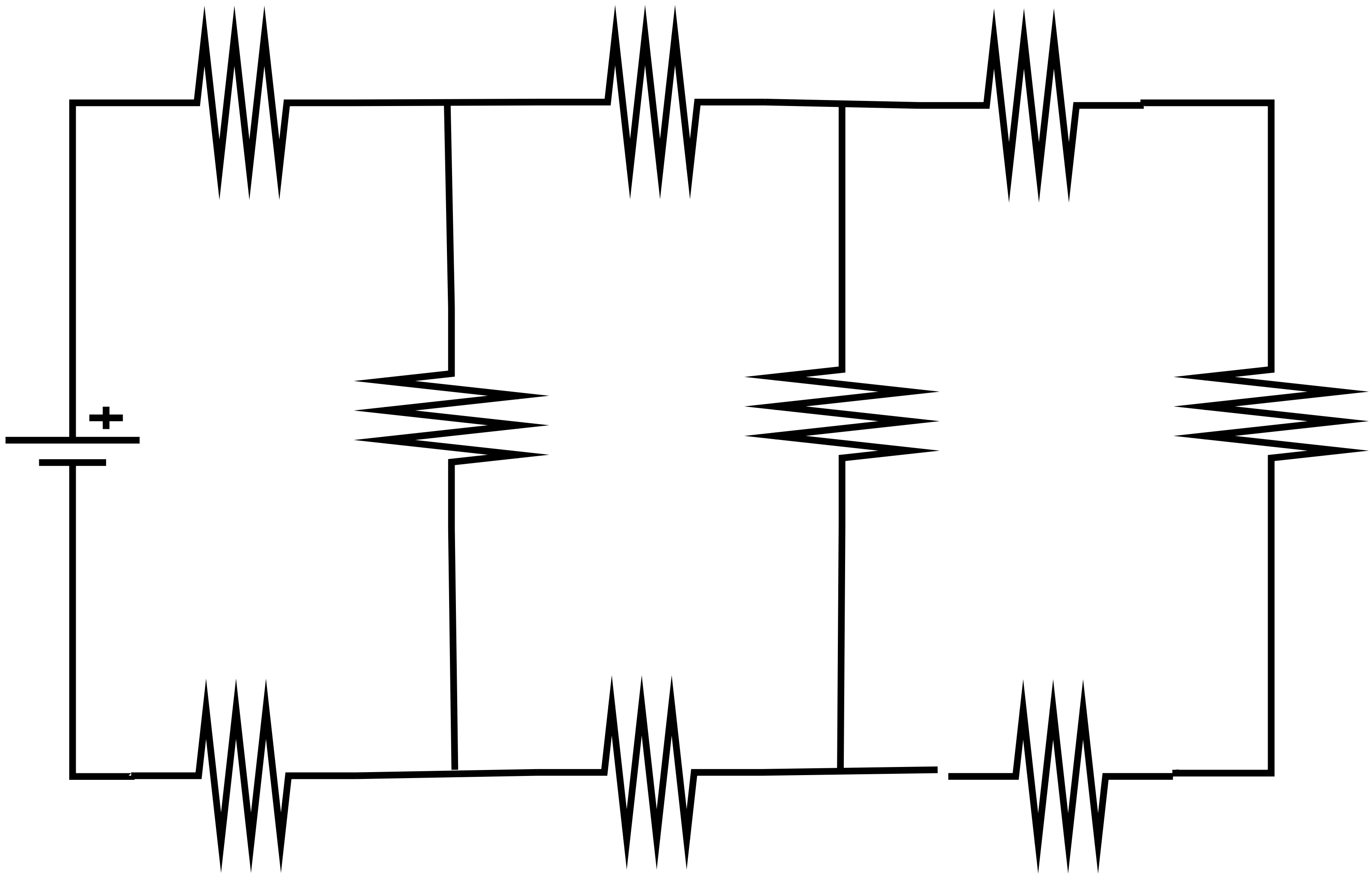
安藤 和敏

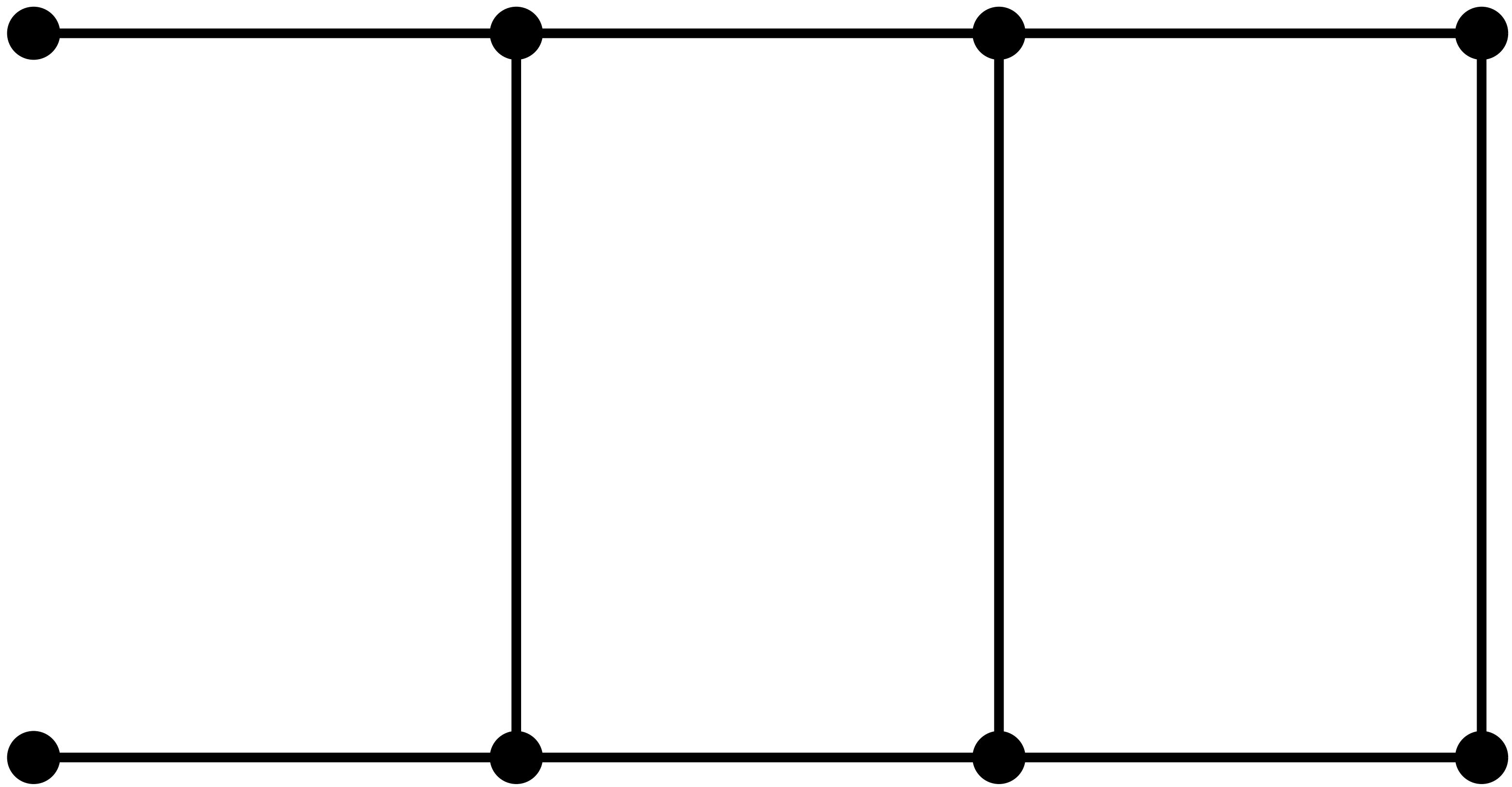
グラフ, ネットワークとは何か?

