

u_1		w_2	w_4	w_1	w_3		w_1	u_2	u_4	u_1	u_3
u_2		w_3	w_1	w_4	w_2		w_2	u_3	u_1	u_4	u_2
u_3		w_2	w_3	w_1	w_4		w_3	u_2	u_3	u_1	u_4
u_4		w_4	w_1	w_3	w_2		w_4	u_4	u_1	u_3	u_2
		男性の選好リスト					女性の選好リスト				

図 1.3: マッチングの表現

て、以下の3つの条件をすべて満たすペア (u, w) はマッチング M をブロックしていると表現し、ブロッキングペアとよばれる。

- (1) u と w は M においてパートナーではない。
- (2) u は $p_M(u)$ よりも w を好む。
- (3) w は $p_M(w)$ よりも u を好む。

ブロッキングペアが存在しないマッチングを安定マッチング、存在するマッチングを不安定マッチングという。(このようなペア (u, w) がマッチングに存在するとき、 u と w は現在のパートナーを裏切って駆け落ちする可能性がある。) 安定結婚問題とは、安定マッチングを見出す問題である。

あるマッチングが安定かどうかを判定するには、マッチングに含まれていない全てのペアを調べて、それがブロッキングペアになっているかどうかを調べればよい。図 1.3 で示されるマッチングは不安定である。なぜなら、 (u_3, w_2) がこのマッチングに対してブロッキングペアになっているからである。一方で、図 1.4 に示したマッチング $\{(u_1, w_4), (u_2, w_3), (u_3, w_2), (u_4, w_1)\}$ は安定である。

u_1		w_2	w_4	w_1	w_3		w_1	u_2	u_4	u_1	u_3
u_2		w_3	w_1	w_4	w_2		w_2	u_3	u_1	u_4	u_2
u_3		w_2	w_3	w_1	w_4		w_3	u_2	u_3	u_1	u_4
u_4		w_4	w_1	w_3	w_2		w_4	u_4	u_1	u_3	u_2
		男性の選好リスト					女性の選好リスト				

図 1.4: 安定マッチング

2. ゲイル-シャプレイのアルゴリズム

2.1. 男性指向バージョン

Gale and Shapley [1] は、安定結婚問題を解くためのアルゴリズムを与えた。

最初に、ゲイル-シャプレイのアルゴリズムの男性指向バージョンを示す。男性指向バージョンは、男性を求婚者とし、男性から女性へのプロポーズの連続によって表現されている。アルゴリズム実行中のどの時でも、各人は婚約しているか、フリーであるかのどちらかである。

ゲイル-シャプレイのアルゴリズム (男性指向バージョン)

Step 1: まず, 全員がフリーである状態にする.

Step 2: フリーな男性が存在する限り, 以下の操作を繰り返し実行する.

(2-1) u をフリーな男性とする.

(2-2) w を, u がまだプロポーズしていない女性の中で最上位の女性とする.

(2-3) もし w がフリーならば, u と w を婚約させる.

そうでないならば, u と w の現在の婚約者 u' のうち, w が好きな方と w を婚約させ, そうでない方をフリーにする.

Step 3: n 組のペアで構成されたマッチングを出力する.

アルゴリズムの Step (2-1) で, プロポーズする男性の順番は結果には影響しない.

