# グラフとネットワーク(第2回)

安藤和敏

2005.10.13

## 1.1.　グラフの定義

### 1.1.1.　グラフの定義

　一つのグラフは, 以下の述べる4つの構成要素からなる.

(1) 集合 $V$,

(2) 集合 $A$,

(3) 写像 $\partial^+ \colon A \to V$,

(4) 写像 $\partial^- \colon A \to V$

これを合わせて, グラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ と書く. 誤解のおそれがないときは, $G = (V, A)$ と書く.
　$V$ を**点集合**と呼び. $V$ の要素は**点**と呼ばれる.
$A$ を**枝集合**と呼び. $A$ の要素は**枝**と呼ばれる.
枝 $a \in A$ に対して, $\partial^+ a$ を, $a$ の**始点**と呼び, $\partial^- a$ を $a$ の**終点**と呼ぶ.

### 1.1.2.　グラフの幾何学的表現

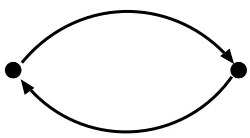
　グラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ が与えられたとき, 各枝 $a \in A$ に対して下図のように, $\partial^+ a$ から $\partial^- a$ にむかう矢線を描く. こうして得られる線図をグラフ $G$ の**幾何学的表現**と呼ぶ.

$$\partial^+ a \bullet \xrightarrow{\qquad a \qquad} \bullet\, \partial^- a$$

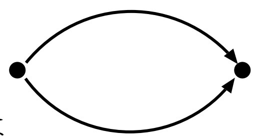
### 1.1.3.　有向グラフと無向グラフ

### 1.1.4.　単純なグラフ

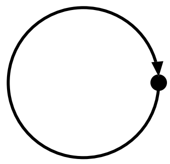
　2つの枝 $a_1, a_2 \in A$ は, もし $\{\partial^+ a_1, \partial^- a_1\} = \{\partial^+ a_2, \partial^- a_2\}$ のとき, **並列枝**と呼ばれる.



あるいは



枝 $a \in A$ は, $\partial^+ a = \partial^- a$ のとき, **自己閉路**と呼ばれる.



並列枝も自己閉路もないグラフを**単純な**グラフという.

### 1.1.5. 次数

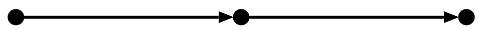
$v \in V$ に対して,

$$\begin{aligned}\delta^+ v &= \{a \mid a \in A, \partial^+ a = v\} = v \text{ から出る枝の全体},\\ \delta^- v &= \{a \mid a \in A, \partial^- a = v\} = v \text{ に入る枝の全体}\end{aligned}$$

と書く. $|\delta^+ v|$ を $v$ の**正の次数** (あるいは, **出次数**) と呼んで, $|\delta^- v|$ を $v$ の**負の次数** (あるいは, **入次数**) と呼ぶ. さらに, $|\delta^+ v| + |\delta^- v|$ を $v$ の**次数**と呼ぶ.

### 1.1.6. 雑多な定義

**直列枝**



**孤立点**

全ての点の次数が一定値 $k$ に等しいとグラフを **$k$-正則グラフ**と呼ぶ. $k$ を陽に示さないときは, 単に**正則グラフ**と呼ぶ.

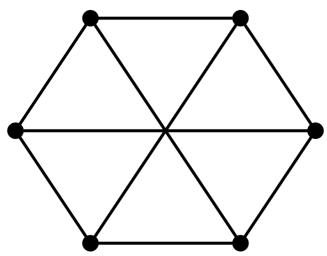


図 1.1: 3-正則グラフ

### 1.1.7. グラフの変形

開放除去と短絡除去

### 1.1.8. 部分グラフ

$G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ をグラフとする. グラフ $G_0$ は, もし $G$ からいくつかの枝を開放除去し, さらにいくつかの孤立点を除去して得られるグラフであるときに, $G$ の**部分グラフ**であるという.

例えば, 例 1.1 のグラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ は,
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ で, $\partial^+$ と $\partial^-$ は以下のように与えられる.