システムにおける構成要素間の「つながり」を抽象化した概念.

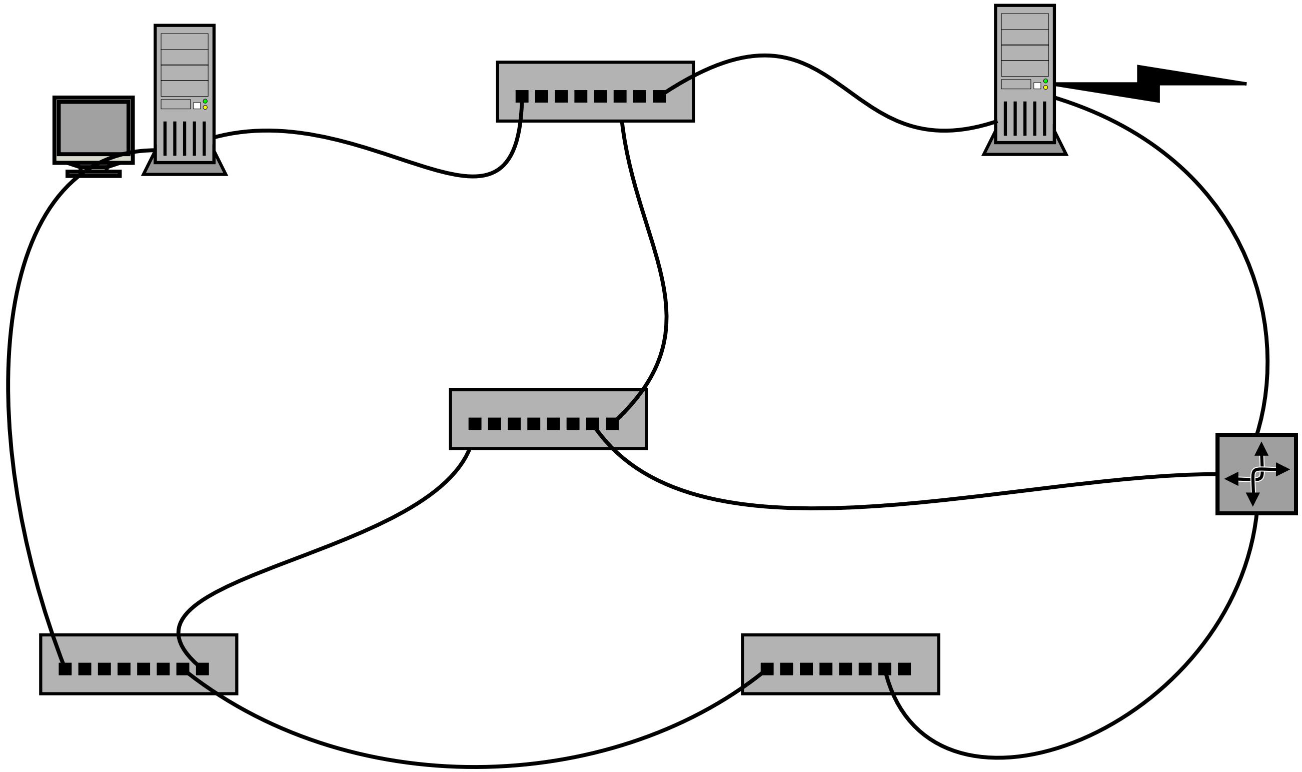


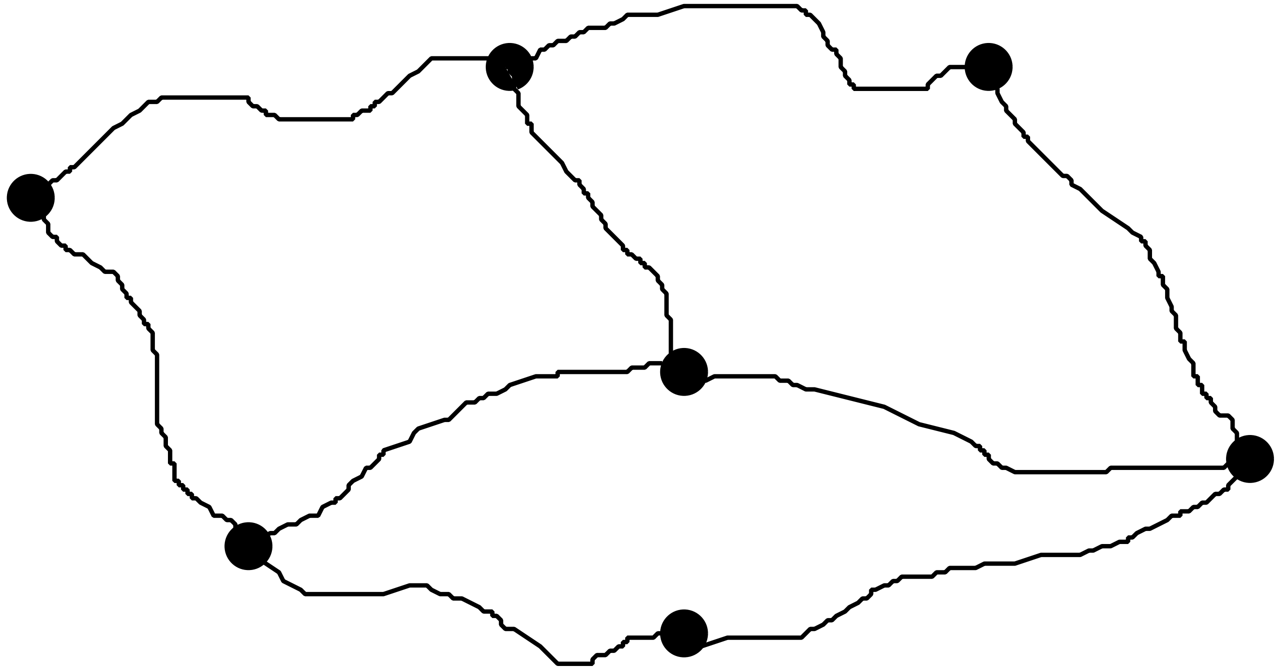
グラフの例 1 (電気回路)





