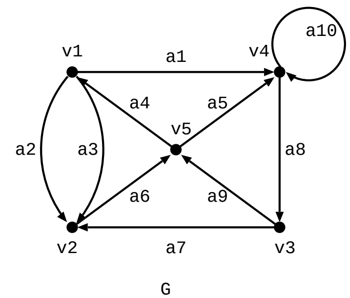
グラフとネットワーク (第1回)

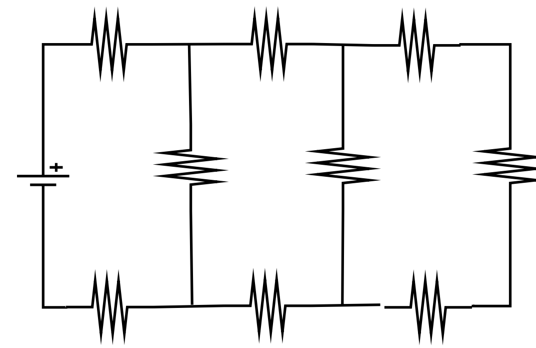
静岡大学システム工学科
安藤 和敏

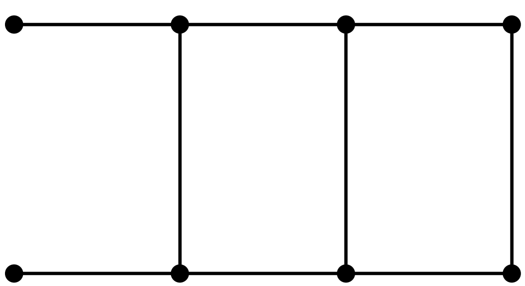
グラフ, ネットワークとは何か?

システムにおける構成要素間の「つながり」を抽象化した概念.

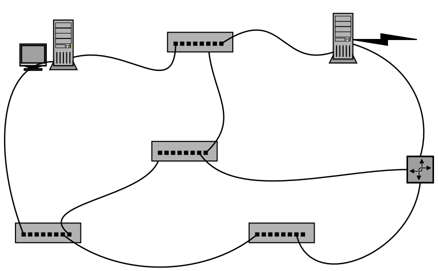


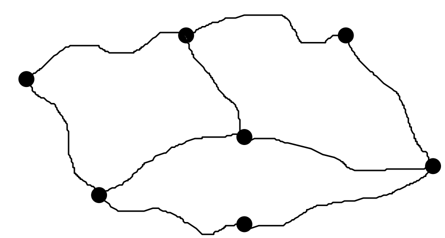
グラフの例1 (電気回路)





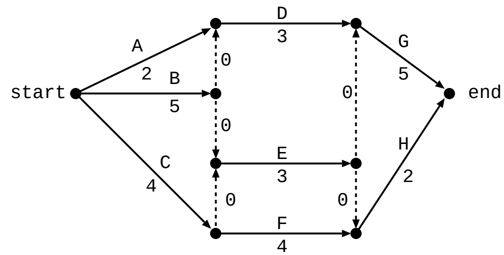
グラフの例2 (コンピュータ・ネットワーク)





ラフの例3 (アローダイヤグラム)

作業	処理時間	先行作業
A	2	—
B	5	—
C	4	—
D	3	A,B
E	3	B,C
F	4	C
G	5	D,E
H	2	E,F



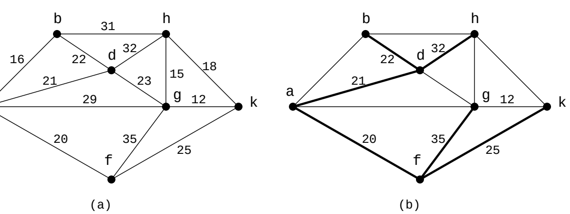
本講義で学べること

グラフについての諸概念を学んだ後, グラフ
ネットワーク上で定義される以下の問題

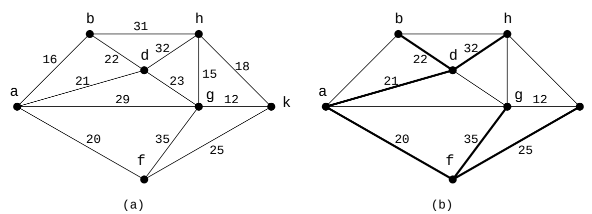
- 最小木問題
- 最短路問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

に対するアルゴリズムについて学ぶ.