例 2.1: 以下の図 2.1 はサイズ 8 の問題例である. この問題例に対して, ゲイル-シャプレイのアル

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">男性の選好リスト</p>	u_1	w_5	w_7	w_1	w_2	w_6	w_8	w_4	w_3	u_2	w_2	w_3	w_7	w_5	w_4	w_1	w_8	w_6	u_3	w_8	w_5	w_1	w_4	w_6	w_2	w_3	w_7	u_4	w_3	w_2	w_7	w_4	w_1	w_6	w_8	w_5	u_5	w_7	w_2	w_5	w_1	w_3	w_6	w_8	w_4	u_6	w_1	w_6	w_7	w_5	w_8	w_4	w_2	w_3	u_7	w_2	w_5	w_7	w_6	w_3	w_4	w_8	w_1	u_8	w_3	w_8	w_4	w_5	w_7	w_2	w_6	w_1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_8</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">女性の選好リスト</p>	w_1	u_5	u_3	u_7	u_6	u_1	u_2	u_8	u_4	w_2	u_8	u_6	u_3	u_5	u_7	u_2	u_1	u_4	w_3	u_1	u_5	u_6	u_2	u_4	u_8	u_7	u_3	w_4	u_8	u_7	u_3	u_2	u_4	u_1	u_5	u_6	w_5	u_6	u_4	u_7	u_3	u_8	u_1	u_2	u_5	w_6	u_2	u_8	u_5	u_3	u_4	u_6	u_7	u_1	w_7	u_7	u_5	u_2	u_1	u_8	u_6	u_4	u_3	w_8	u_7	u_4	u_1	u_5	u_2	u_3	u_6	u_8
u_1	w_5	w_7	w_1	w_2	w_6	w_8	w_4	w_3																																																																																																																																									
u_2	w_2	w_3	w_7	w_5	w_4	w_1	w_8	w_6																																																																																																																																									
u_3	w_8	w_5	w_1	w_4	w_6	w_2	w_3	w_7																																																																																																																																									
u_4	w_3	w_2	w_7	w_4	w_1	w_6	w_8	w_5																																																																																																																																									
u_5	w_7	w_2	w_5	w_1	w_3	w_6	w_8	w_4																																																																																																																																									
u_6	w_1	w_6	w_7	w_5	w_8	w_4	w_2	w_3																																																																																																																																									
u_7	w_2	w_5	w_7	w_6	w_3	w_4	w_8	w_1																																																																																																																																									
u_8	w_3	w_8	w_4	w_5	w_7	w_2	w_6	w_1																																																																																																																																									
w_1	u_5	u_3	u_7	u_6	u_1	u_2	u_8	u_4																																																																																																																																									
w_2	u_8	u_6	u_3	u_5	u_7	u_2	u_1	u_4																																																																																																																																									
w_3	u_1	u_5	u_6	u_2	u_4	u_8	u_7	u_3																																																																																																																																									
w_4	u_8	u_7	u_3	u_2	u_4	u_1	u_5	u_6																																																																																																																																									
w_5	u_6	u_4	u_7	u_3	u_8	u_1	u_2	u_5																																																																																																																																									
w_6	u_2	u_8	u_5	u_3	u_4	u_6	u_7	u_1																																																																																																																																									
w_7	u_7	u_5	u_2	u_1	u_8	u_6	u_4	u_3																																																																																																																																									
w_8	u_7	u_4	u_1	u_5	u_2	u_3	u_6	u_8																																																																																																																																									

図 2.1: 男性指向バージョンの実行 (板書を見て自分で書き込みなさい)

アルゴリズム (男性指向バージョン) を実行して得られる安定マッチング M_o は

$$M_o = \{(u_1, w_5), (u_2, w_3), (u_3, w_8), (u_4, w_6), (u_5, w_7), (u_6, w_1), (u_7, w_2), (u_8, w_4)\}$$

となる.

男性は, フリーである状態と婚約している状態を交互に繰り返すが, 女性は, 一度婚約してしまうと, その女性の婚約者が変わることはあるが, 再びフリーになることはできない. また, 2 回以上婚約した男性は, 婚約することに好ましくないパートナーを得る一方, 女性は婚約者が変わることにより, より好ましいパートナーを得る.

定理 2.2: 安定結婚問題の任意の問題例に対して Gale-Shapley アルゴリズムは終了し, 終了時に婚約しているペアが安定マッチングを構成する.

(証明) まず, どの男性もすべての女性には拒否されないことを示す. ここで, 女性が現在の婚約を解消したり, プロポーズを受け入れないことを拒否と表す. 女性は婚約している時にだけ拒否することができ, 一度婚約すると再びフリーとなることはない. もし, すべての女性に拒否された男性が存在すると仮定すると, その男性のリストの最下位の女性からの拒否は, すべての女性がすでに婚約していることを意味している. しかし, 男性の数と女性数は同じであり, それぞれただ 1 人のパートナーを持つから, アルゴリズムの終了時には男性は全員婚約していなければならない. こ

れは仮定に矛盾する。また、アルゴリズムのどの反復においてもプロポーズは1回で男性は同じ女性に2度プロポーズすることはないので、サイズ n の問題例に対して、反復の総数は n^2 以下である。したがって、アルゴリズムの停止性が言える。

Gale-Shapley アルゴリズムにが停止したとき婚約しているペアで構成されるマッチングを M とする。男性 u が $p_M(u)$ よりも w の方を好むとすると、アルゴリズム実行中のある時点で w は u を拒否してはならない。しかし、この拒否は、 w が u よりも好ましい男性と婚約しているか、または婚約するということに発生し、次に w の婚約者が変わるということは w にとってより良いパートナーをもたらす。よって、 w は $p_M(w)$ よりも u を好むことはありえないので、 (u, w) は M をブロックしえない。よって、 M にはブロッキングペアが存在しないので、マッチング M は安定である。□

