グラフとネットワーク (第14回)

安藤 和敏

ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

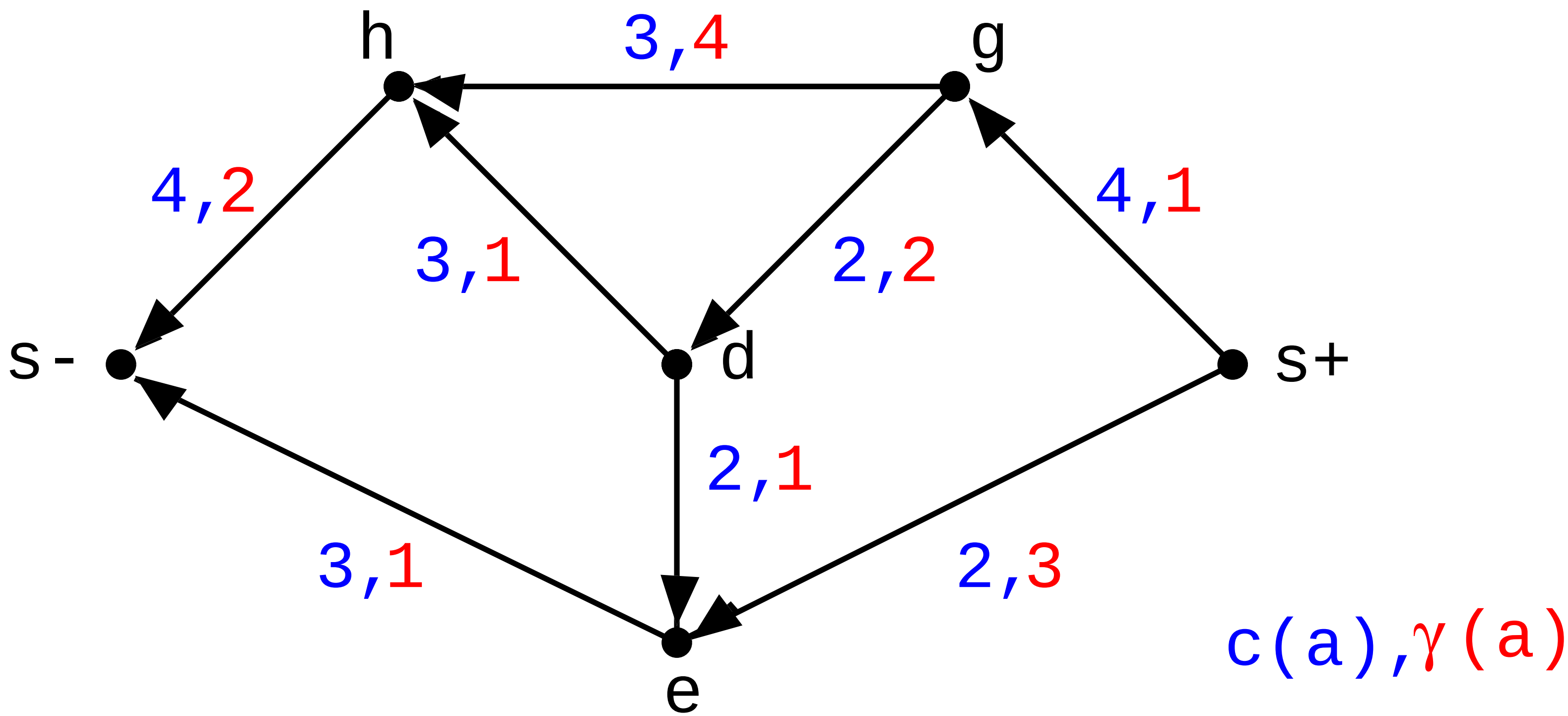
静岡大学工学部

2.3 最小費用フロー

最小費用フロー問題

最小費用フロー問題で考えるネットワーク N

各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ と単位流量あたりの費用 $\gamma(a)$ が与えられている.



各枝 $a \in A$ に付された数値は $c(a)$,$\gamma(a)$ を表す

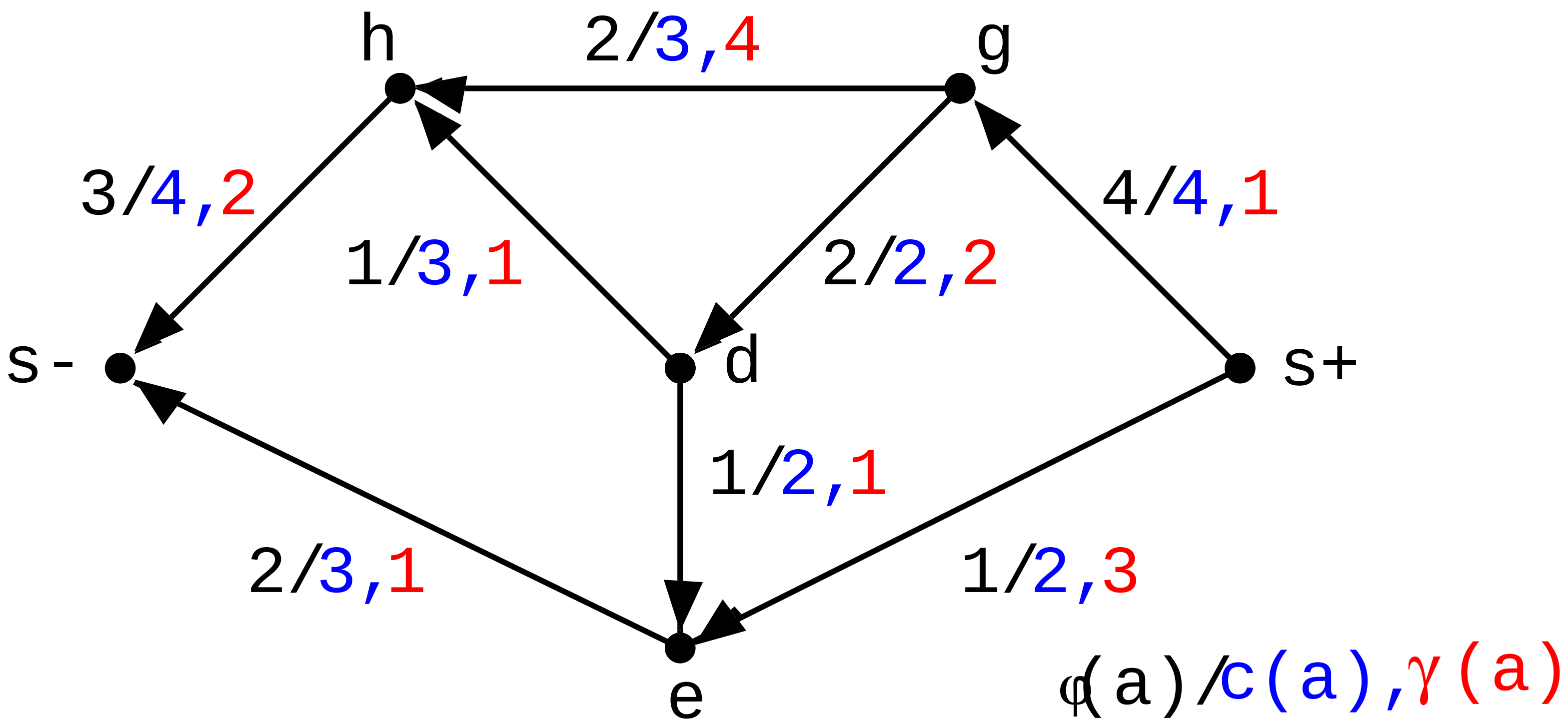
最小費用フロー問題で考えるネットワーク$\mathcal{N}$

各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ と単位流量あたりの費用 $\gamma(a)$ を持つネットワークを

$$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$$

と書く.

フローφの費用



フローφの流量$= v^*(\varphi) = 5$,

フローφの費用$= \sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a) =$

$1 \times 4 + 4 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 29.$

最小費用流問題

最小費用流問題

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられているとする.

最小費用流問題

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられているとする.

- 流量が $\hat{v}$ であるようなフロー φ の中で, フローの費用

$$\sum_{a \in A} \gamma(a) \varphi(a)$$

が最小になるものを最小費用フロー (minimum cost flow) と呼び,

最小費用流問題

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられているとする.

- 流量が $\hat{v}$ であるようなフロー φ の中で, フローの費用

$$\sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$$

  が最小になるものを最小費用フロー (minimum cost flow) と呼び,

- 最大費用フローを求める問題を最小費用フロー問題 (minimum-cost flow problem) と呼ぶ.

最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

- 最小費用フロー問題を解くためのアルゴリズムには, プライマル法, ネットワークシンプレックス法, などがある.

最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

- 最小費用フロー問題を解くためのアルゴリズムには, プライマル法, ネットワークシンプレックス法, などがある.
- ここでは, プライマル法とプライマル-デュアル法について学ぶ.

最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

- 最小費用フロー問題を解くためのアルゴリズムには, プライマル法, ネットワークシンプレックス法, などがある.
- ここでは, プライマル法とプライマル-デュアル法について学ぶ.
- これらのアルゴリズムでは, 以下に説明する補助ネットワークを用いる.

