グラフとネットワーク (第12回)

安藤 和敏

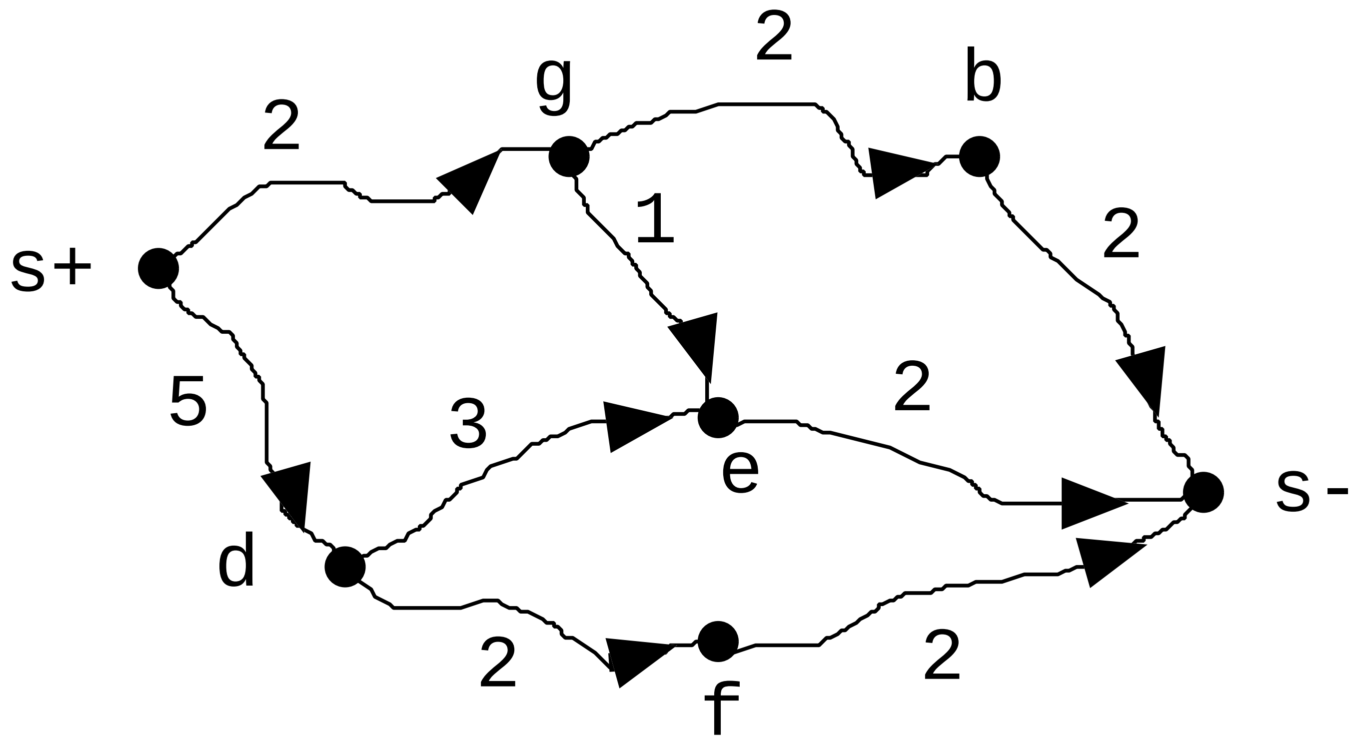
ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

2.2 フローとカット

2.2.1 2端子フロー

ネットワーク $N = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$



特別な2点: s^+ と s^- は, それぞれ, 入口と出口と呼ばれる.

各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ が与えられている.

ネットワーク$\mathcal{N}$上のフロー

ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー

ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数 $\varphi\colon A \to \mathbf{R}$ のことである.

ネットワーク$\mathcal{N}$上のフロー

ネットワーク$\mathcal{N}$上のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数φ: $A \to \mathbf{R}$ のことである.

(i) 容量制約: 各枝$a \in A$に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \qquad (2.25)$$

ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー

ネットワーク $\mathcal{N}$ 上のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数 φ: $A \to \mathbf{R}$ のことである.

(i) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \tag{2.25}$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点 $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\sum_{a \in \delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^- v} \varphi(a) = 0.$$

境界

各点 $v \in V$ に対して $\partial\varphi(v)$ を

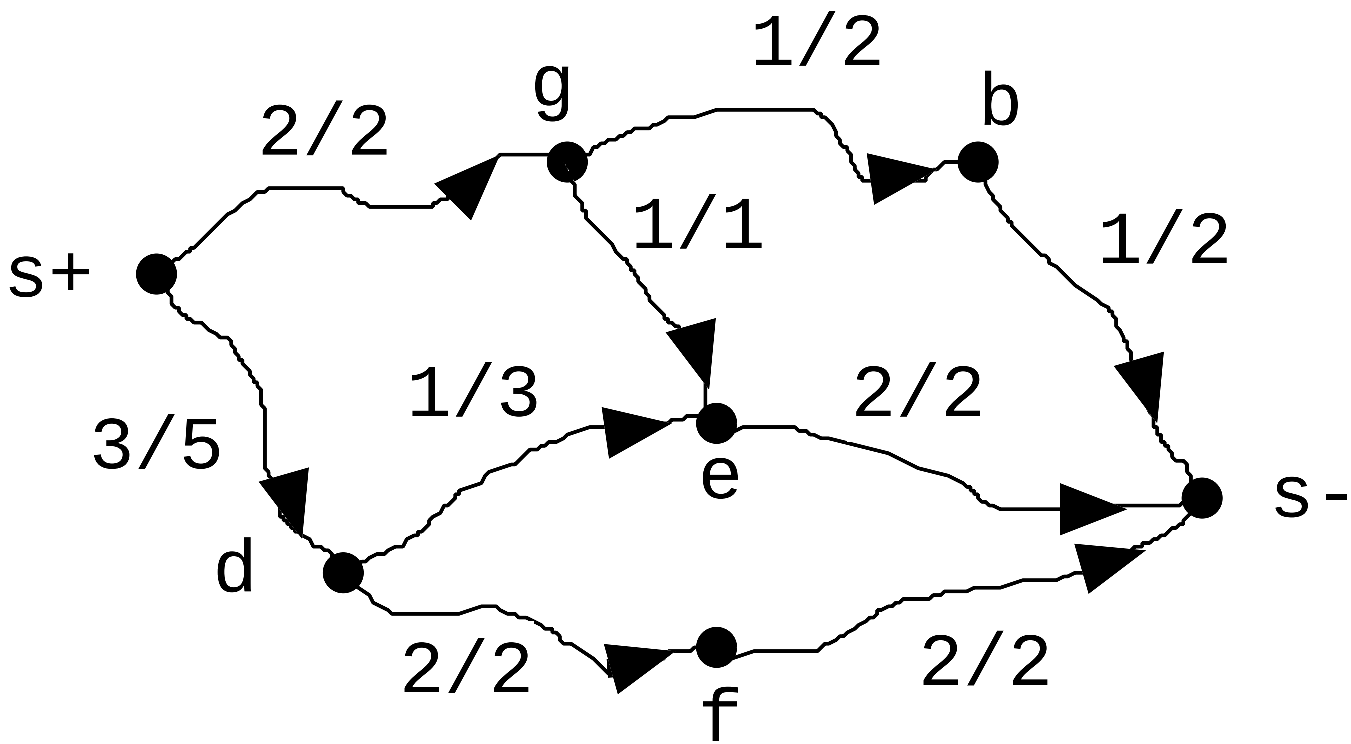
$$\partial\varphi(v) = \sum_{a\in\delta^+ v} \varphi(a) - \sum_{a\in\delta^- v} \varphi(a) \tag{2.27}$$