2.2. 女性指向バージョン

男性指向バージョンでは、男性から女性へプロポーズを繰り返したが、反対に女性から男性にプロポーズをしても、安定マッチングが得られる。

例 2.3: 以下の図 2.2 は、例 2.1 と同じ問題例である。アルゴリズムが終了したときに得られるマッ

<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">w_1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">男性の選好リスト</p>	u_1	w_5	w_7	w_1	w_2	w_6	w_8	w_4	w_3	u_2	w_2	w_3	w_7	w_5	w_4	w_1	w_8	w_6	u_3	w_8	w_5	w_1	w_4	w_6	w_2	w_3	w_7	u_4	w_3	w_2	w_7	w_4	w_1	w_6	w_8	w_5	u_5	w_7	w_2	w_5	w_1	w_3	w_6	w_8	w_4	u_6	w_1	w_6	w_7	w_5	w_8	w_4	w_2	w_3	u_7	w_2	w_5	w_7	w_6	w_3	w_4	w_8	w_1	u_8	w_3	w_8	w_4	w_5	w_7	w_2	w_6	w_1	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_2</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_3</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_4</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_5</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_6</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_7</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_8</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">w_8</td><td style="padding: 2px;">u_7</td><td style="padding: 2px;">u_4</td><td style="padding: 2px;">u_1</td><td style="padding: 2px;">u_5</td><td style="padding: 2px;">u_2</td><td style="padding: 2px;">u_3</td><td style="padding: 2px;">u_6</td><td style="padding: 2px;">u_8</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">女性の選好リスト</p>	w_1	u_5	u_3	u_7	u_6	u_1	u_2	u_8	u_4	w_2	u_8	u_6	u_3	u_5	u_7	u_2	u_1	u_4	w_3	u_1	u_5	u_6	u_2	u_4	u_8	u_7	u_3	w_4	u_8	u_7	u_3	u_2	u_4	u_1	u_5	u_6	w_5	u_6	u_4	u_7	u_3	u_8	u_1	u_2	u_5	w_6	u_2	u_8	u_5	u_3	u_4	u_6	u_7	u_1	w_7	u_7	u_5	u_2	u_1	u_8	u_6	u_4	u_3	w_8	u_7	u_4	u_1	u_5	u_2	u_3	u_6	u_8
u_1	w_5	w_7	w_1	w_2	w_6	w_8	w_4	w_3																																																																																																																																									
u_2	w_2	w_3	w_7	w_5	w_4	w_1	w_8	w_6																																																																																																																																									
u_3	w_8	w_5	w_1	w_4	w_6	w_2	w_3	w_7																																																																																																																																									
u_4	w_3	w_2	w_7	w_4	w_1	w_6	w_8	w_5																																																																																																																																									
u_5	w_7	w_2	w_5	w_1	w_3	w_6	w_8	w_4																																																																																																																																									
u_6	w_1	w_6	w_7	w_5	w_8	w_4	w_2	w_3																																																																																																																																									
u_7	w_2	w_5	w_7	w_6	w_3	w_4	w_8	w_1																																																																																																																																									
u_8	w_3	w_8	w_4	w_5	w_7	w_2	w_6	w_1																																																																																																																																									
w_1	u_5	u_3	u_7	u_6	u_1	u_2	u_8	u_4																																																																																																																																									
w_2	u_8	u_6	u_3	u_5	u_7	u_2	u_1	u_4																																																																																																																																									
w_3	u_1	u_5	u_6	u_2	u_4	u_8	u_7	u_3																																																																																																																																									
w_4	u_8	u_7	u_3	u_2	u_4	u_1	u_5	u_6																																																																																																																																									
w_5	u_6	u_4	u_7	u_3	u_8	u_1	u_2	u_5																																																																																																																																									
w_6	u_2	u_8	u_5	u_3	u_4	u_6	u_7	u_1																																																																																																																																									
w_7	u_7	u_5	u_2	u_1	u_8	u_6	u_4	u_3																																																																																																																																									
w_8	u_7	u_4	u_1	u_5	u_2	u_3	u_6	u_8																																																																																																																																									

図 2.2: 女性指向バージョンの実行 (板書を見て自分で書き込みなさい)

チングは M_z は

$$M_z = \{(u_1, w_3), (u_2, w_6), (u_3, w_2), (u_4, w_8), (u_5, w_1), (u_6, w_5), (u_7, w_7), (u_8, w_4)\}$$

となる。

男性指向バージョンにより得られた安定マッチング M_o と女性指向バージョンで得られた安定マッチング M_z を比べると、どの男性も M_z での相手よりも M_o での相手の方が好きである。しかし、女性の側からみると、どの女性も M_o での相手よりも M_z での相手の方が好きである。これは、(証明しないけど) 偶然ではなくて常に成り立つ¹。(したがって、「プロポーズされるのを待っているよりも、自分からプロポーズした方が幸せになれる。」と言い換えてもかまわないだろうか?)

参考文献

- [1] D. Gale and L.S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69:9-15, 1962.

¹実は、もっとすごいことが言える。任意の安定マッチング M を考えたときに、どの男性も M での相手よりも M_o での相手の方が好きで、どの女性も M での相手よりも M_z での相手の方が好きである。