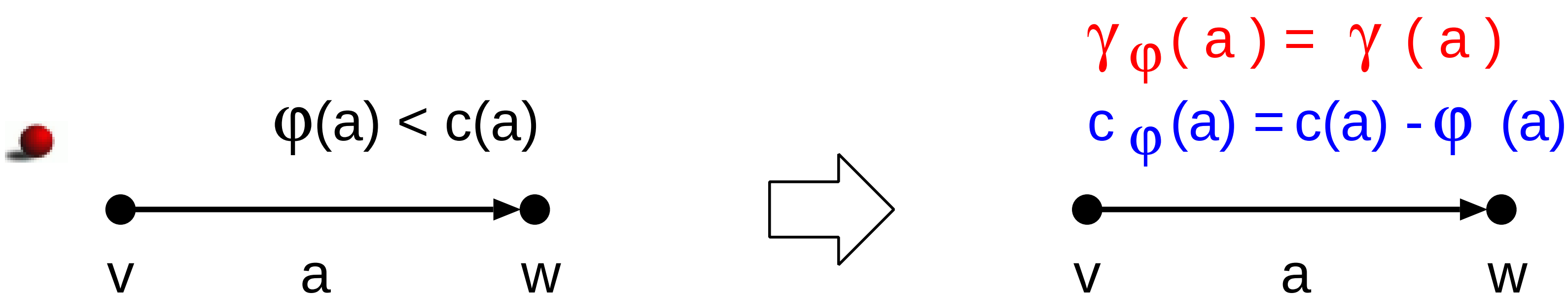
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi, \gamma_\varphi)$ は以下のように構成される.

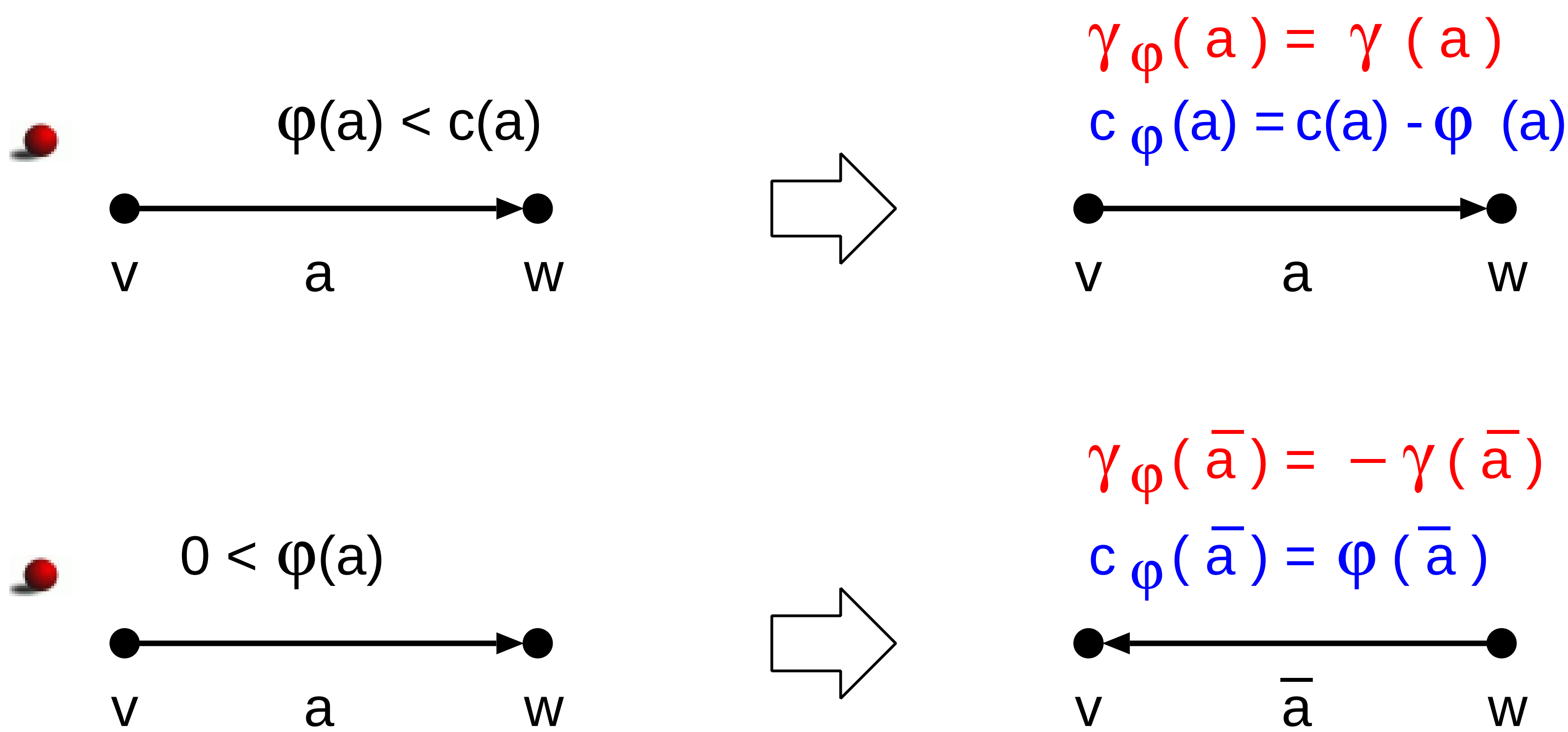
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi, \gamma_\varphi)$ は以下のように構成される.



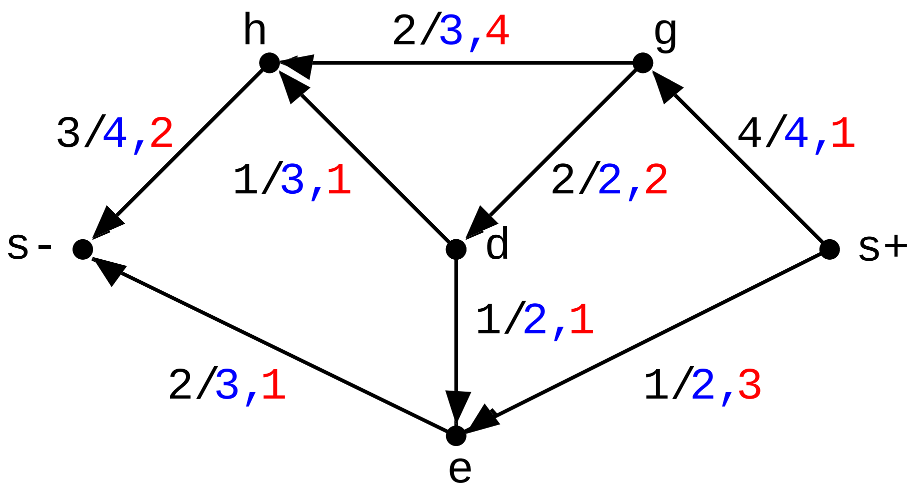
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi, \gamma_\varphi)$ は以下のように構成される.

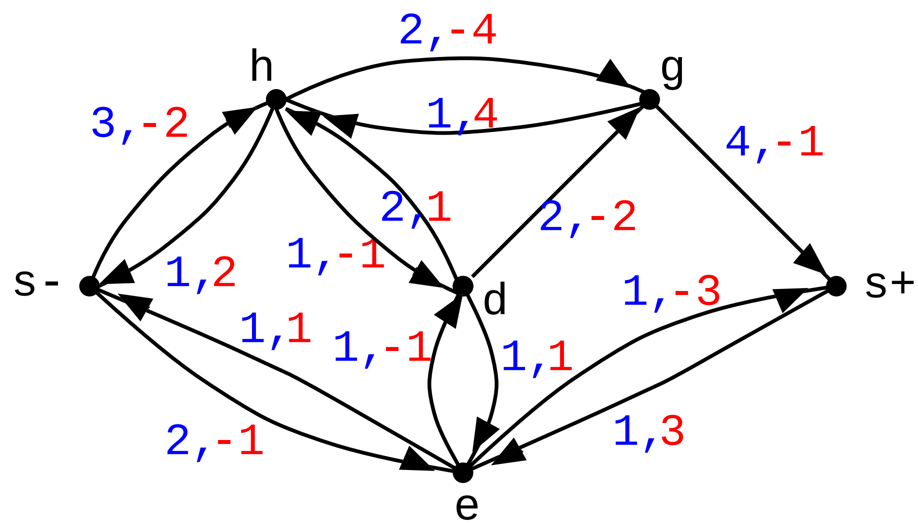


補助ネットワークの例

フローの費用 = 29



φ(a)/c(a),γ(a)



$c_\varphi(a),\gamma_\varphi(a)$

最適性の条件 (定理 2.12)

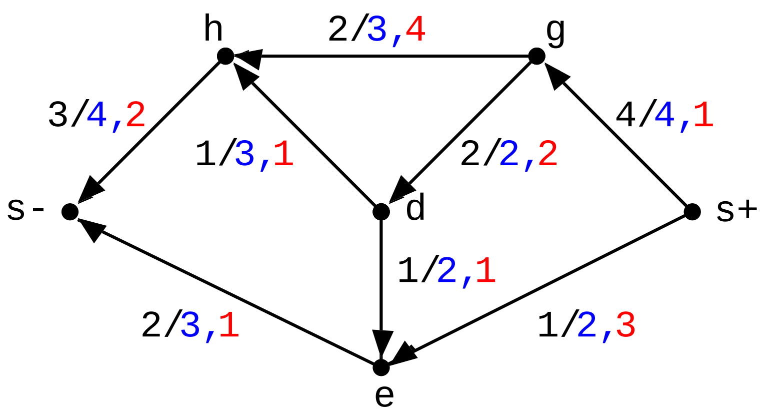
2 端子ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ 中のフロー φ がそれと同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のすべてのフローのうちで費用最小であるための必要十分条件は, φ に関する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ 中に負の長さの有向閉路が存在しないことである.