と定義すると, 流量保存則は

$$\partial\varphi(v) = 0. \tag{2.26}$$

となる. $\partial\varphi\colon V \to \mathbf{R}$ はフロー φ の境界 (boundary) と呼ばれる.

フローの例



各枝 a に付された数は, $\varphi(a)/c(a)$ を意味する.

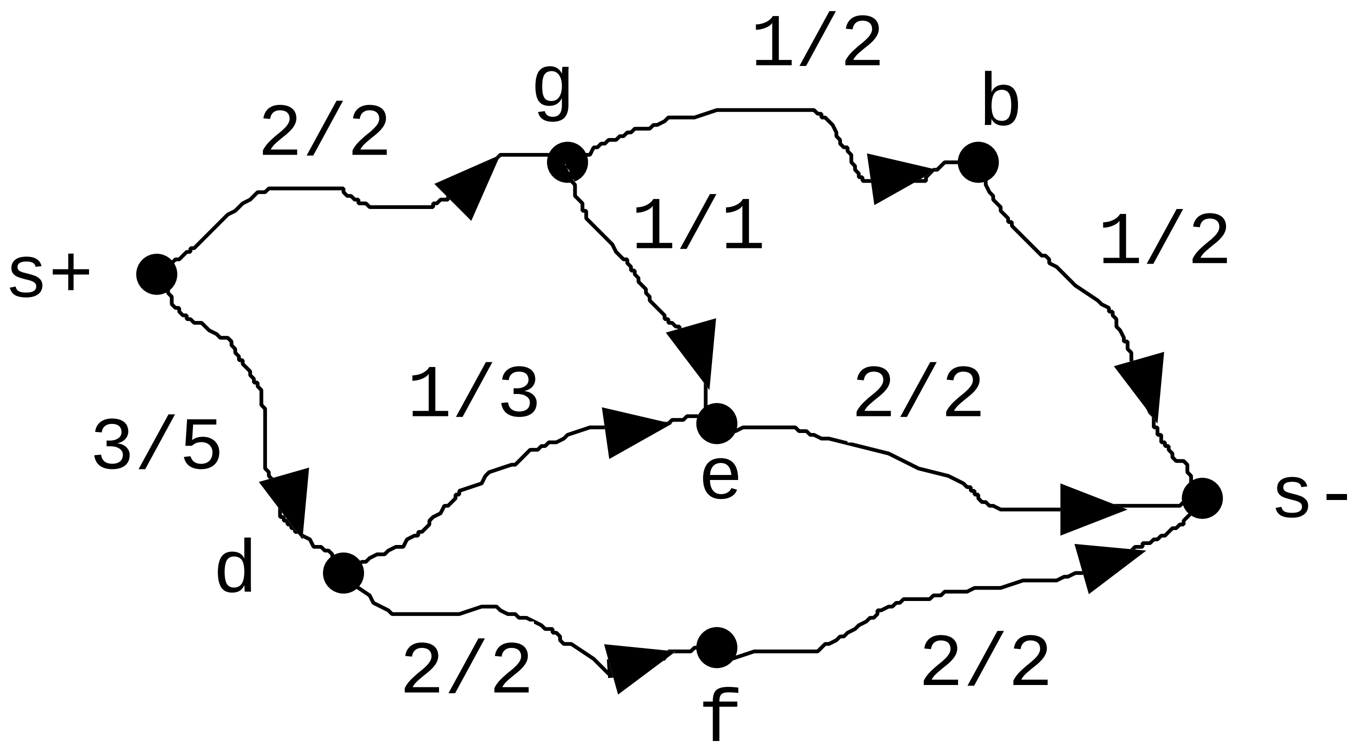
フローの流量

流量保存則によって,

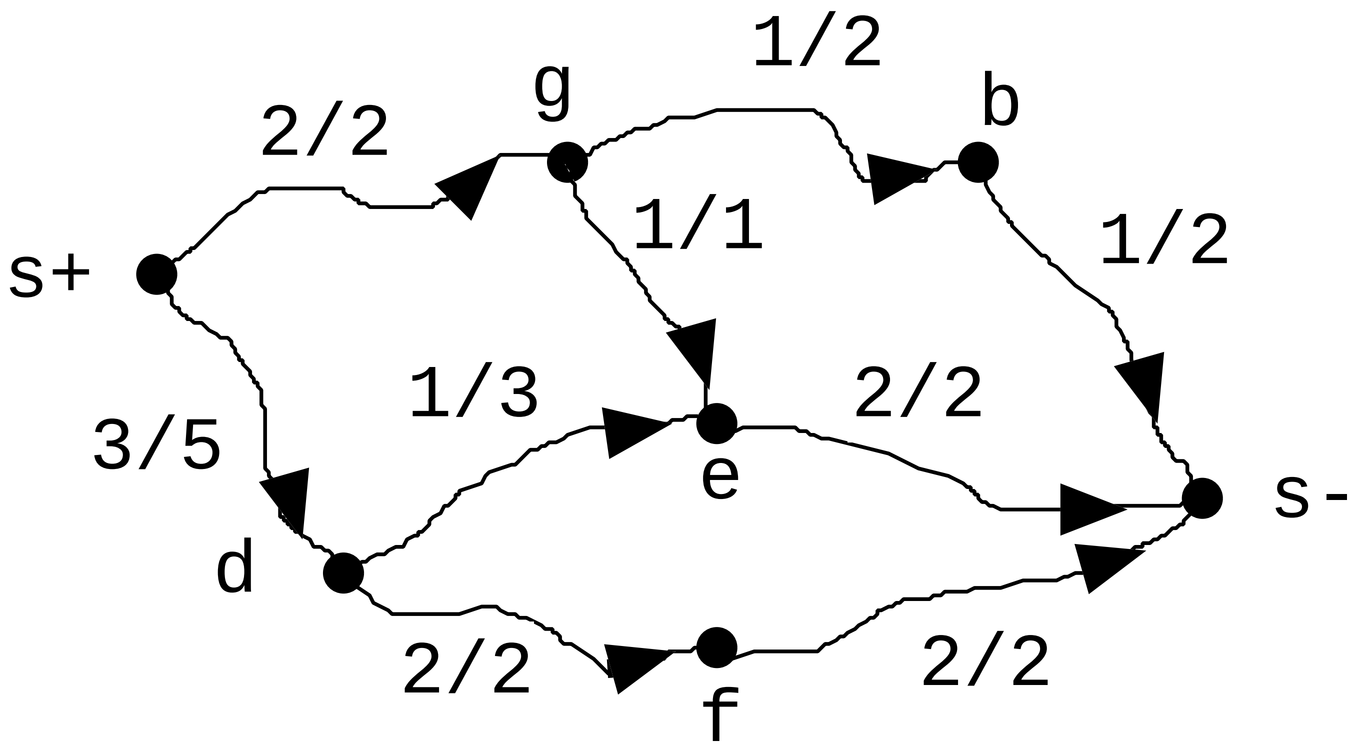
$$\partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-) \tag{2.28}$$

が成り立つ. (2.28) の値をフロー φ の流量 (value, flow value) といい, $v^*(\varphi)$ と書くことにする.

フローの流量の例



フローの流量の例



$$v^*(\varphi) = 5.$$

最大流問題

- 与えられたネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c)$ に対して, $\mathcal{N}$ 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び,