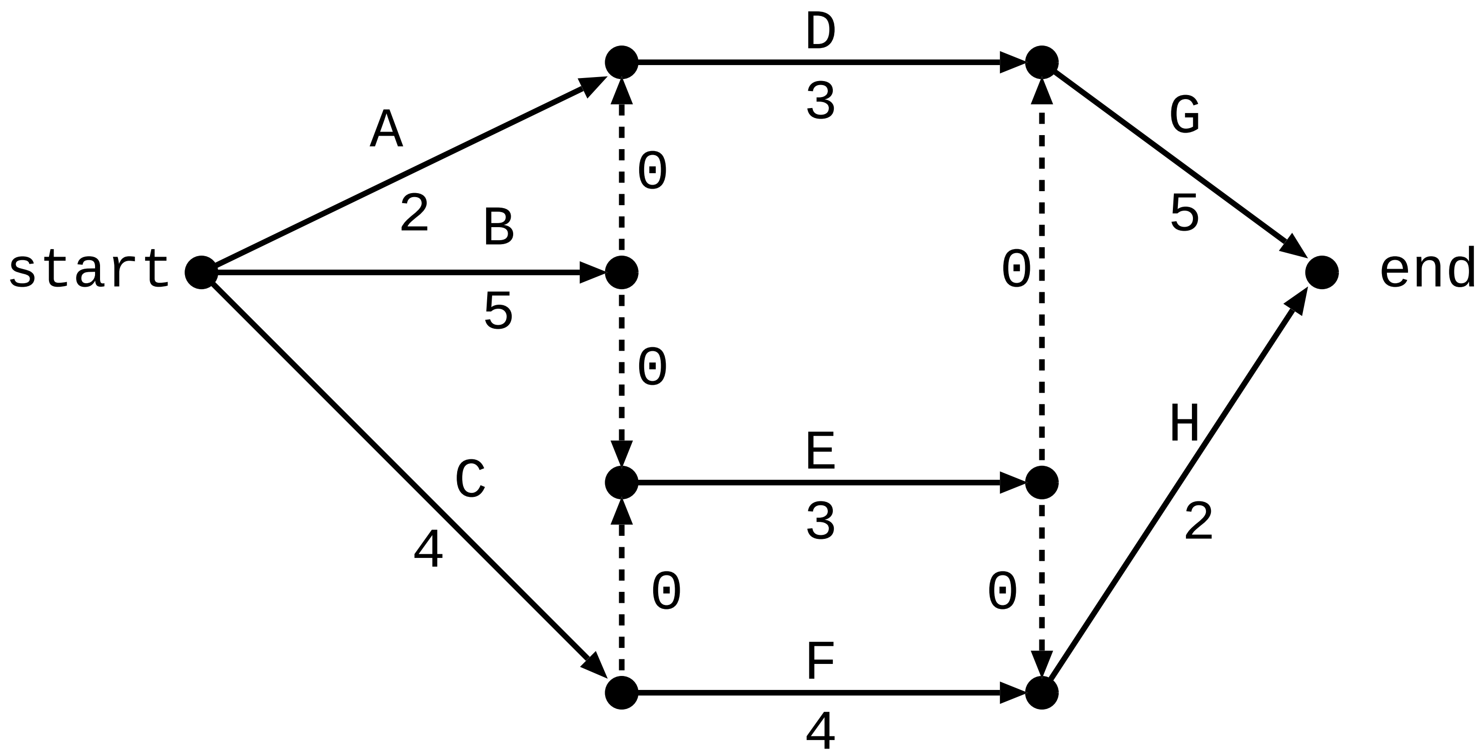
ラフの例2 (コンピュータ・ネットワーク





グラフの例3 (アローダイヤグラム)

作業	処理時間	先行作業
A	2	—
B	5	—
C	4	—
D	3	A,B
E	3	B,C
F	4	C
G	5	D,E
H	2	E,F


start
end
A
2
B
5
C
4
D
3
E
3
F
4
G
5
H
2
0
0
0
0
0

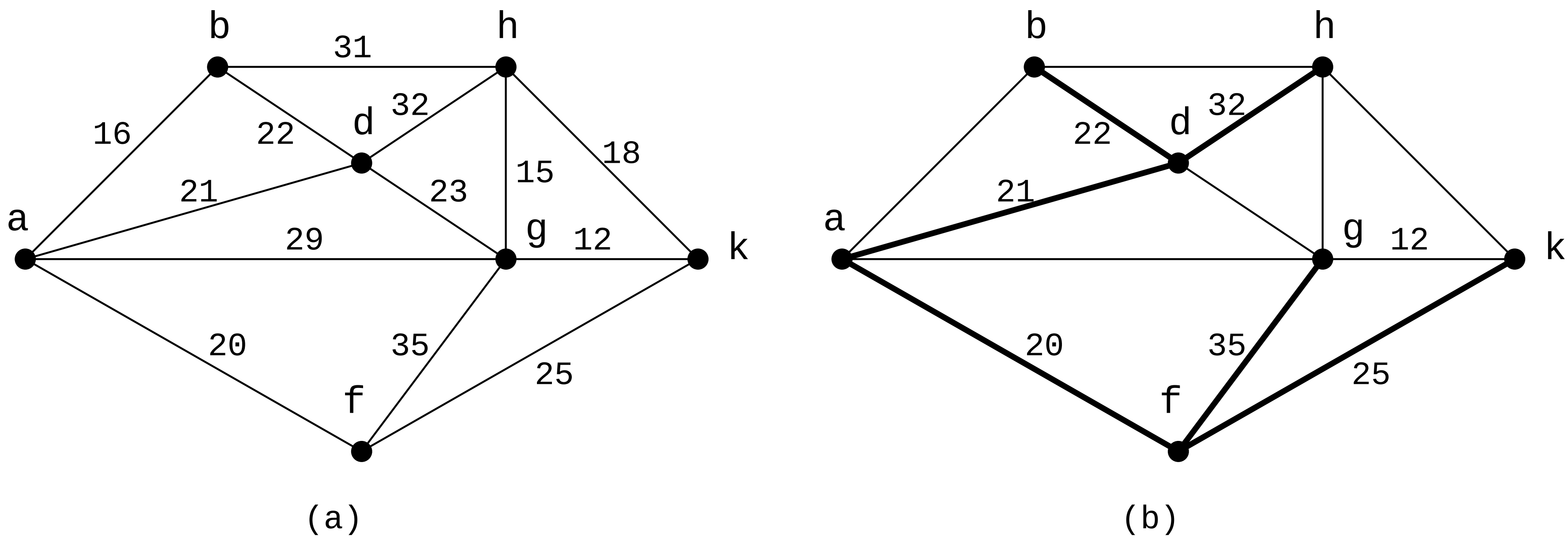
本講義で学べること

グラフについての諸概念を学んだ後, グラフやネットワーク上で定義される以下の問題

- 最小木問題
- 最短路問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

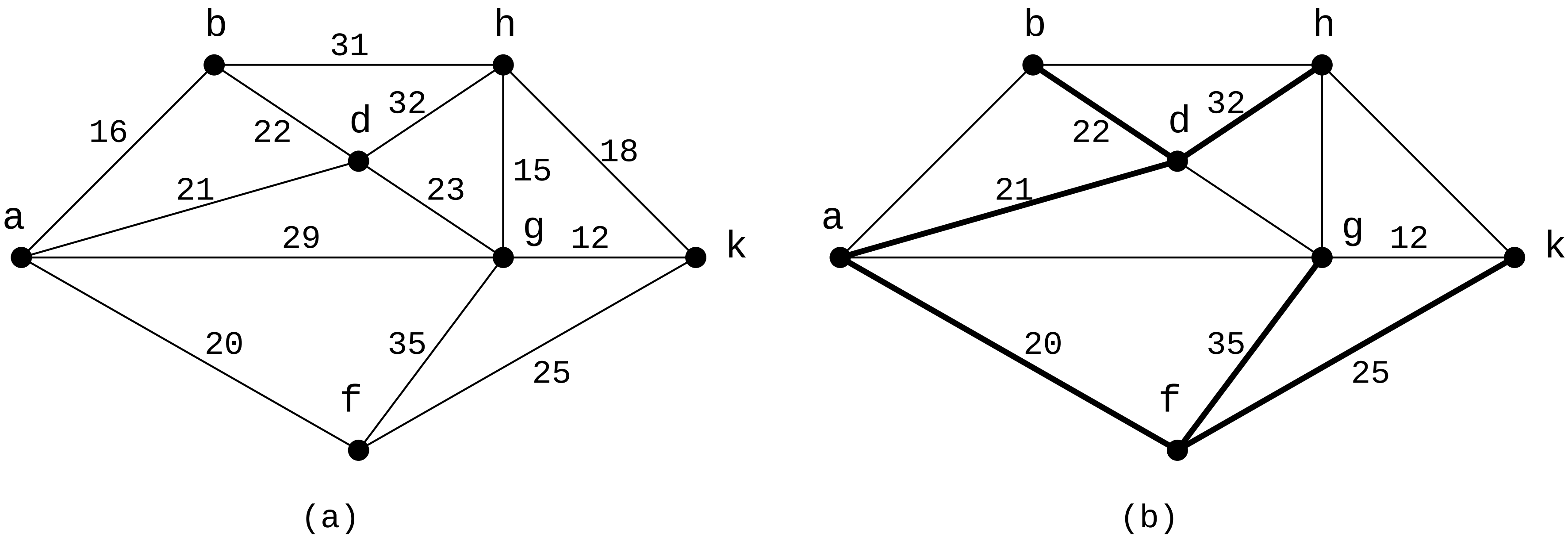
に対するアルゴリズムについて学ぶ.