定理 2.12 の証明 (必要性のみ)

$\mathcal{N}_\varphi$ 中に負の長さの有向閉路が存在するならば, φ と同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のフローで φ よりも費用が小さいものが存在することを証明する.

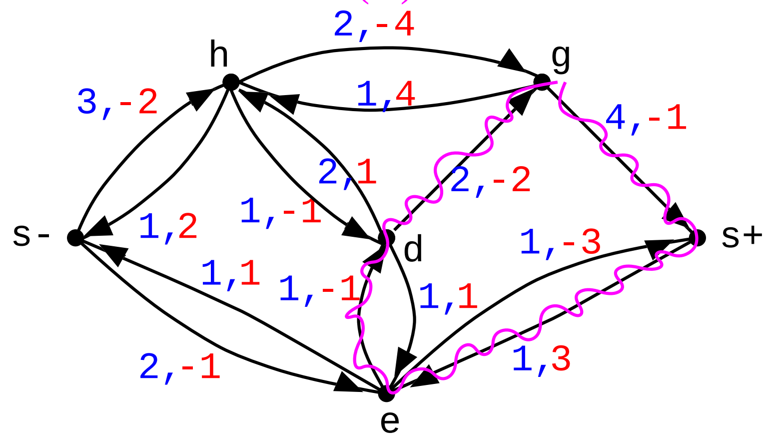
定理 2.12 の証明 (必要性のみ)

フローの費用 = 29



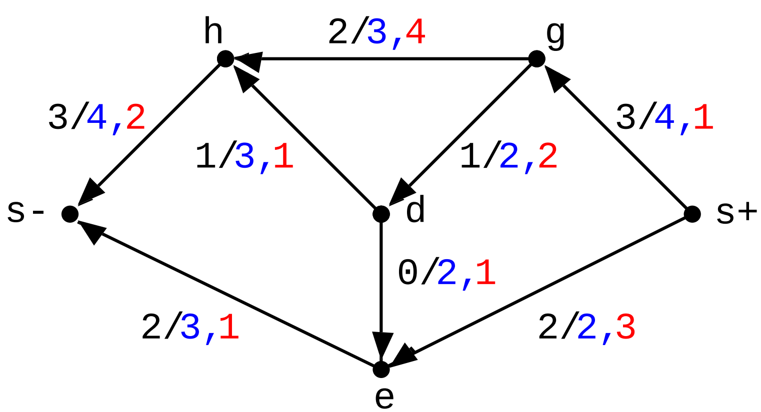
φ(a)/c(a),γ(a)

負の長さ(-1)の有向閉路



c_φ(a),γ_φ(a)

負の長さの有向閉路に添ってフローを増加(減少)



φ(a)/c(a),γ(a)

フローの費用 = 29 -1 =28

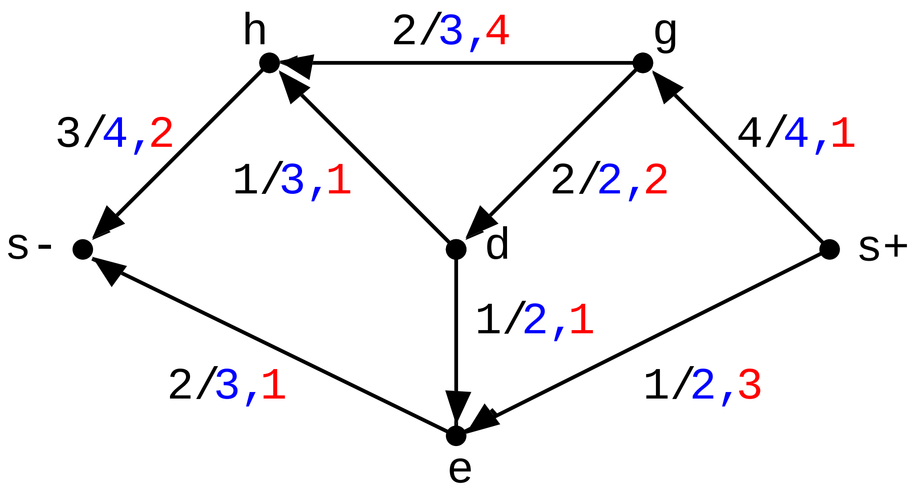
(流量は変わらない。)

プライマル法

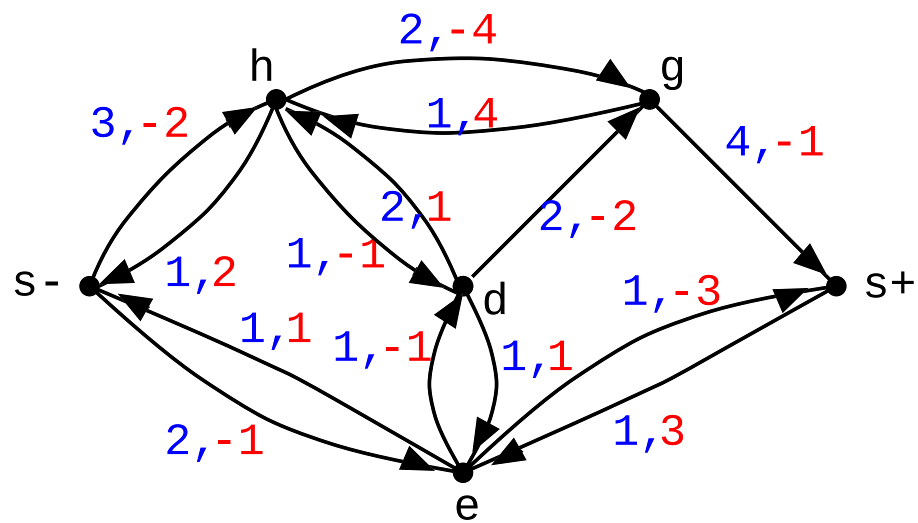
プライマル法は, 定理 2.12 に基づいており, 適当な初期フロー φ から出発して, N_φ の中に負の長さの有向閉路が存在する限り, その有向閉路にそってフロー φ を更新してゆくというアルゴリズムである.

プライマル法 (流量が $\hat{v} = 5$ の初期フロー φ)