最大流問題

- 与えられたネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して, $\mathcal{N}$ 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを**最大フロー (最大流)** (maximum flow) と呼び,
- 最大フローを求める問題を**最大フロー問題** (maximum flow problem) と呼ぶ.

最大流問題

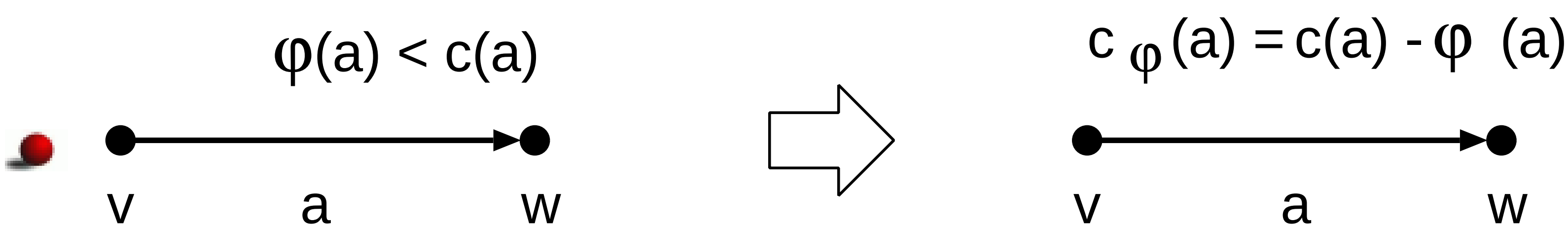
- 与えられたネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c)$ に対して, $\mathcal{N}$ 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び,
- 最大フローを求める問題を最大フロー問題 (maximum flow problem) と呼ぶ.
- 最大流問題に対するアルゴリズムとしてフォード-ファルカーソンのアルゴリズムがある. このアルゴリズムでは, 以下に説明する補助ネットワークを用いる.

補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$ は以下のように構成される.