最小木問題



b
h
31
16
22
d
32
15
18
21
23
a
29
g
12
k
20
35
25
f
(a)
b
h
22
d
32
21
a
g
12
k
20
35
25
f
(b)

木



(a) グラフ G と $w\colon A \to \mathbf{R}$; (b) G の木 T(太字の枝)

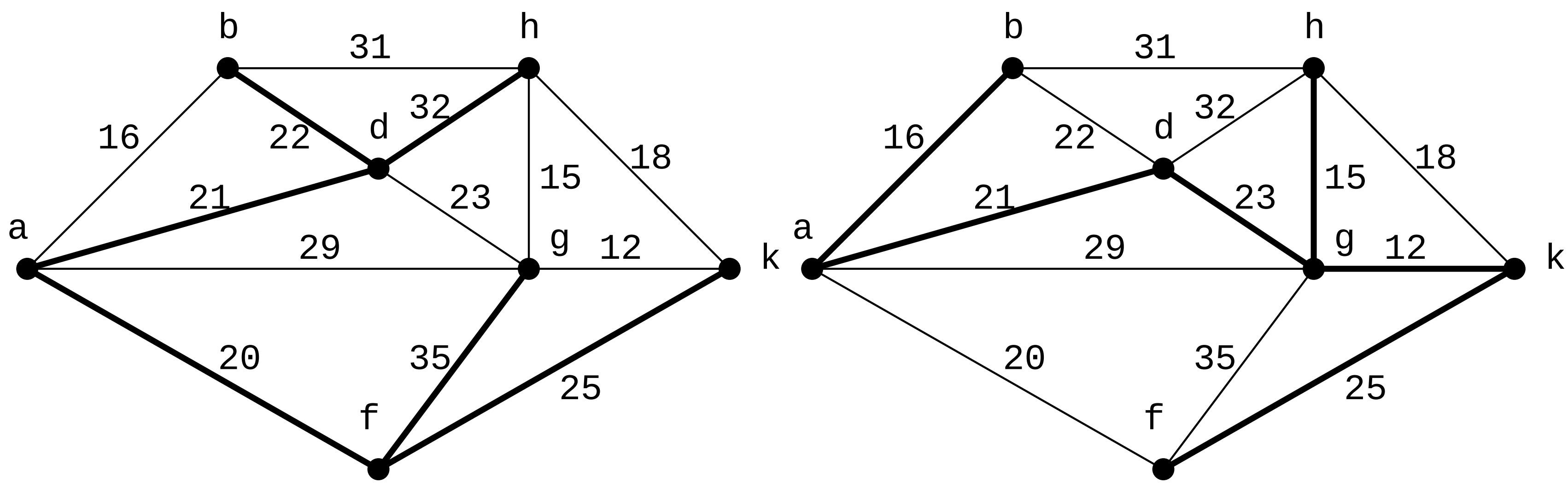
木の重み

グラフ $G = (V, A)$ と枝の重み $w\colon A \to \mathbf{R}$ が与えられているとする. G の木 T に対して,

$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a) \tag{2.1}$$

を木 T の重みという.

木の重み (例)



重み= 155　　　　重み= 112

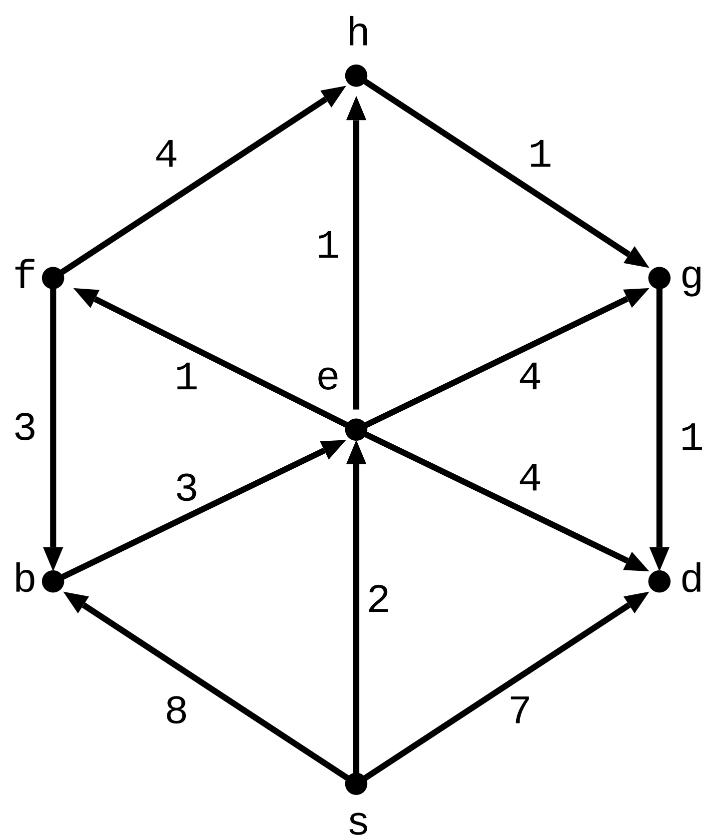
最小木問題

最小木問題とは, 重みが最小である木を見付ける問題である.

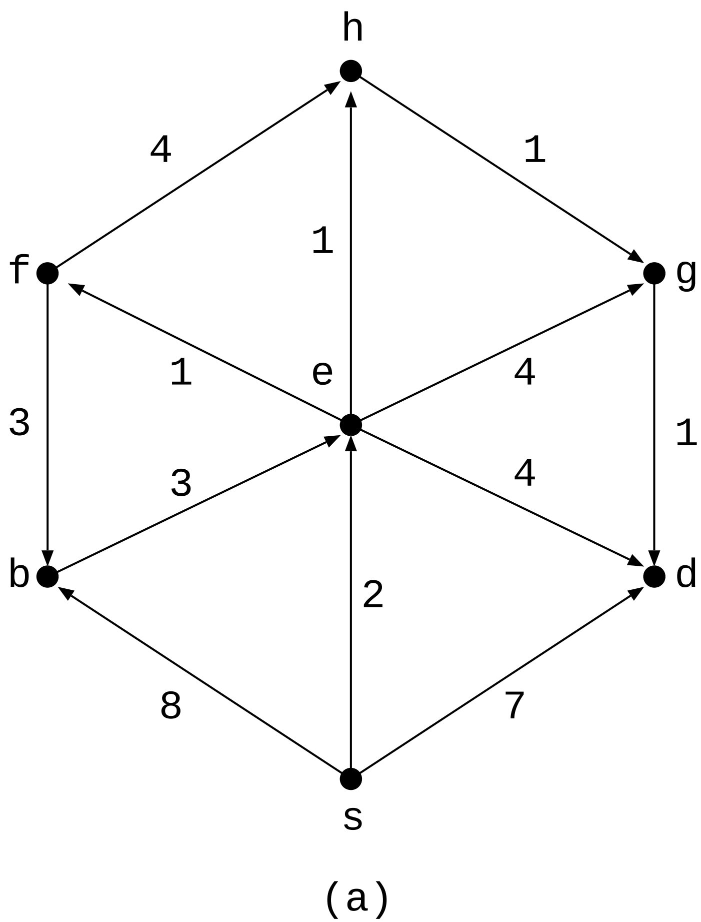
最小木問題を解くためのアルゴリズムには, 貪欲アルゴリズムとヤルニーク-プリムのアルゴリズムが良く知られている.