フローの費用 = 29

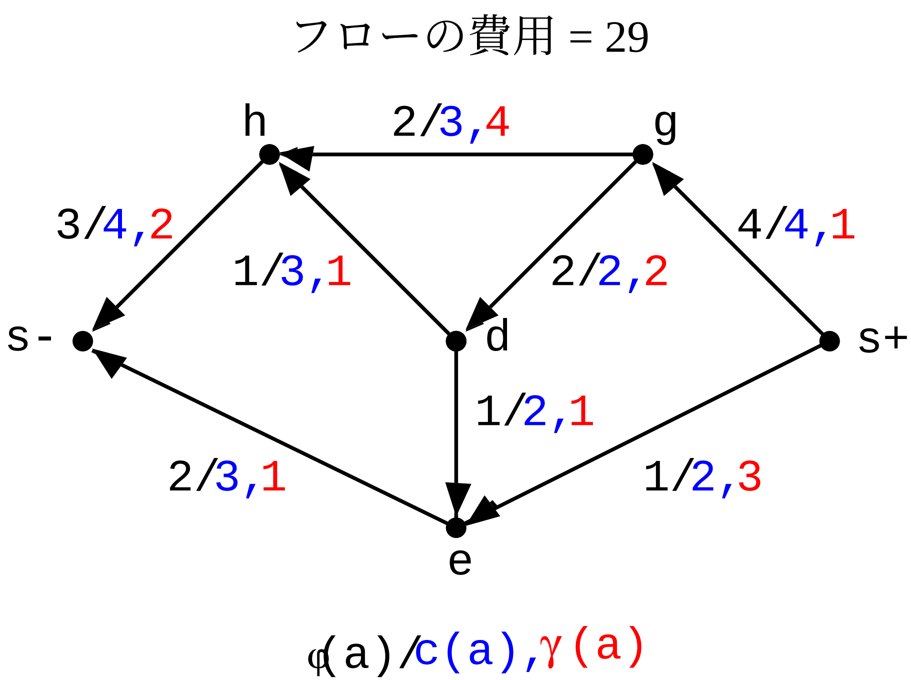


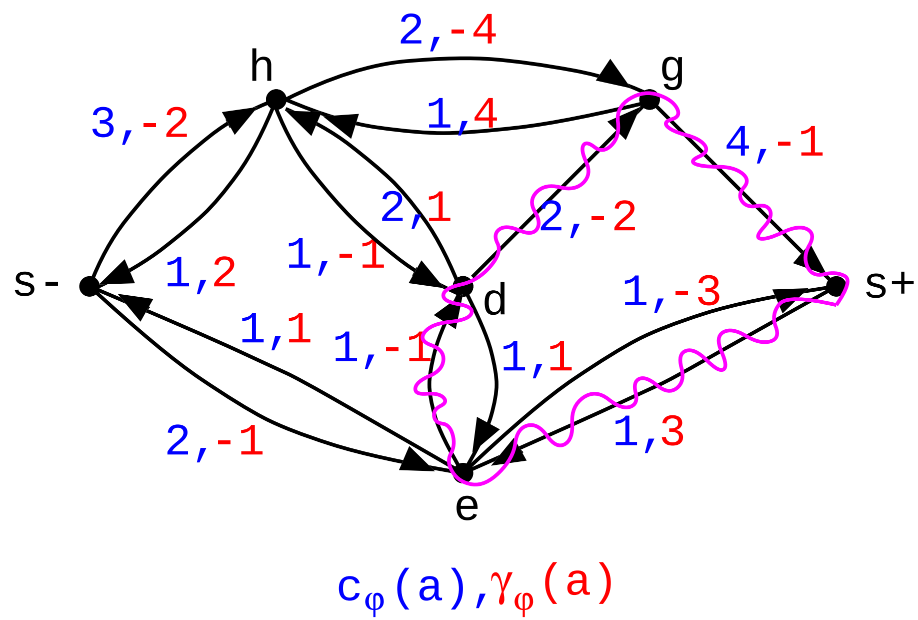
φ(a)/c(a),γ(a)



$c_\varphi(a), \gamma_\varphi(a)$

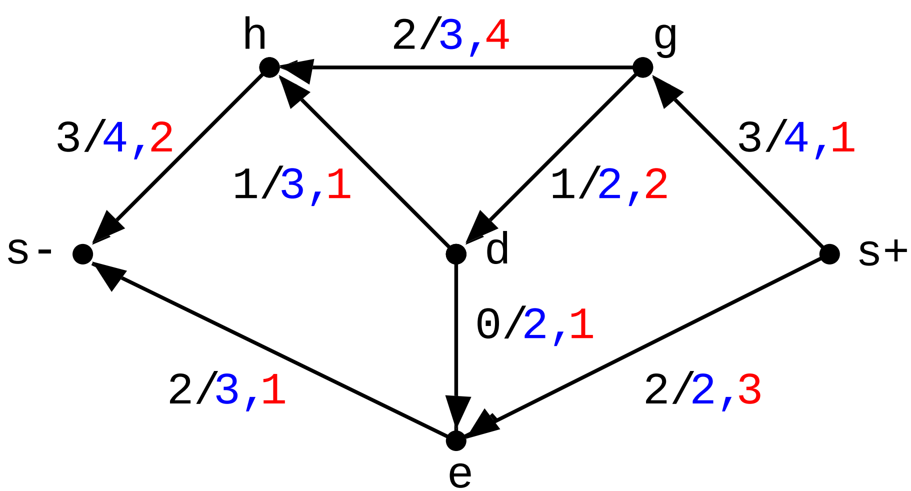
プライマル法 (負の長さの有向閉路)



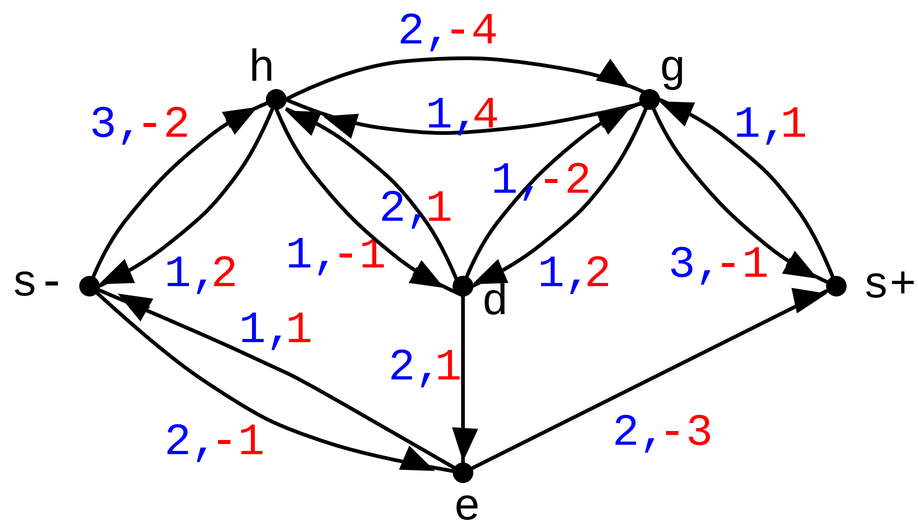


プライマル法 (有向閉路に沿ってフローを更新

フローの費用 = 28



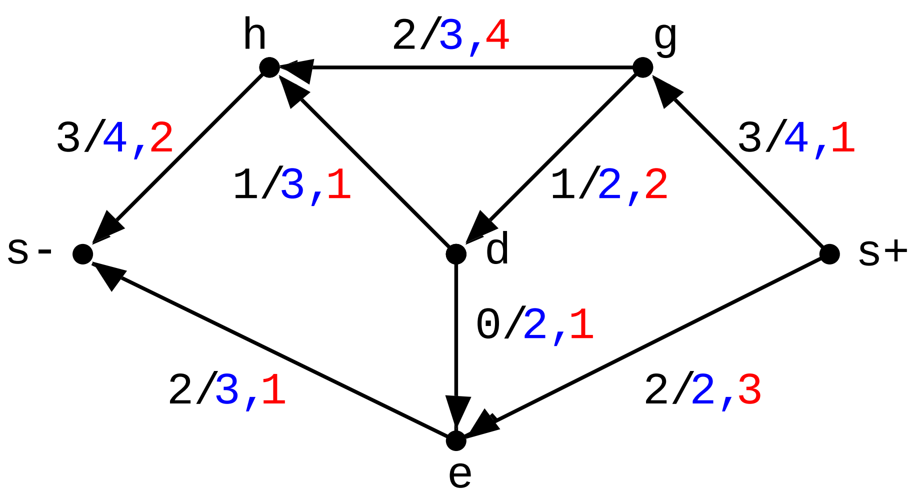
$\varphi(a)/c(a),\gamma(a)$



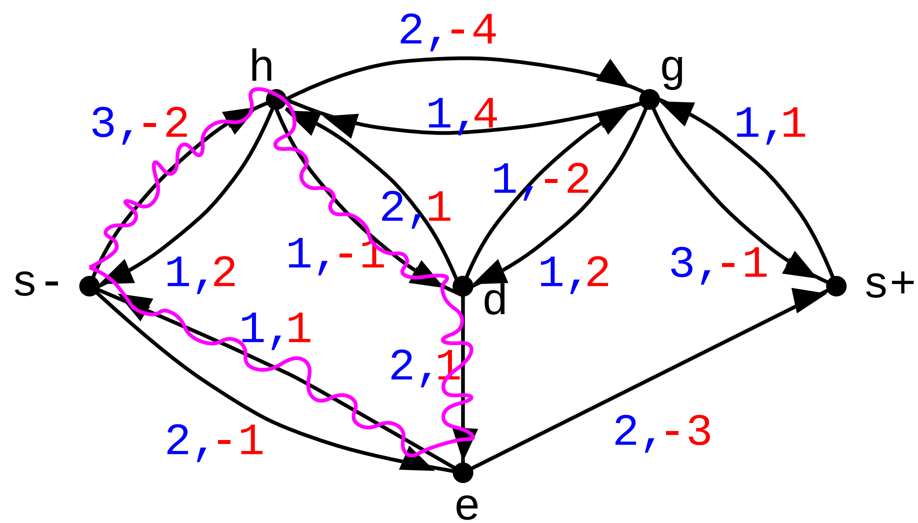
$c_{\varphi}(a),\gamma_{\varphi}(a)$

プライマル法 (負の長さの有向閉路)

フローの費用 = 28



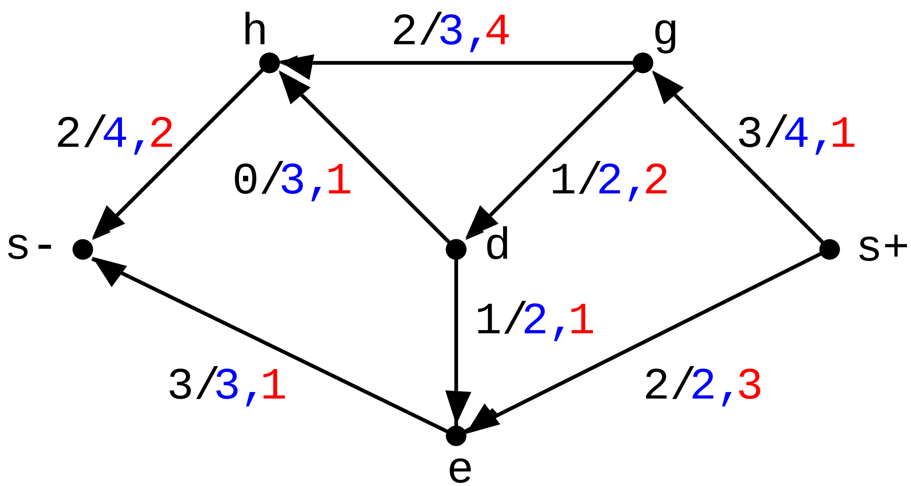
φ(a)/c(a),γ(a)