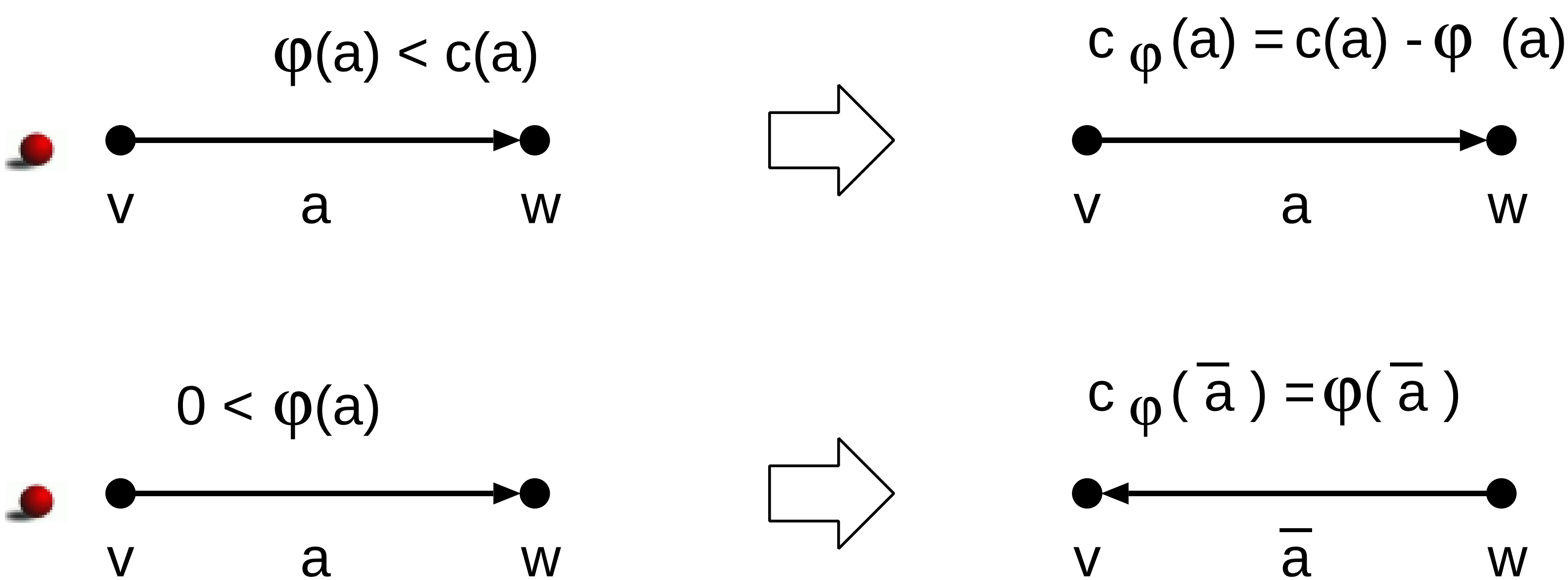
補助ネットワーク$\mathcal{N}_\varphi$

ネットワーク$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$上のフロー$\varphi$に対して, 補助ネットワーク$\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$は以下のように構成される.

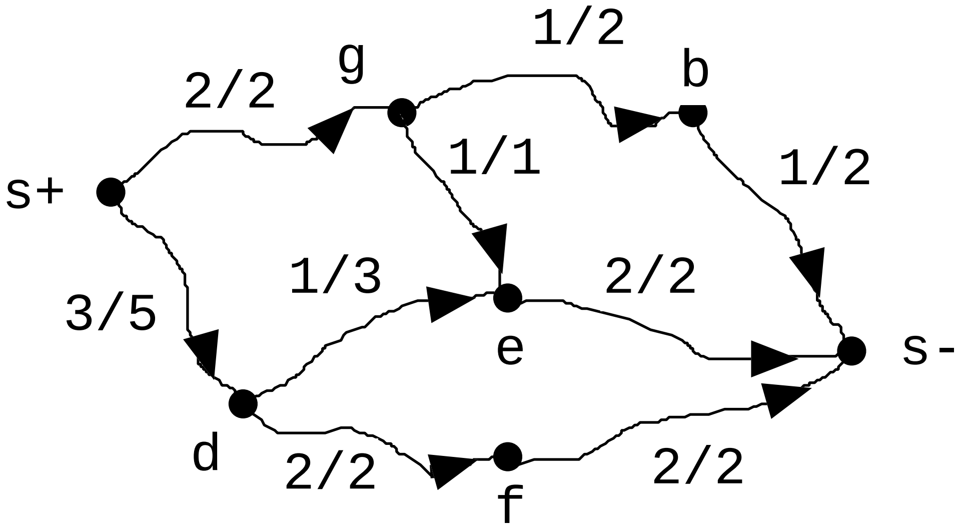


補助ネットワーク$\mathcal{N}_\varphi$

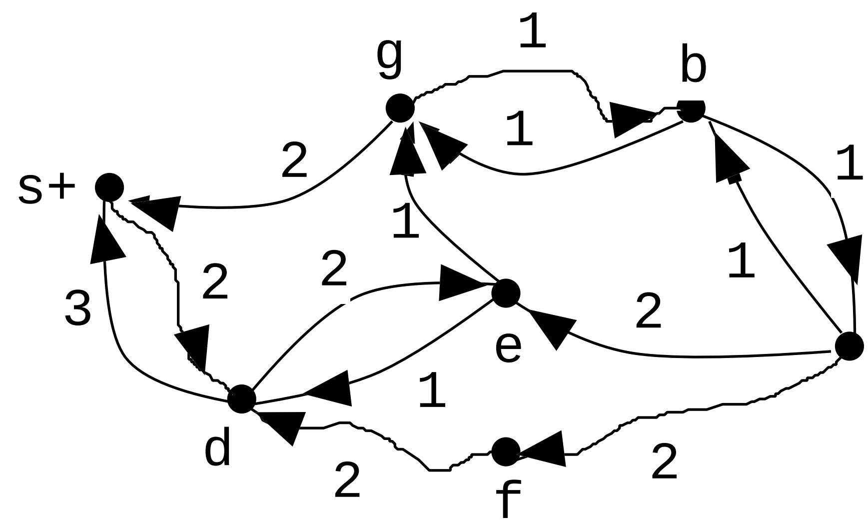
ネットワーク$\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフローφに対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$ は以下のように構成される.