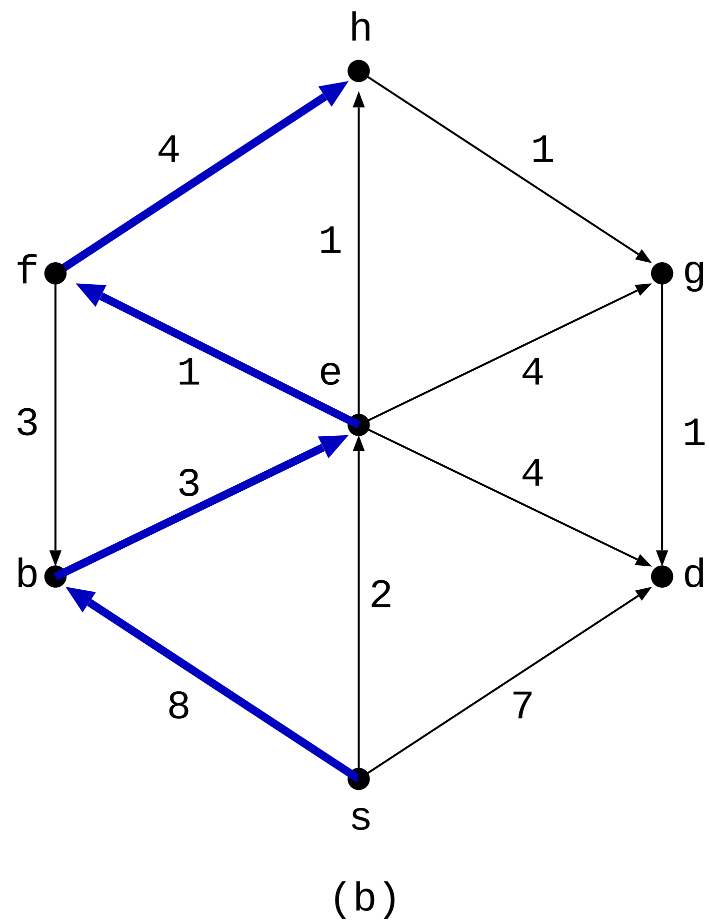
最短路問題

有向グラフ $G = (V, A)$ の各枝 a に対して, その長さ $l(a)$ を指定する関数 $l\colon A \to \mathbf{R}$ が与えられている.



有向道





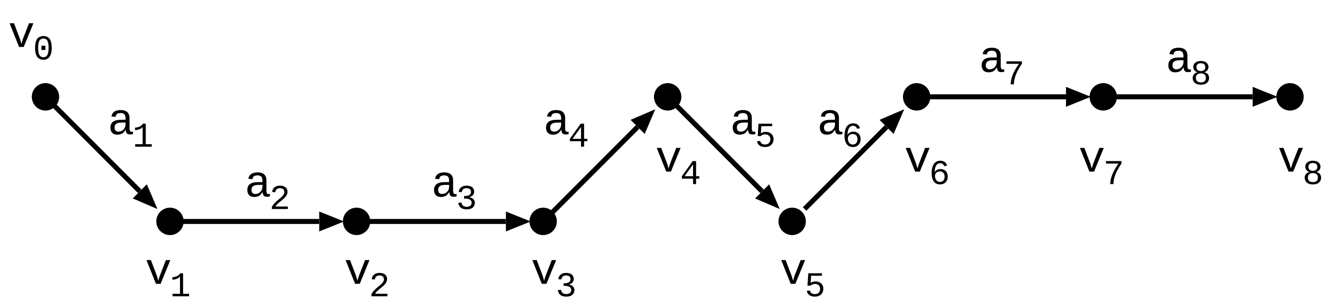
(a) ネットワーク $\mathcal{N}$; (b) $\mathcal{N}$ の s から h への有向道(青い枝)

有向道の長さ

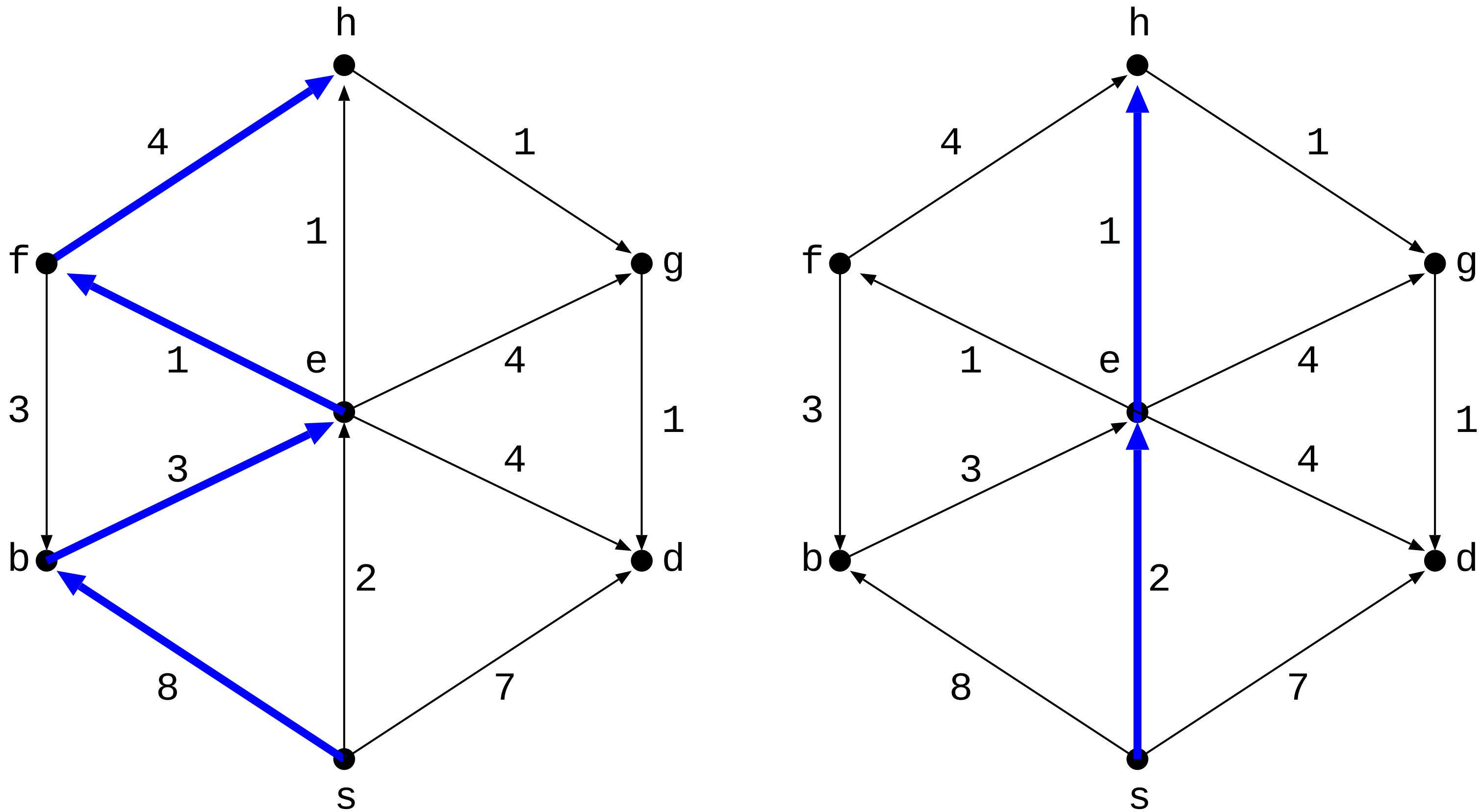
ネットワーク $N = (G = (V, A), l)$ が与えられているとする. G の中の有向道

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \cdots, a_k, v_k)$$

に対して, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} l(a_i)$ を P の長さと呼ぶ.