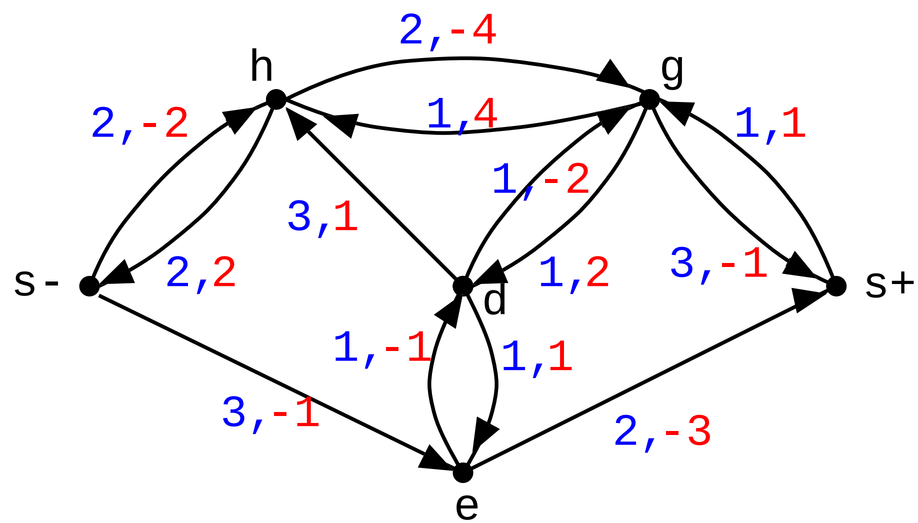
$c_\varphi(a),\gamma_\varphi(a)$

ライマル法 (有向閉路に沿ってフローを更新

フローの費用 = 27



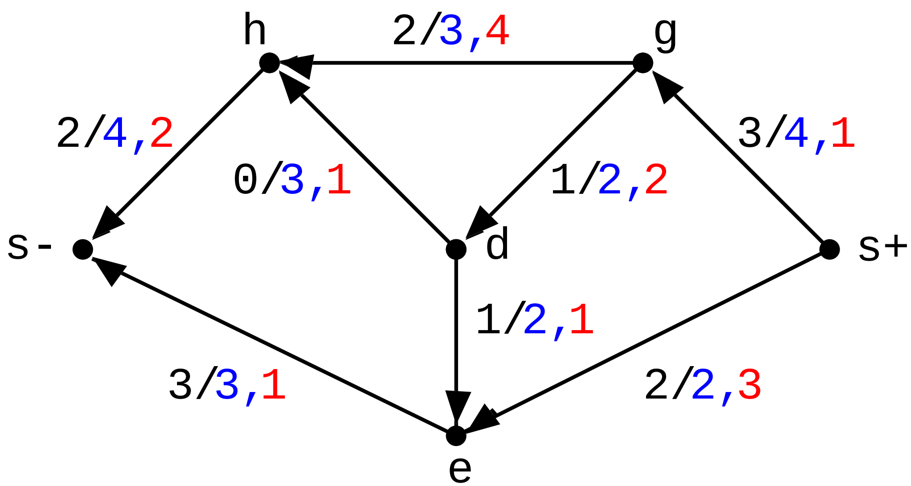
φ(a)/c(a),γ(a)



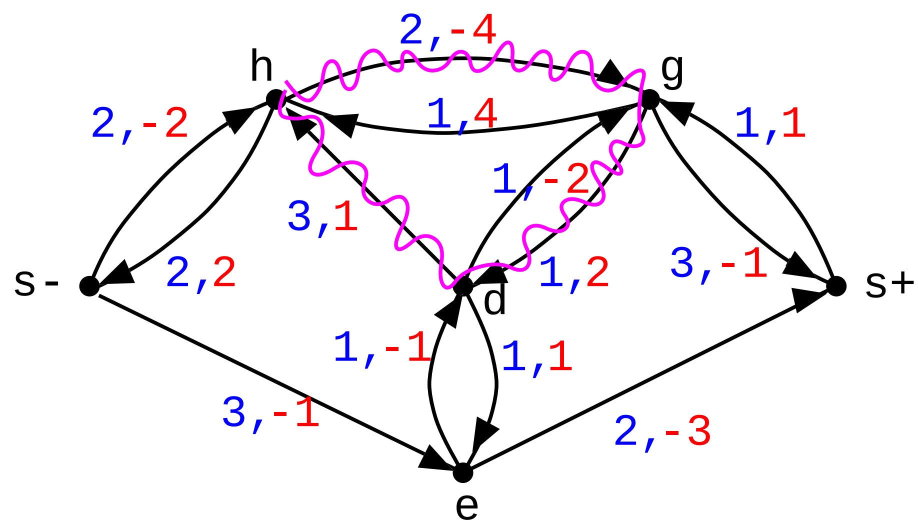
c_φ(a),γ_φ(a)

プライマル法 (負の長さの有向閉路)

フローの費用 = 27

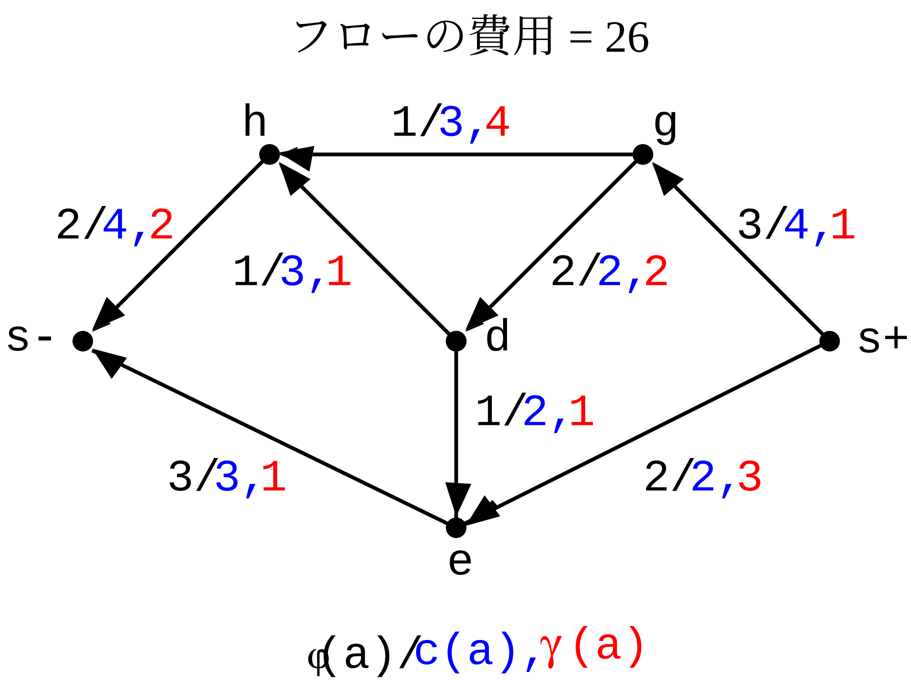


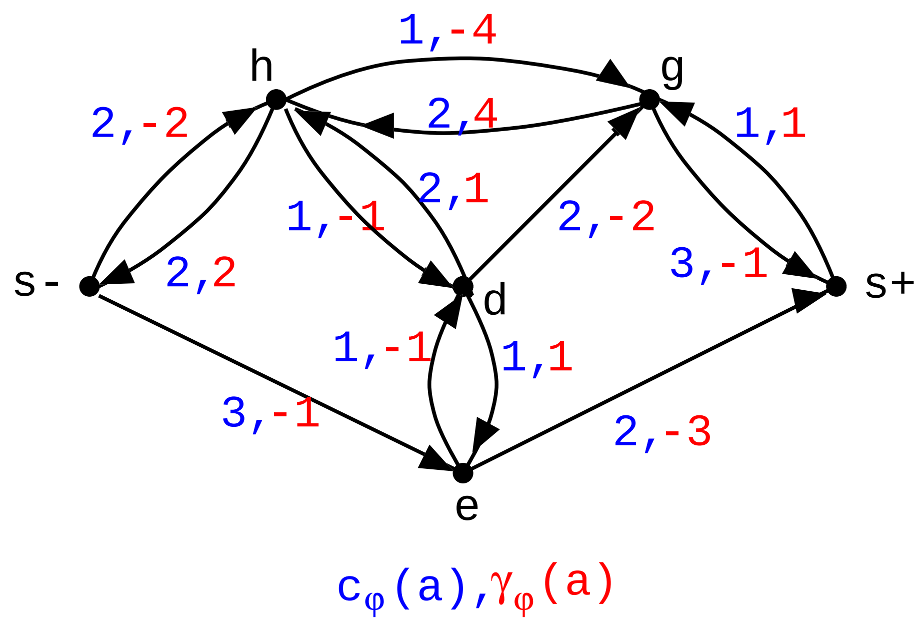
φ(a)/c(a),γ(a)