補助ネットワークの例

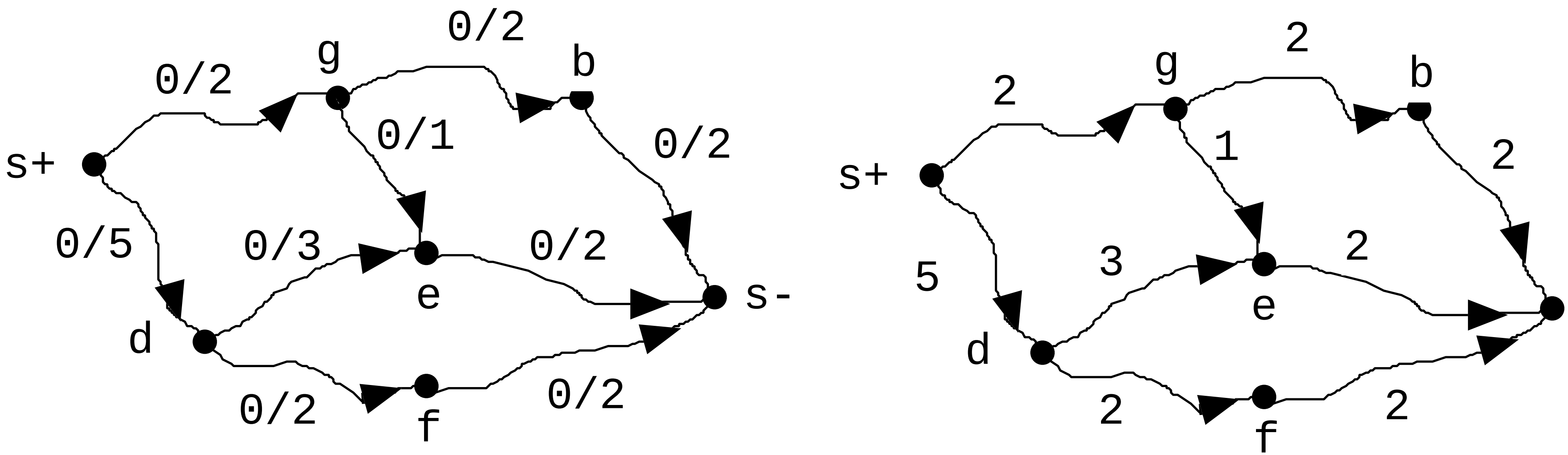


φ(a)/c(a)



$c_{\varphi}(a)$

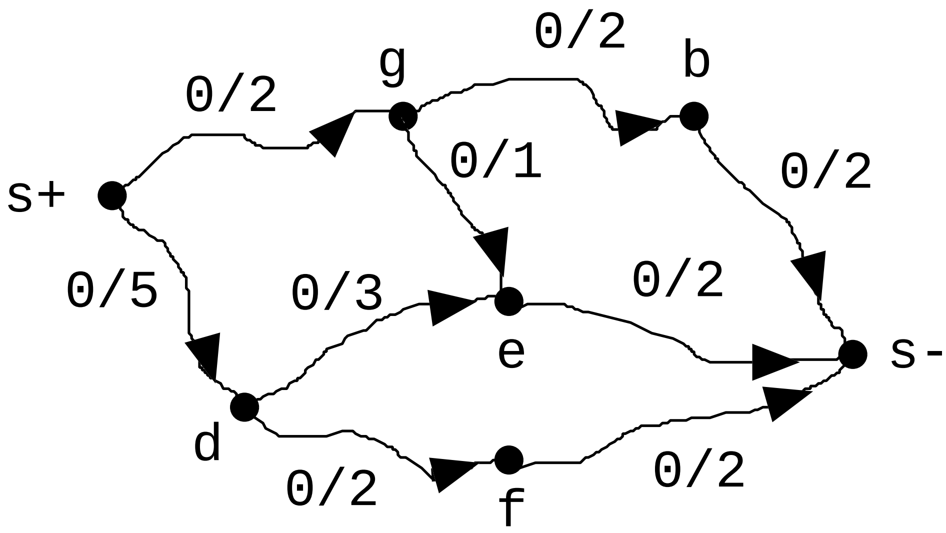
フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (1



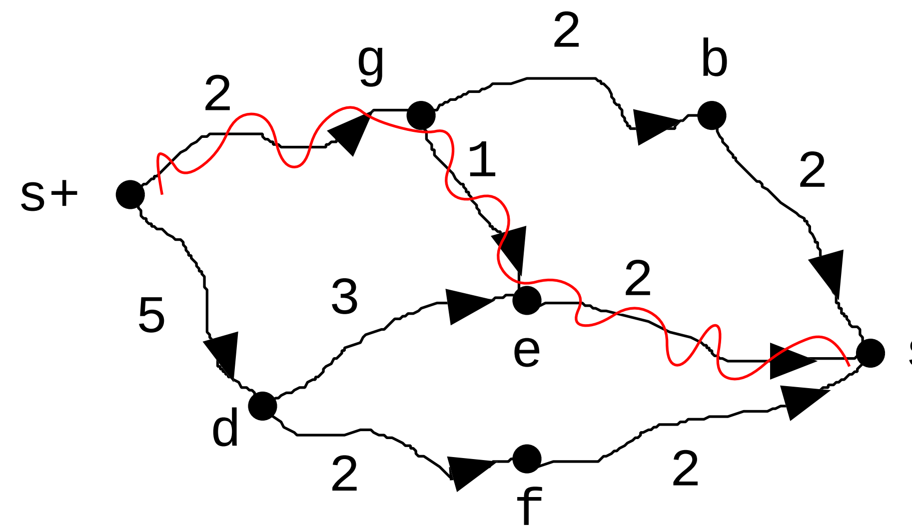
φ(a)/c(a)

$c_\varphi(a)$

フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (1

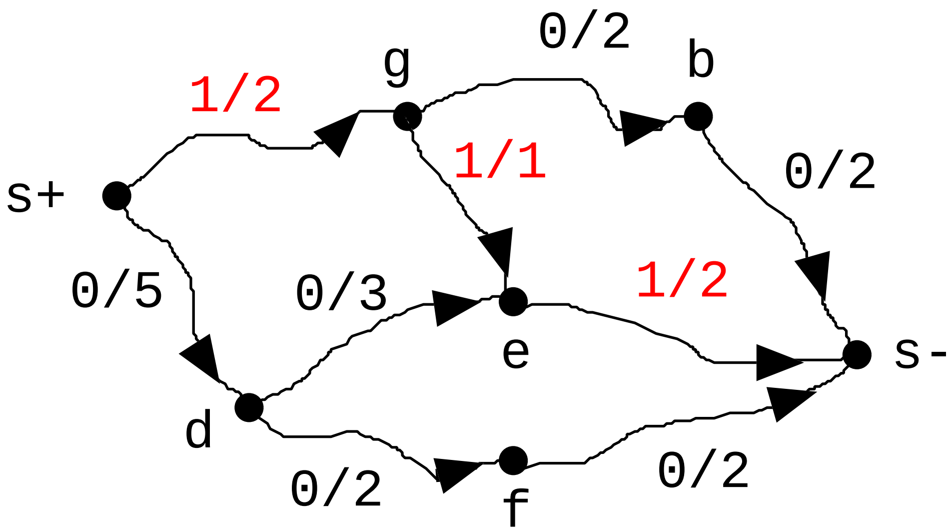


φ(a)/c(a)