有向道の長さ (例)



(a) 長さ= 16

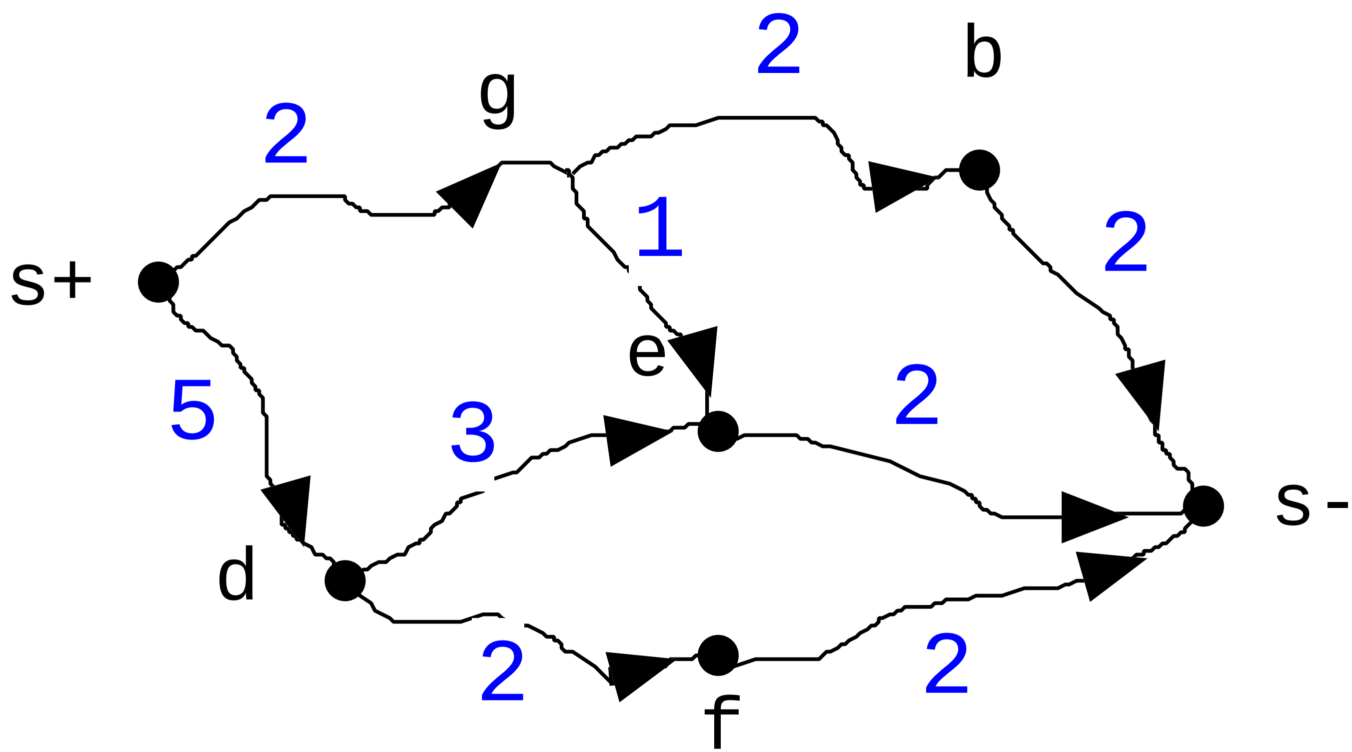
(b) 長さ= 3

最短路問題

最短路問題とは, 与えられた 2 点 $u, v \in V$ に対して, u から v への長さが最小の有向道を見付ける問題である.

最大流問題

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$



ネットワークには, 特別な 2 点: s^+ と s^- がある. さらに, 各枝 $a \in A$ に対して**容量** $c(a)$ が与えられている.

ネットワーク$\mathcal{N}$中のフロー

ネットワーク$\mathcal{N}$中のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数 $\varphi\colon A \to \mathbf{R}$ のことである.

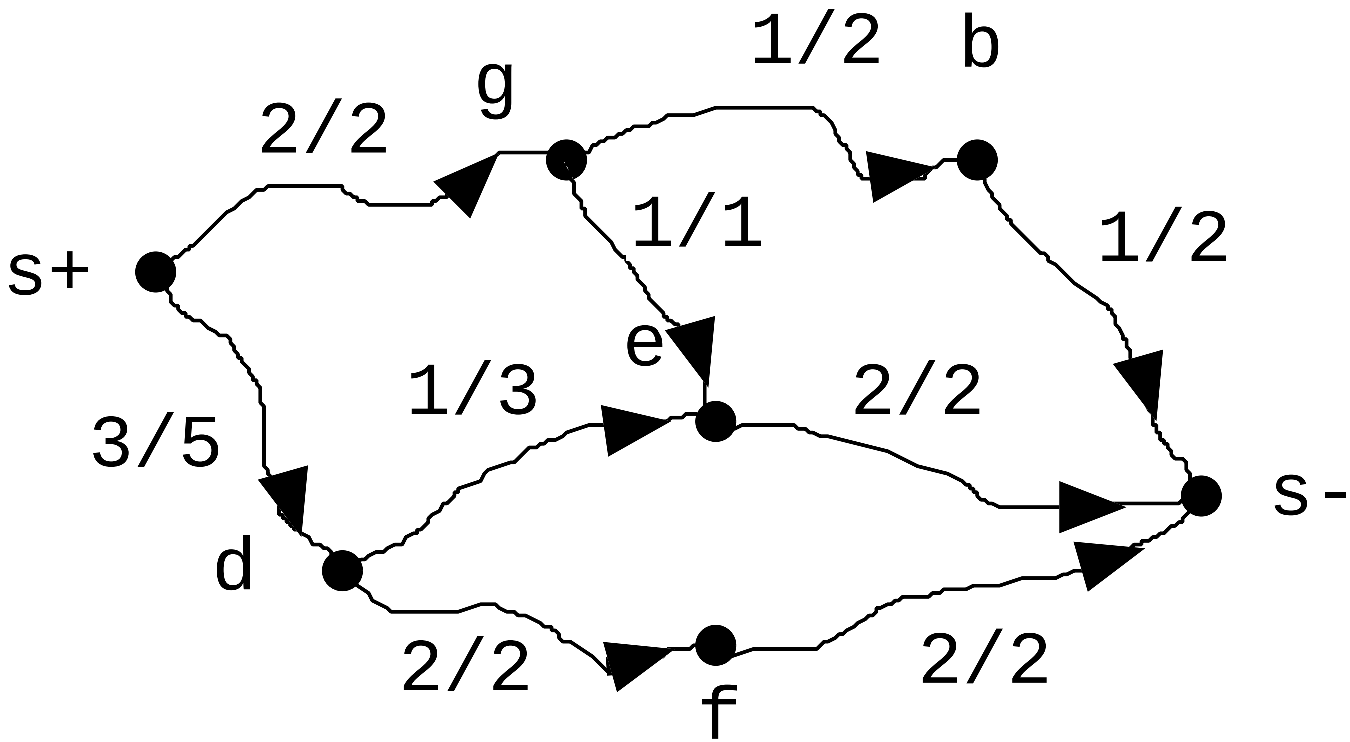
(i) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \tag{2.25}$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点 $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0. \tag{2.26}$$