最小木問題



木



(a) グラフ G と $w\colon A \to \mathbf{R}$; (b) G の木 T(太字の枝)

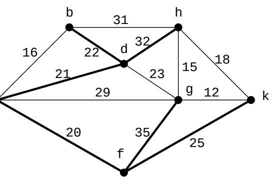
木の重み

グラフ $G = (V, A)$ と枝の重み $w\colon A \to \mathbf{R}$ が
えられているとする. G の木 T に対して,

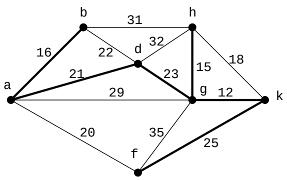
$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a) \qquad (2$$

を木 T の重みという.

木の重み (例)



重み= 155



重み= 112

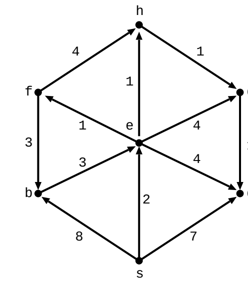
最小木問題

最小木問題とは, 重みが最小である木を見付ける問題である.

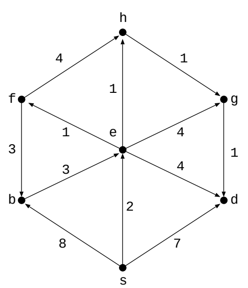
最小木問題を解くためのアルゴリズムには, 貪欲アルゴリズムとヤルニーク-プリムのアルゴリズムが良く知られている.

最短路問題

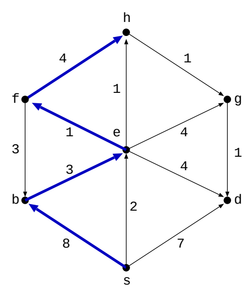
有向グラフ $G = (V, A)$ の各枝 a に対して, そ
長さ $l(a)$ を指定する関数 $l\colon A \to \mathbf{R}$ が与えら
ている.



有向道



(a)



(b)

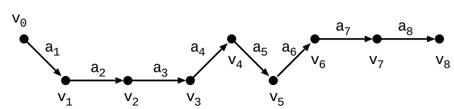
) ネットワーク $\mathcal{N}$; (b) $\mathcal{N}$ の s から h への有向道 (青い枝)

有向道の長さ

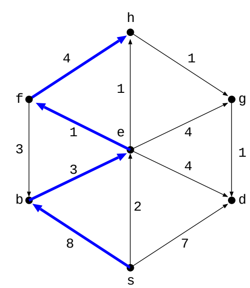
ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), l)$ が与えられているとする. G の中の有向道

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \cdots, a_k, v_k)$$

に対して, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} l(a_i)$ を P の長さと呼ぶ.

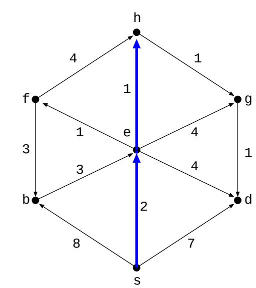


有向道の長さ (例)



(a)

長さ= 16



(b)

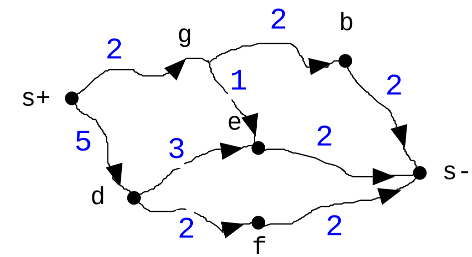
長さ= 3

最短路問題

短路問題とは, 与えられた 2 点 $u, v \in V$ に対
て, u から v への長さが最小の有向道を見付け
問題である.