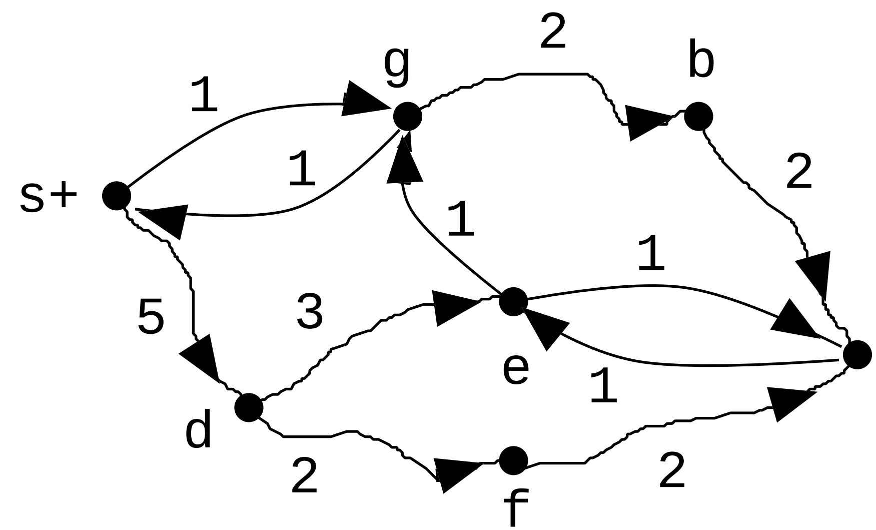


$c_{\varphi}(a)$

フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (2

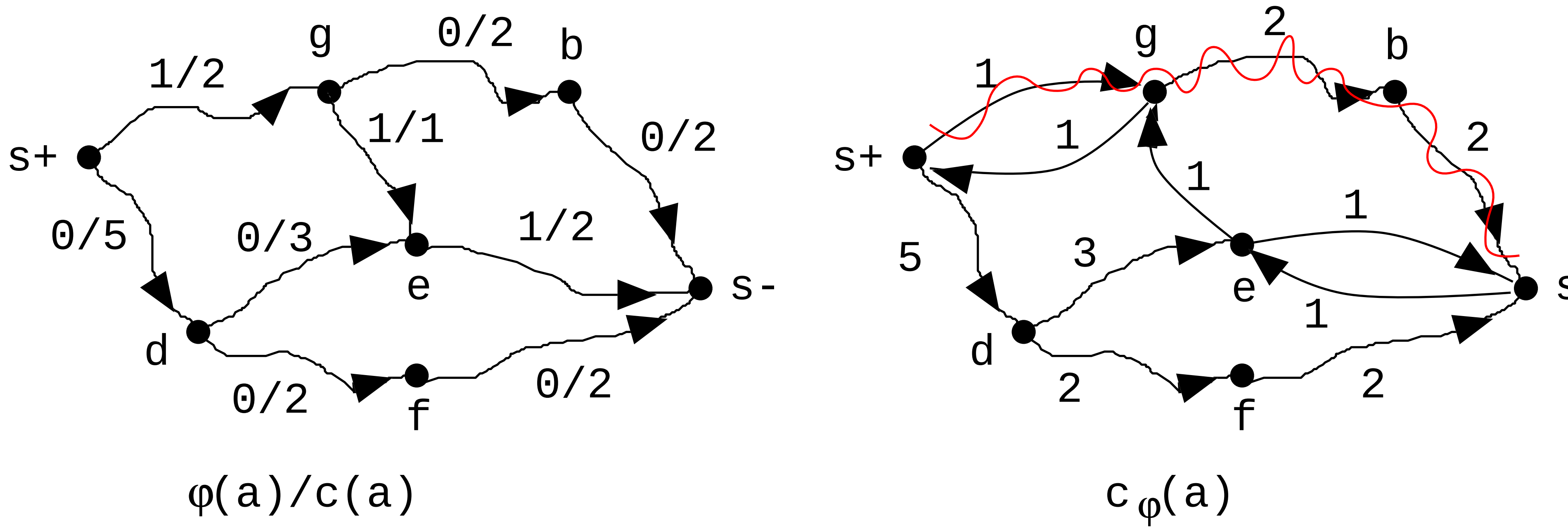


φ(a)/c(a)