フローの例



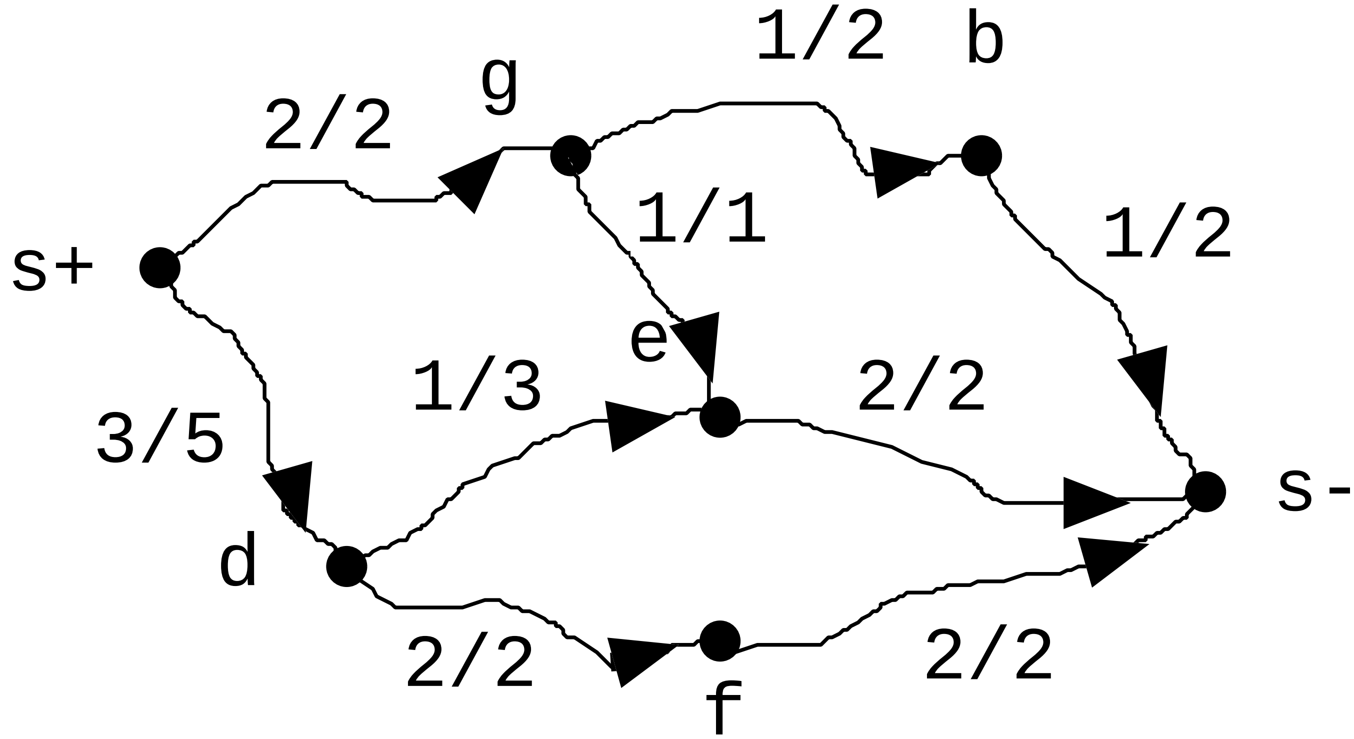
各枝 a に付された数は, $\varphi(a)/c(a)$ を意味する.

フローの流量

流量保存則によって,

$$v^*(\varphi) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a)$$

をフロー φ の流量 (value, flow value) という.