$c_\varphi(a),\gamma_\varphi(a)$

プライマル法 (有向閉路に沿ってフローを更新



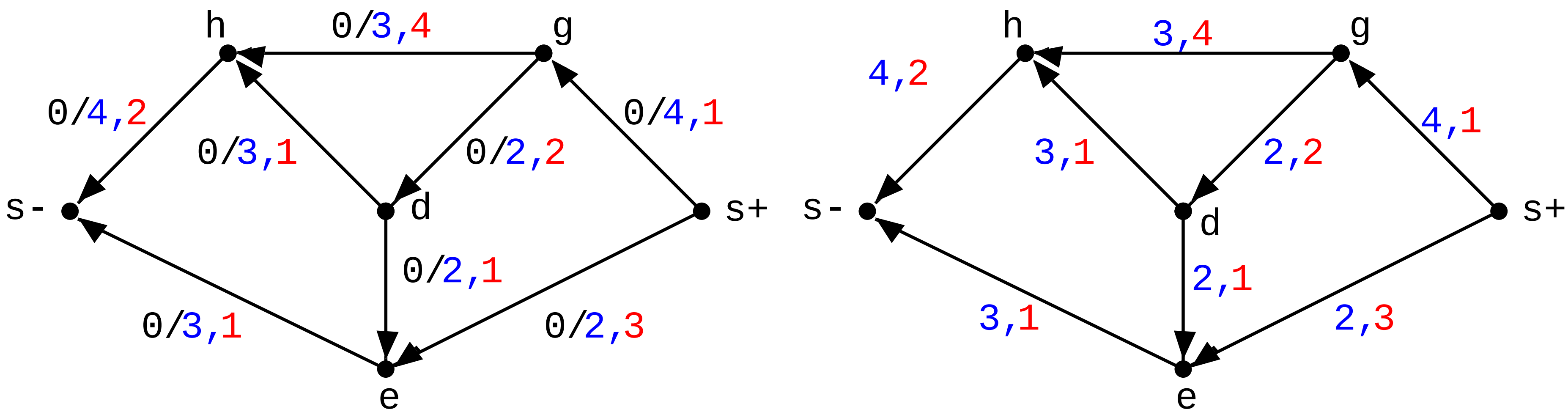


$\mathcal{N}_{\varphi}$ 中に負の長さの有向閉路は存在しないので, 現在のフロー φ が流量 $\hat{v} = 5$ をもつフローのうちで費用最小である.

プライマル-デュアル法

プライマル-デュアル法 (1)

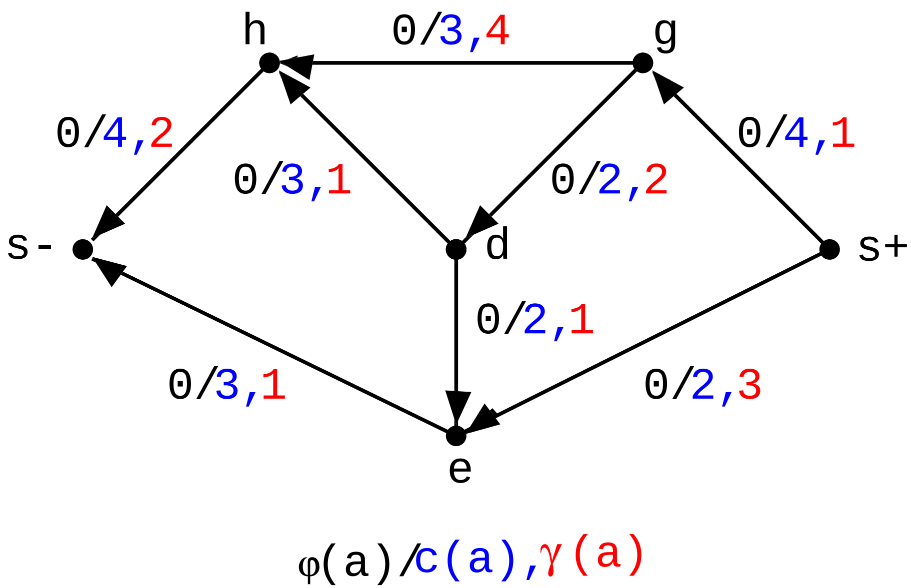
フローの流量 = 0

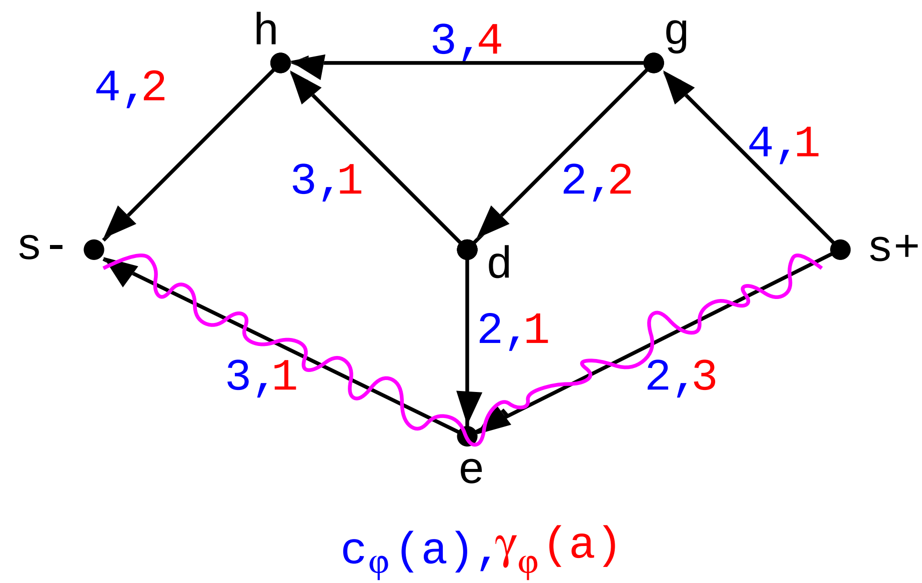


$\varphi(a)/c(a),\gamma(a)$ $\qquad$ $c_\varphi(a),\gamma_\varphi(a)$

プライマル-デュアル法 (1)

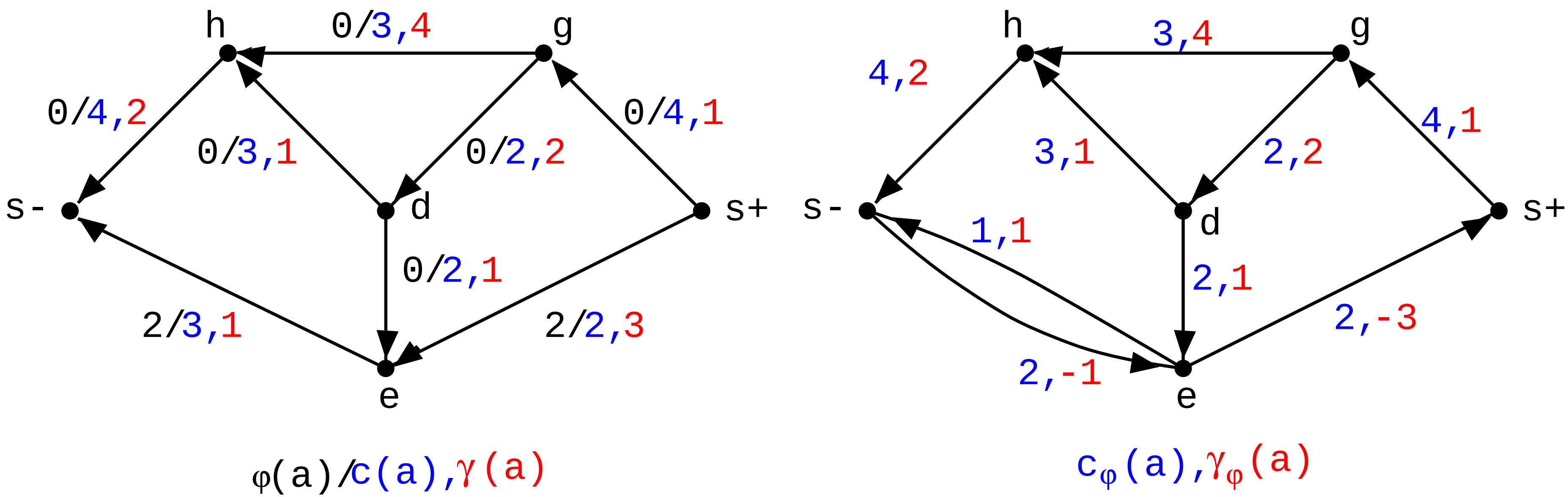
フローの流量 = 0





プライマル-デュアル法 (2)