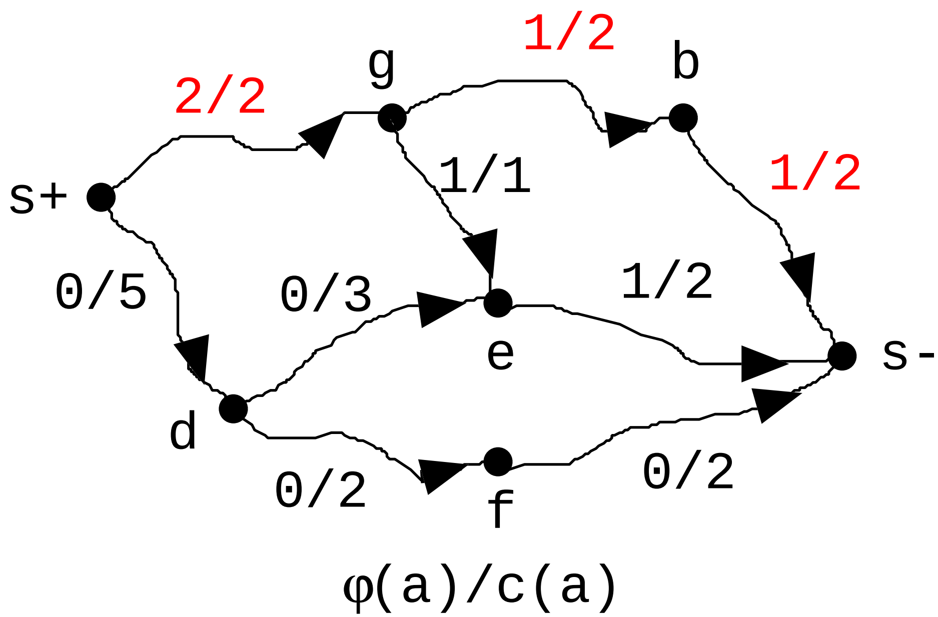


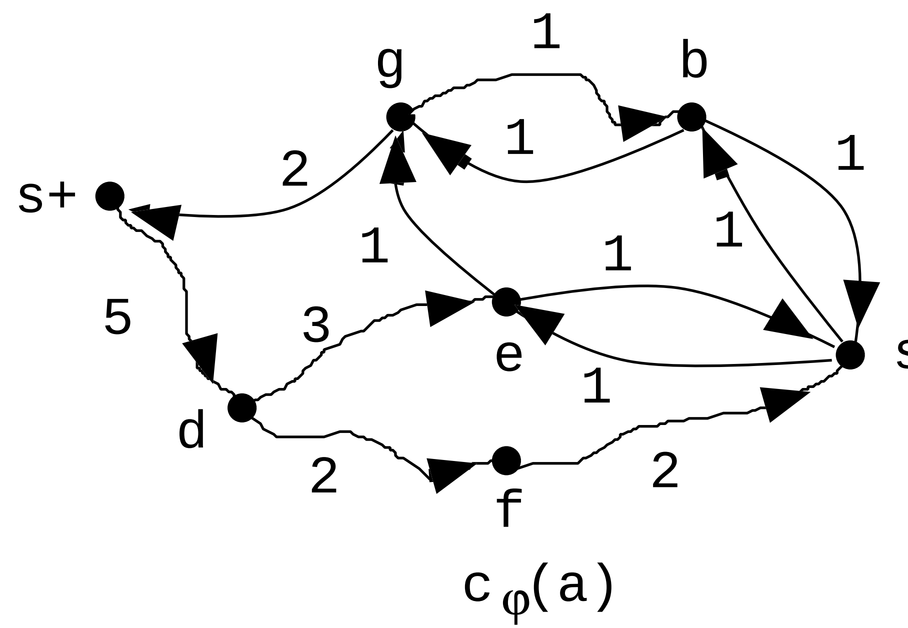
$c_{\varphi}(a)$

フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (2

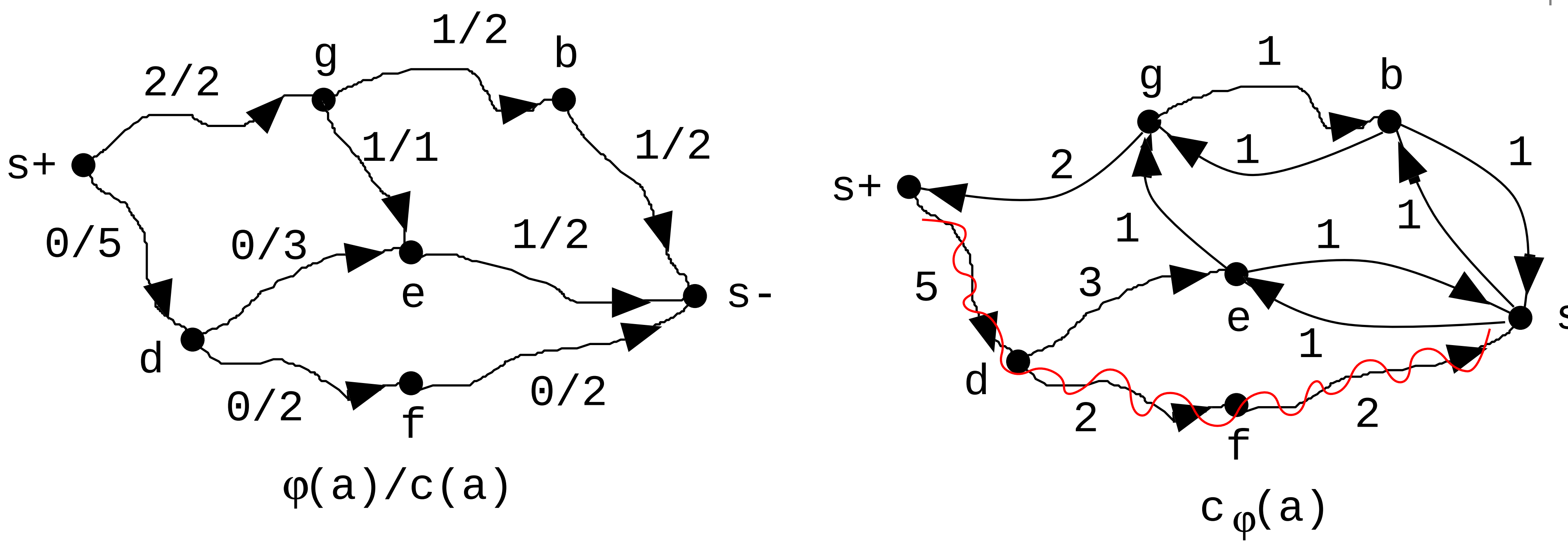


フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (3

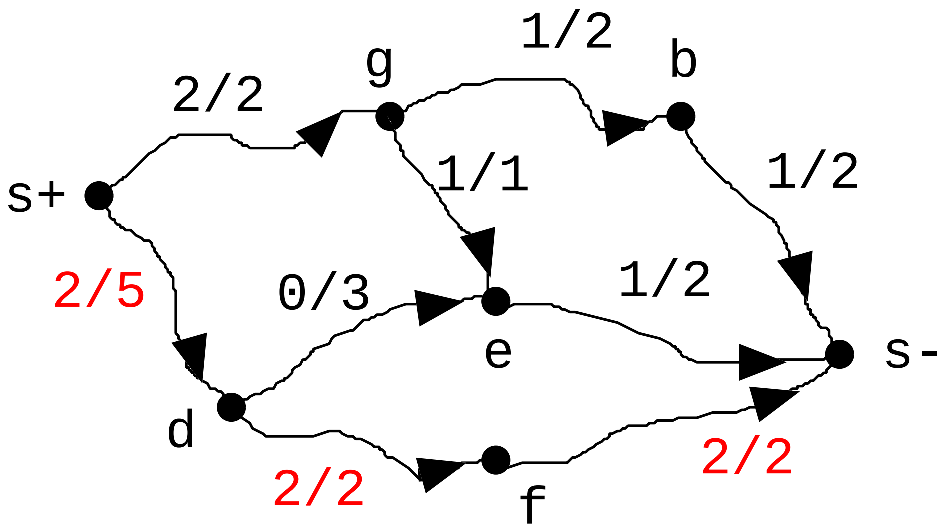