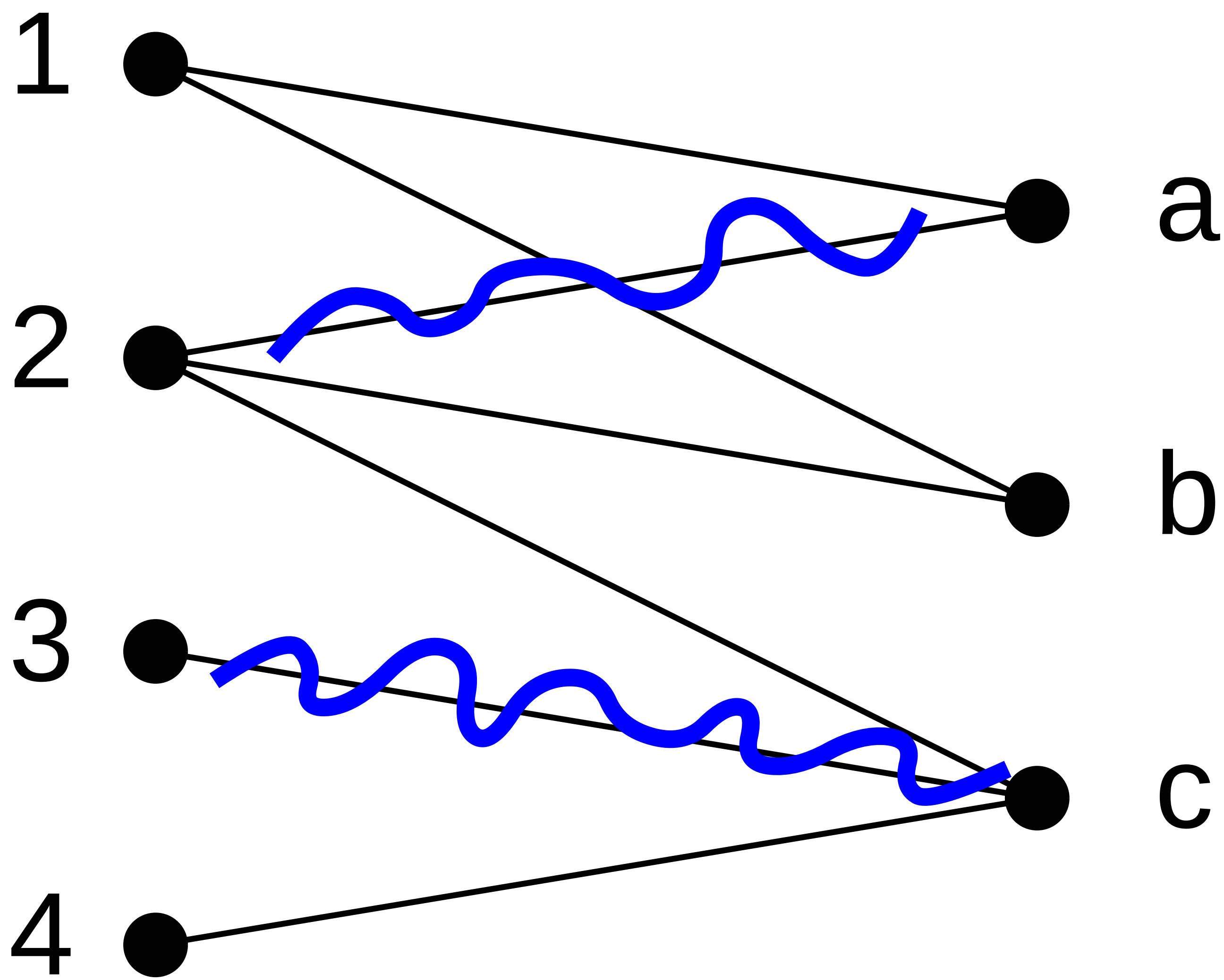


$$v^*(\varphi) = 5.$$

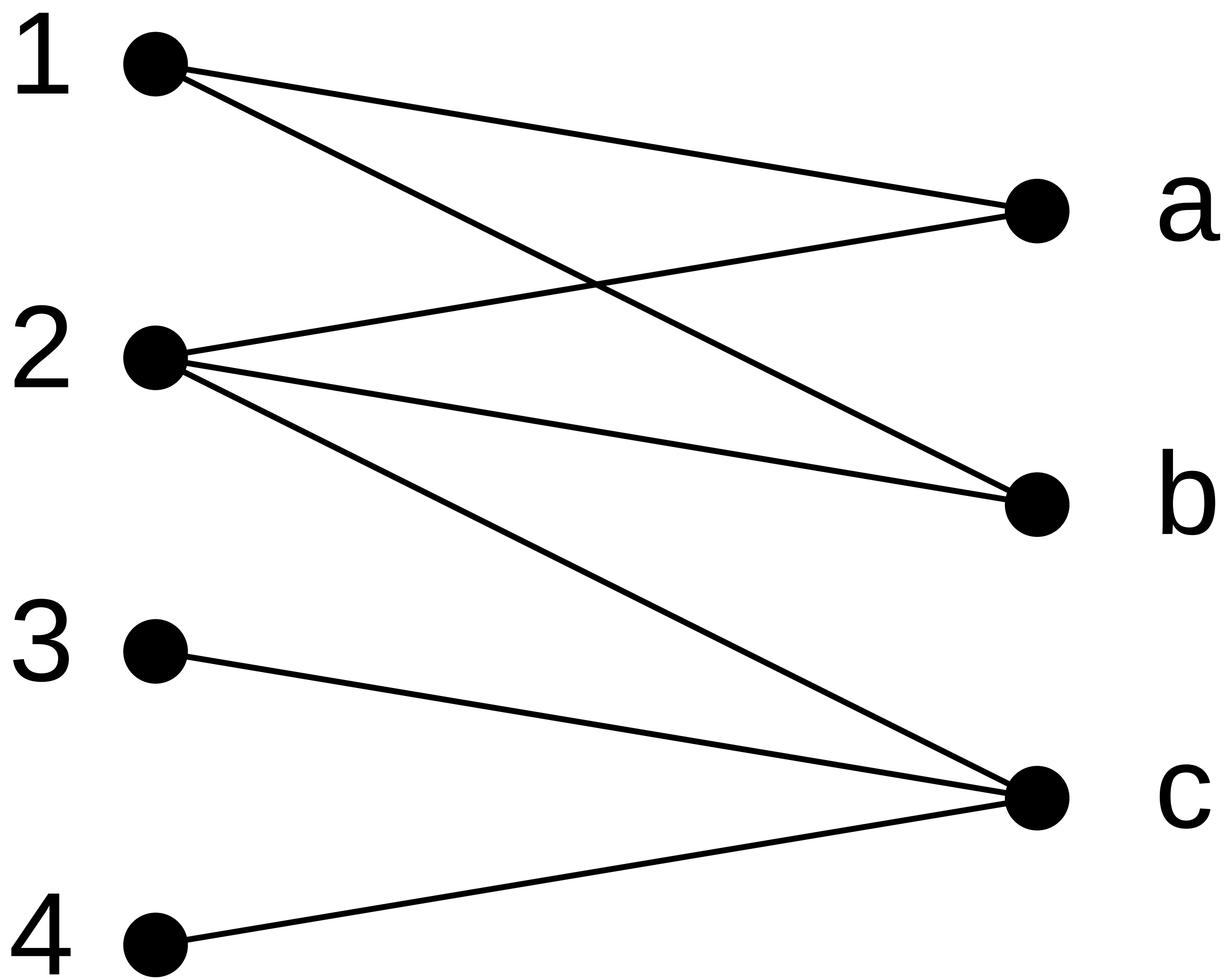
最大流問題

与えられたネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して, $\mathcal{N}$ 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び, 最大フローを求める問題を最大フロー問題 (maximum flow problem) と呼ぶ.

最大マッチング問題

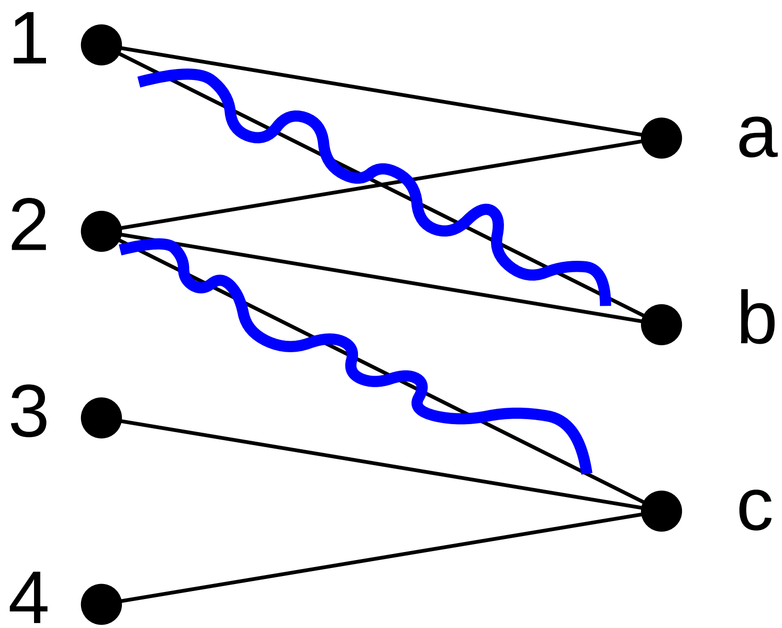


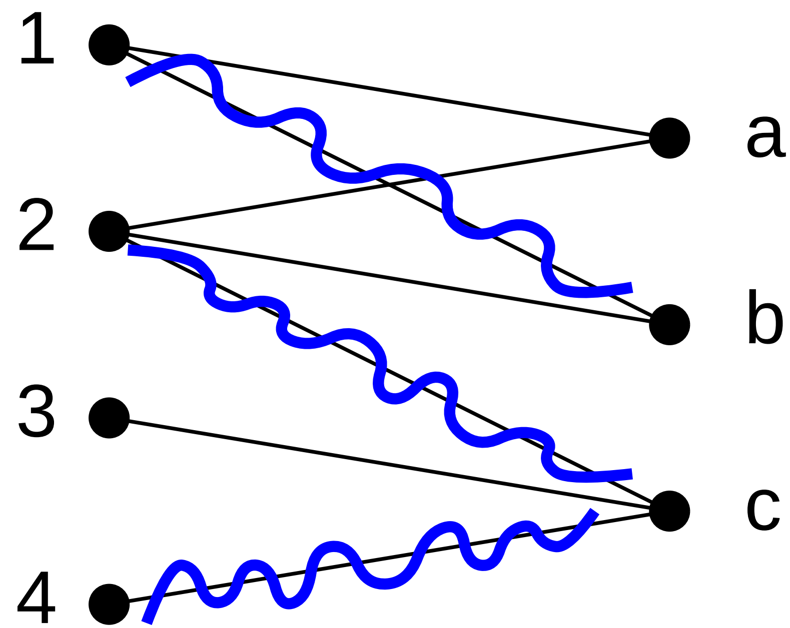
2部グラフ G



マッチング

枝の部分集合 M は, M のどの２本の枝も点を共有しないとき, G のマッチングと呼ばれる.





M (青い枝たち) は G のマッチング

この M (青い枝たち) は, G のマッチングではない

最大マッチング問題

枝の本数 $|M|$ が最大の G のマッチングを**最大マッチング**と呼び, 最大マッチングを求める問題を**最大マッチング問題**と呼ぶ.

テキスト

藤重悟: グラフ・ネットワーク・組合せ論. 共立出版, 2002 年.