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\partial^+$ | $v_1$ | $v_1$ | $v_1$ | $v_5$ | $v_5$ | $v_5$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_3$ | $v_4$ |
| $\partial^-$ | $v_4$ | $v_2$ | $v_2$ | $v_1$ | $v_4$ | $v_2$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_5$ | $v_4$ |

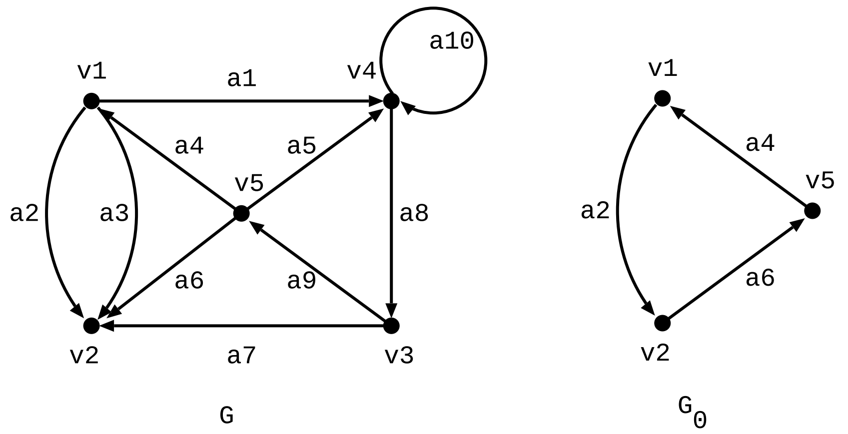



図 1.2: グラフ $G$ (左) とその部分グラフ $G_0$ (右)

$G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ として, $U = \{v_1, v_2, v_5\}$,$B = \{a_2, a_4, a_6\}$,

| | $a_2$ | $a_4$ | $a_6$ |
|---|---|---|---|
| $\partial_0^+$ | $v_1$ | $v_5$ | $v_2$ |
| $\partial_0^-$ | $v_2$ | $v_1$ | $v_5$ |

を考えると, $G_0$ は $G$ の部分グラフである.

$G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ が $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ の部分グラフで, かつ, $U = V$ であるとき, $G_0$ は $G$ を**張る**といい, $G_0$ を $G$ の**全域部分グラフ**と呼ぶ.

点部分集合 $U \subseteq V$ に対して,

$$A(U) = \{a \mid a \in A, \partial^+ a \in U, \partial^- a \in U\}$$

とする. このとき, グラフ $G(U) = (U, A(U))$ を, 点集合 $U$ によって**誘導される部分グラフ**, あるいは, 点集合 $U$ に関する**誘導部分グラフ**と呼ぶ.

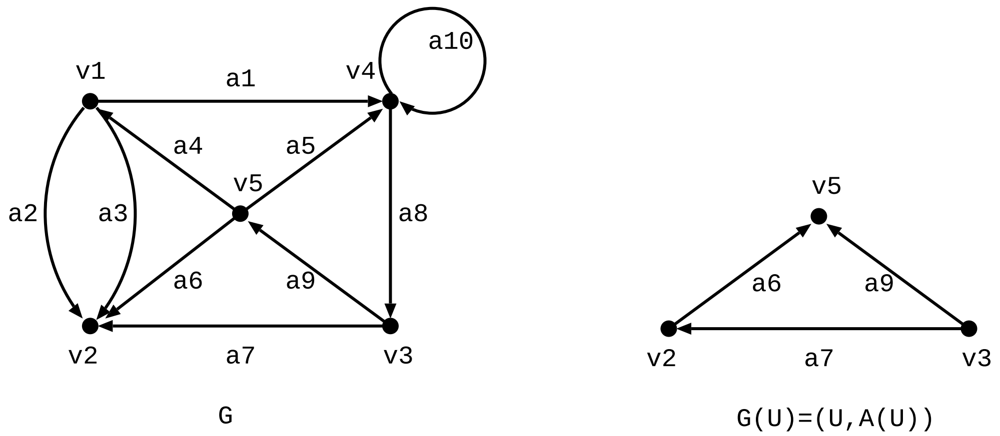



図 1.3: グラフ $G$ (左) から $U = \{v_2, v_3, v_5\}$ によって誘導される部分グラフ $G(U)$ (右)