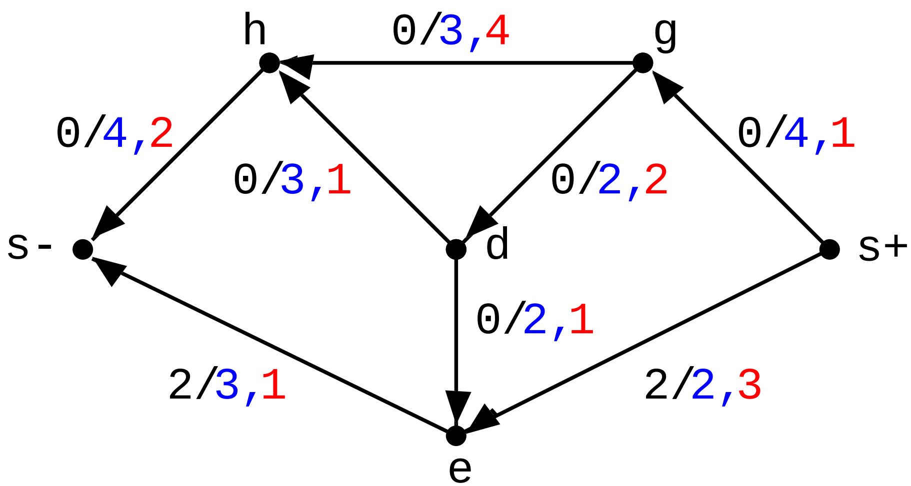
フローの流量 = 2



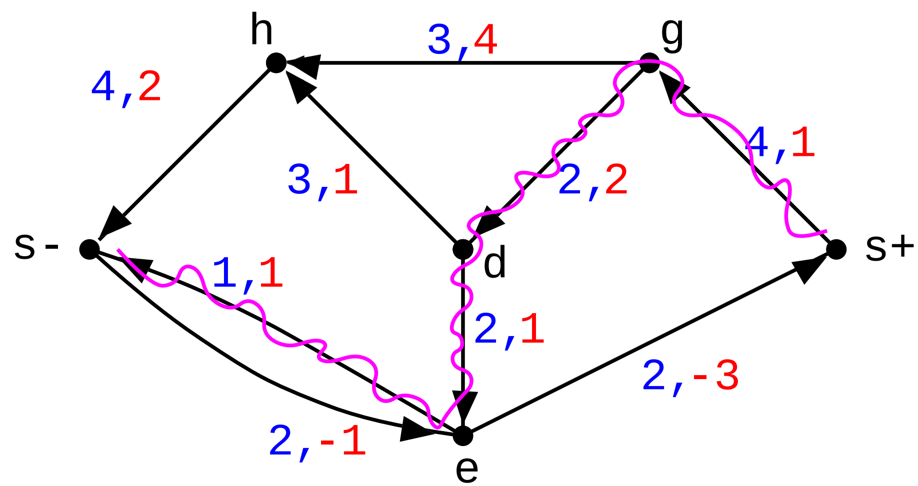
$c_\varphi(a), \gamma_\varphi(a)$

プライマル-デュアル法 (2)

フローの流量 = 2



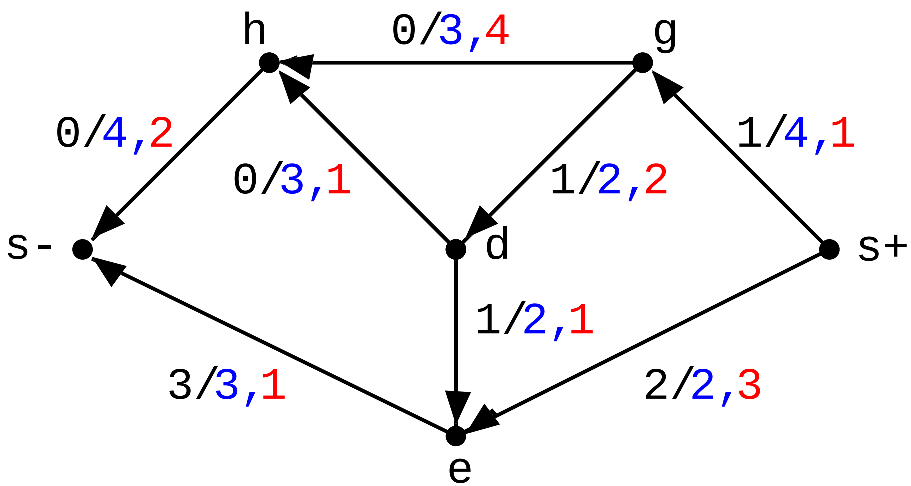
φ(a)/c(a),γ(a)



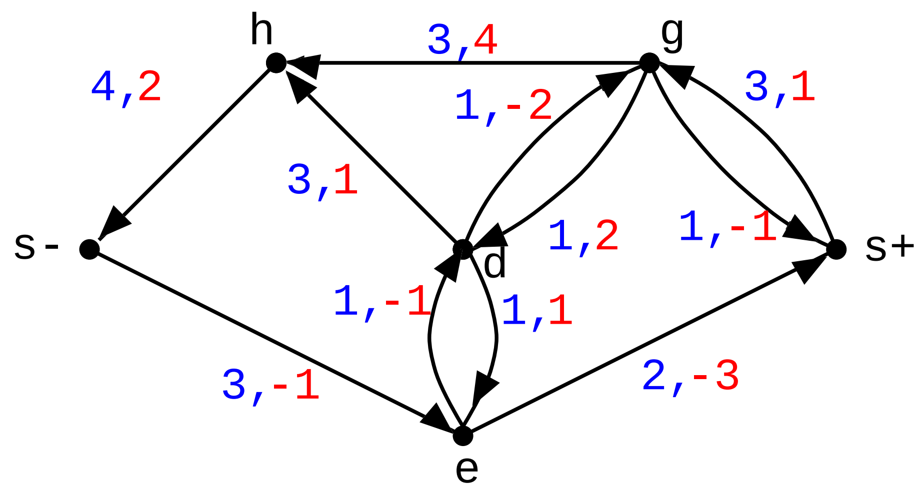
$c_\varphi(a), \gamma_\varphi(a)$

プライマル-デュアル法 (3)

フローの流量 = 3



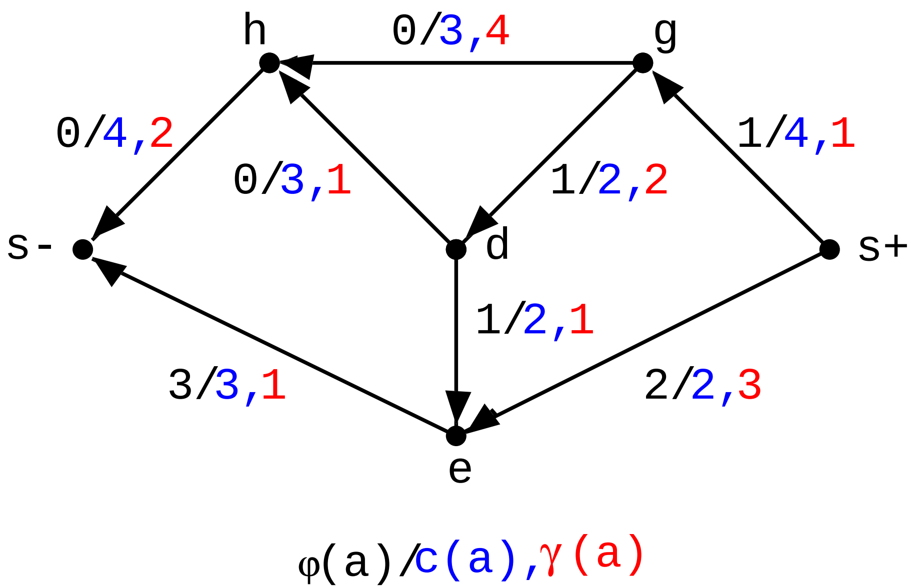
φ(a)/c(a),γ(a)

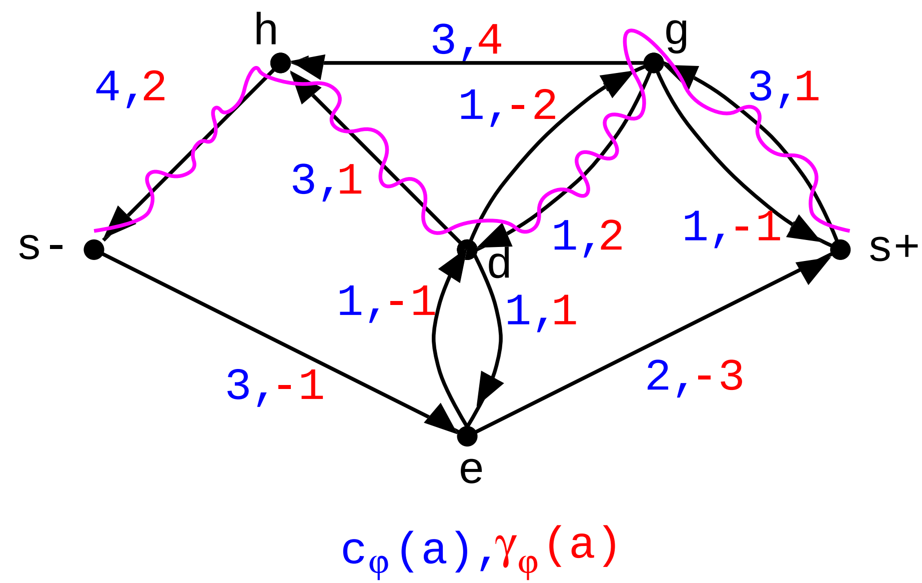


c_φ(a),γ_φ(a)

