

$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
&= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(j) + \partial\varphi(h) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(s^+, j) + \varphi(s^+, d)) \\
&\quad + (\varphi(d, h) + \varphi(d, k) - \varphi(s^+, d) - \varphi(j, d)) \\
&\quad + (\varphi(j, f) + \varphi(j, k) + \varphi(j, d) - \varphi(b, j) - \varphi(s^+, j)) \\
&\quad + (\varphi(h, s^-) - \varphi(k, h) - \varphi(d, h)) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(d, k) + \varphi(h, s^-) + \varphi(j, k) + \varphi(j, f)) \\
&\quad - (\varphi(b, j) + \varphi(k, h)) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) \\
&= 17
\end{aligned}$$

図 2.2: 式 (2.31) の説明

(証明)

$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\
&= \kappa_c(U).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

□

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} \leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \tag{2.32}$$

を得る.

定理 2.a: フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(証明) φ をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし, \mathcal{N} のあるカット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \tag{*}$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \leq \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \leq \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大流であり, W は最小カットである.

φ に対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を考えよう (図 2.3 を見よ). このとき, 入口 s^+ から出口 s^- までの有向道は存在しない.

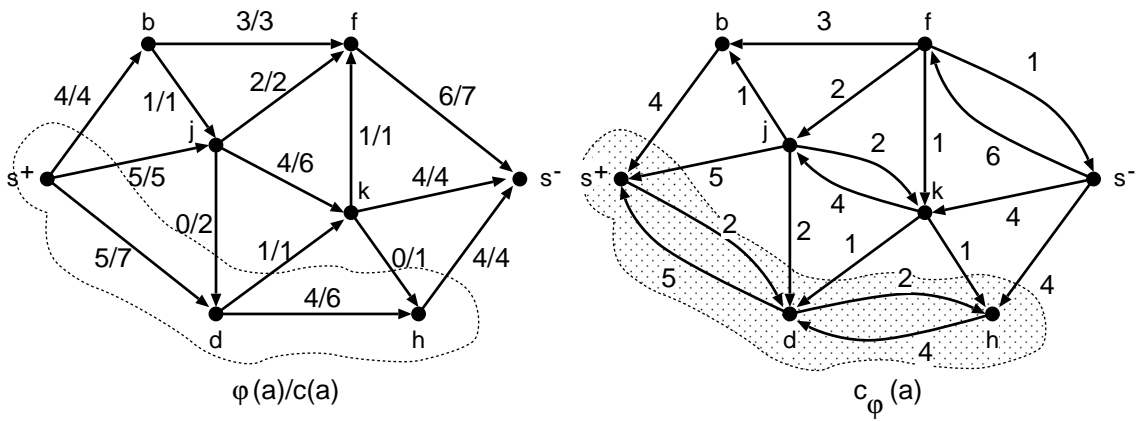


図 2.3: (a) アルゴリズムが終了したときの φ と (b) それに対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ

\mathcal{N}_φ において、入口 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W と置く (図 2.3 を見よ). このとき、 $s^+ \in W$ であり、また、 s^- は s^+ から到達可能ではないから $s^- \notin W$ である. したがって、 W はカットである. このカット W に対して、(*) が成り立つことを示そう.

次の (ア), (イ) が成り立つ.

(ア) ネットワーク \mathcal{N} において W から出る枝 a は、補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから、 $\varphi(a) = c(a)$.

(イ) ネットワーク \mathcal{N} において W に入る枝 a' に対して、その逆向き枝 \bar{a}' は補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから、 $\varphi(a') = 0$.

したがって、式 (2.31) と同じ計算をカット W と最大フロー φ に対して行くと、

$$\begin{aligned}
 v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^-W} \varphi(a) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^-W} 0 \\
 &= \kappa_c(W)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

を得る. \square

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は、つぎのことを示したことにもなっている.

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理):

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\}. \tag{2.40}$$

\square

注意 2.b: 全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには、フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの各反復においてフローの流量は少くとも 1 ずつ増加する. したがって、有限回で最大流に到達する. \square

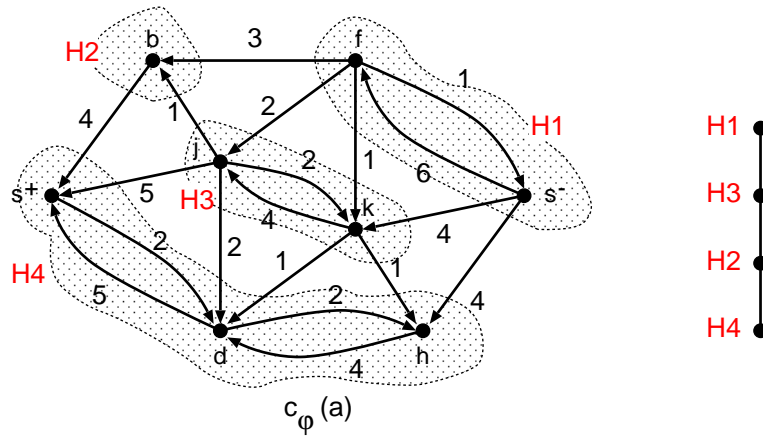


図 2.4: \mathcal{N}_φ の強連結成分分解とそのハッセ図

全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには、フォード-ファルカーソンのアルゴリズムは整数値のフローしか生みださない。したがって、以下を得る。

定理 2.6: 容量関数 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ が整数値関数であるとき、整数値 (各枝のフローの値が整数) の最大フローが存在する。□

定理 2.5 の証明から、フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ の補助ネットワーク \mathcal{N}_φ において、 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W とすると、 W は最小カットになる。さらに、この補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を用いると、全ての最小カットも求めることができる。

今日の例題を用いてこれを説明しよう。まず、補助ネットワークを強連結成分分解する。そして、そのハッセ図を求める。

このハッセ図の一番下の成分 (この例では H_4) だけから成る集合 $\{H_1\}$ から出発して、以下のようにこのハッセ図の下から順に H_i を加えていく。

$$\{H_4\}, \{H_4, H_2\}, \{H_4, H_2, H_3\} \tag{2.41}$$

そして、一番上の成分 (この例では H_1) が加えられる直前でやめる。これら 3 つ対応する点集合

$$\{s^+, d, h\}, \{s^+, d, h, b\}, \{s^+, d, h, b, j, k\} \tag{2.42}$$

が、 \mathcal{N} の全ての最小カットである。