最大流問題

ネットワーク$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s$



ネットワークには, 特別な 2 点: s^+ と s^- が
る. さらに, 各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ が
えられている.

ネットワーク$\mathcal{N}$中のフロー

ットワーク $\mathcal{N}$ 中のフロー (flow) とは, つぎの
,(ii) を満足する枝集合上の実数値関数
$A \to \mathbf{R}$ のことである.

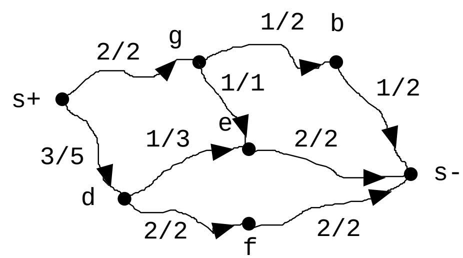
) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \qquad (2.25)$$

) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点
$v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0. \qquad (2.26)$$

フローの例



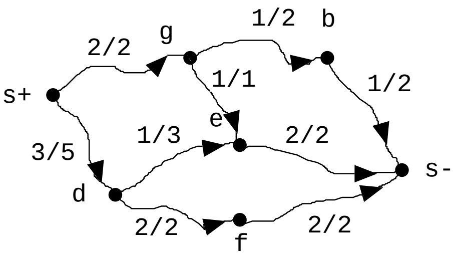
各枝 a に付された数は, $\varphi(a)/c(a)$ を意味する.

フローの流量

流量保存則によって,

$$v^*(\varphi) = \sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a)$$

をフロー φ の流量 (value, flow value) という

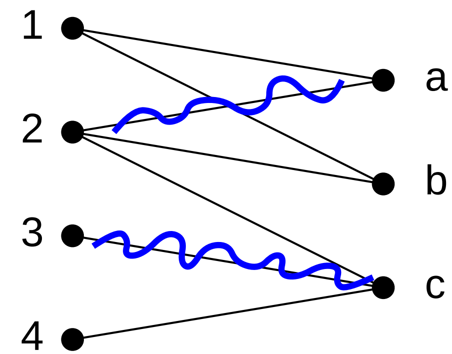


$v^*(\varphi) = 5.$

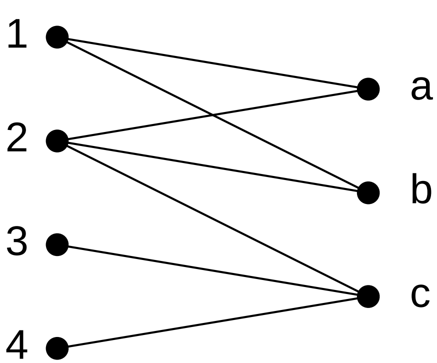
最大流問題

与えられたネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して, $\mathcal{N}$ 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び, 最大フローを求める問題を最大フロー問題 (maximum flow problem) と呼ぶ.

最大マッチング問題

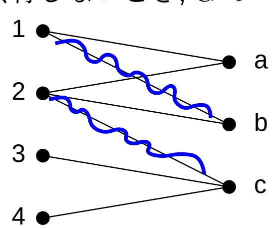


2部グラフ G

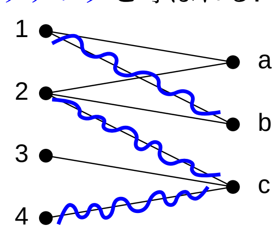


マッチング

枝の部分集合 M は, M のどの2本の枝も点を共有しないとき, G のマッチングと呼ばれる.



M (青い枝たち) は G のマッチング



この M (青い枝たち) は, G のマッチングではない

最大マッチング問題

枝の本数 $|M|$ が最大の G のマッチングを最大マ
チングと呼び, 最大マッチングを求める問題を
大マッチング問題と呼ぶ.

テキスト

重悟: グラフ・ネットワーク・組合せ論. 共立
版, 2002 年.