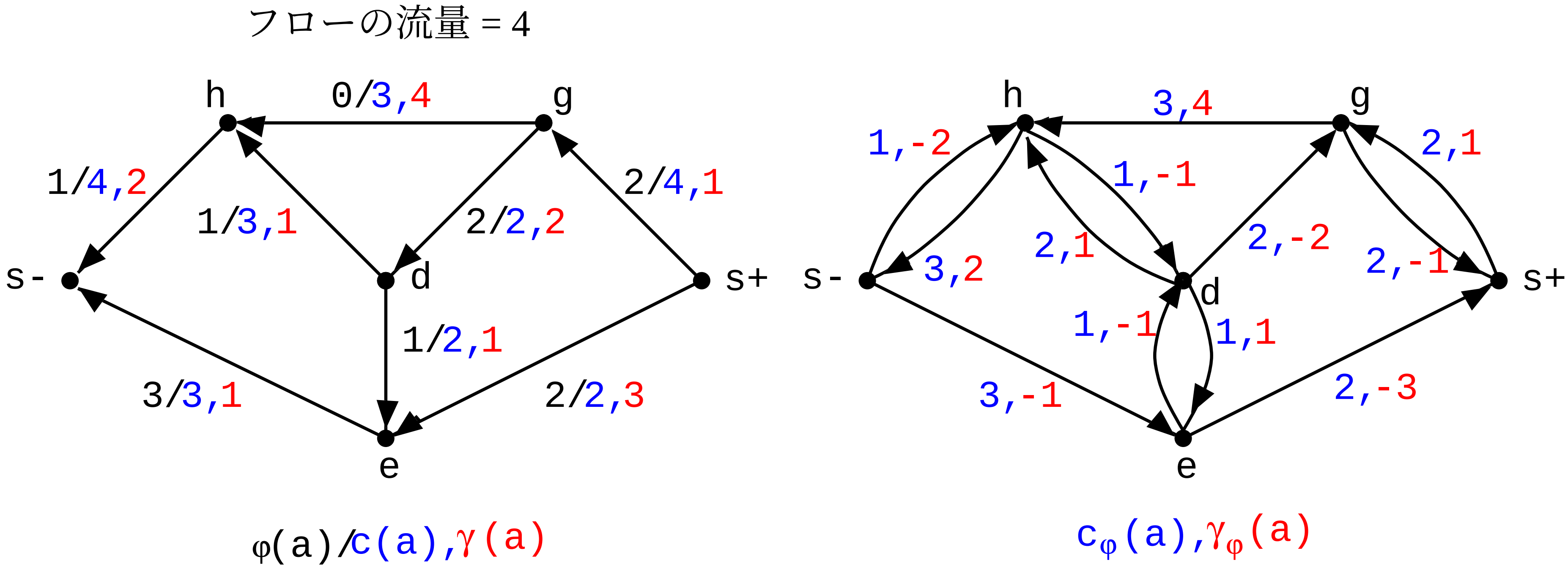
プライマル-デュアル法 (3)

フローの流量 = 3



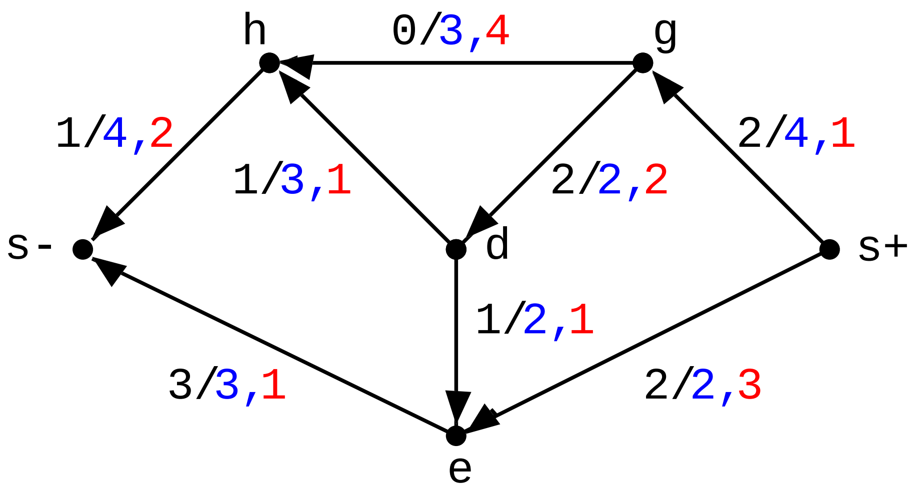


プライマル-デュアル法 (4)

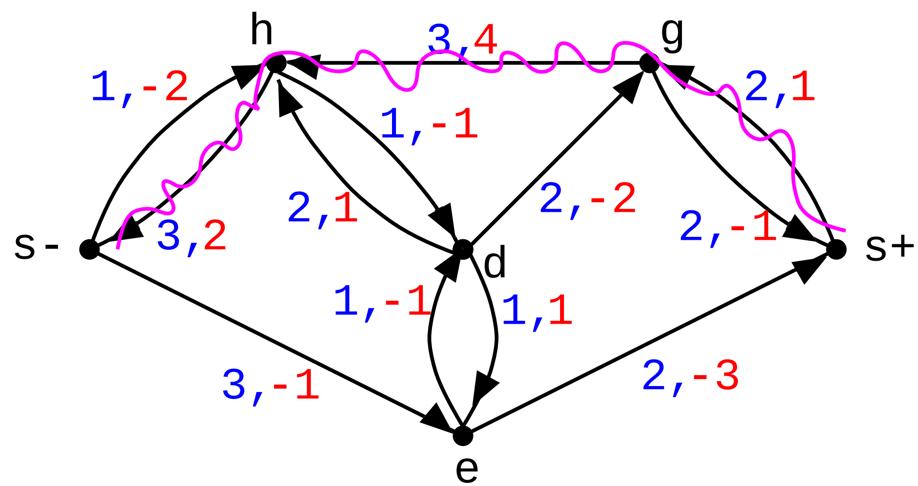


プライマル-デュアル法 (5)

フローの流量 = 4



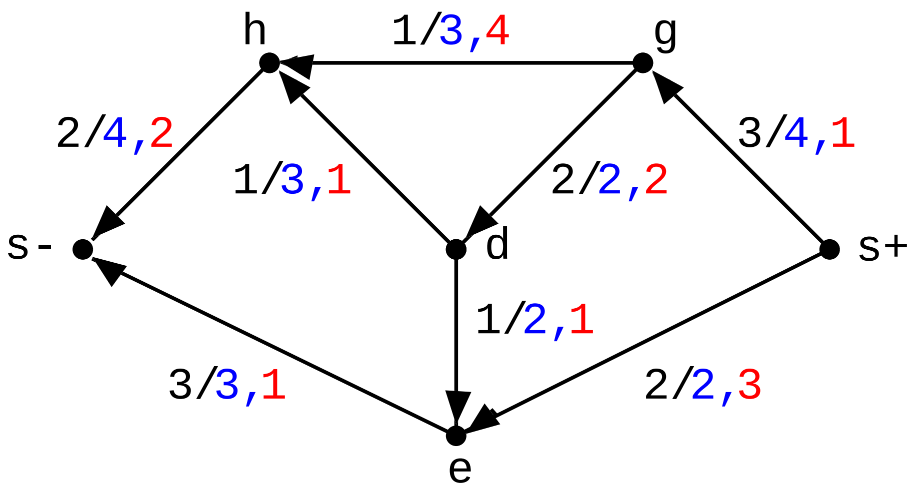
φ(a)/c(a),γ(a)



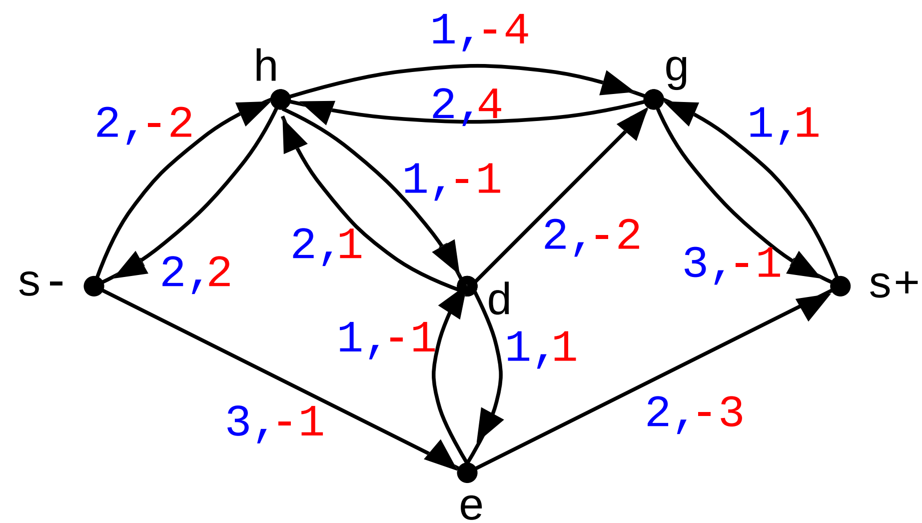
$c_\varphi(a), \gamma_\varphi(a)$

プライマル-デュアル法 (6)

フローの流量 = 5



φ(a)/c(a),γ(a)



$c_\varphi(a), \gamma_\varphi(a)$