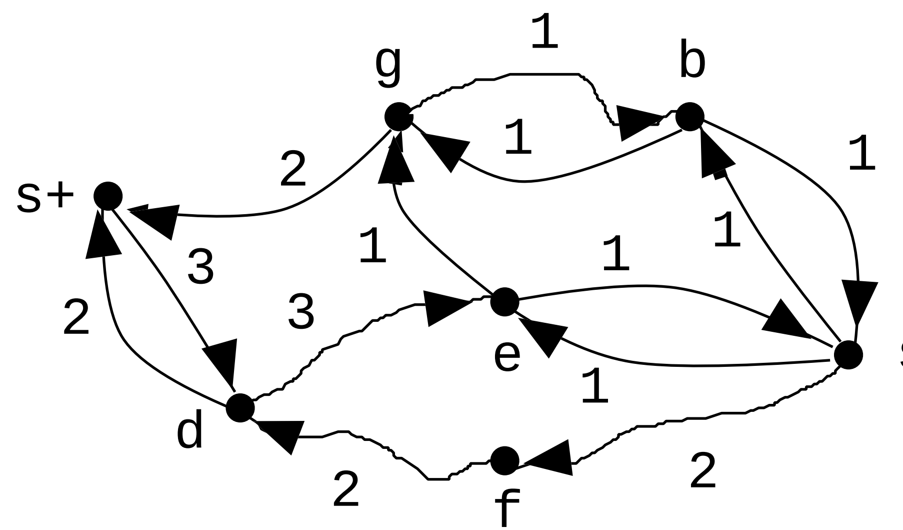
フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (3



フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (4

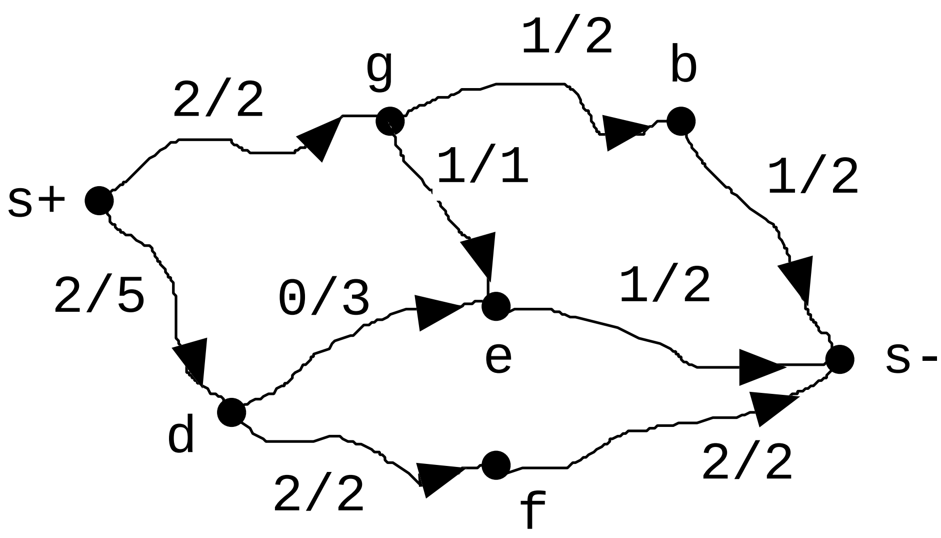


φ(a)/c(a)

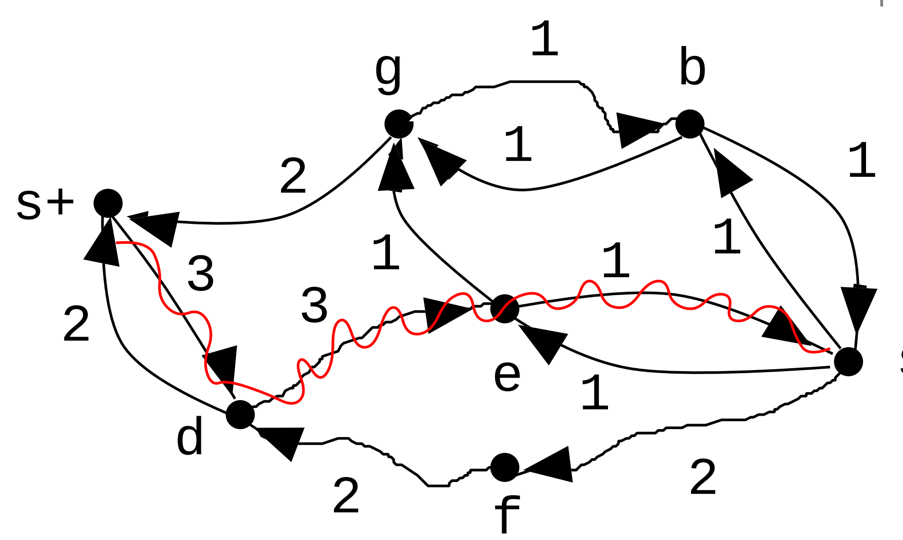


c φ(a)

フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (4

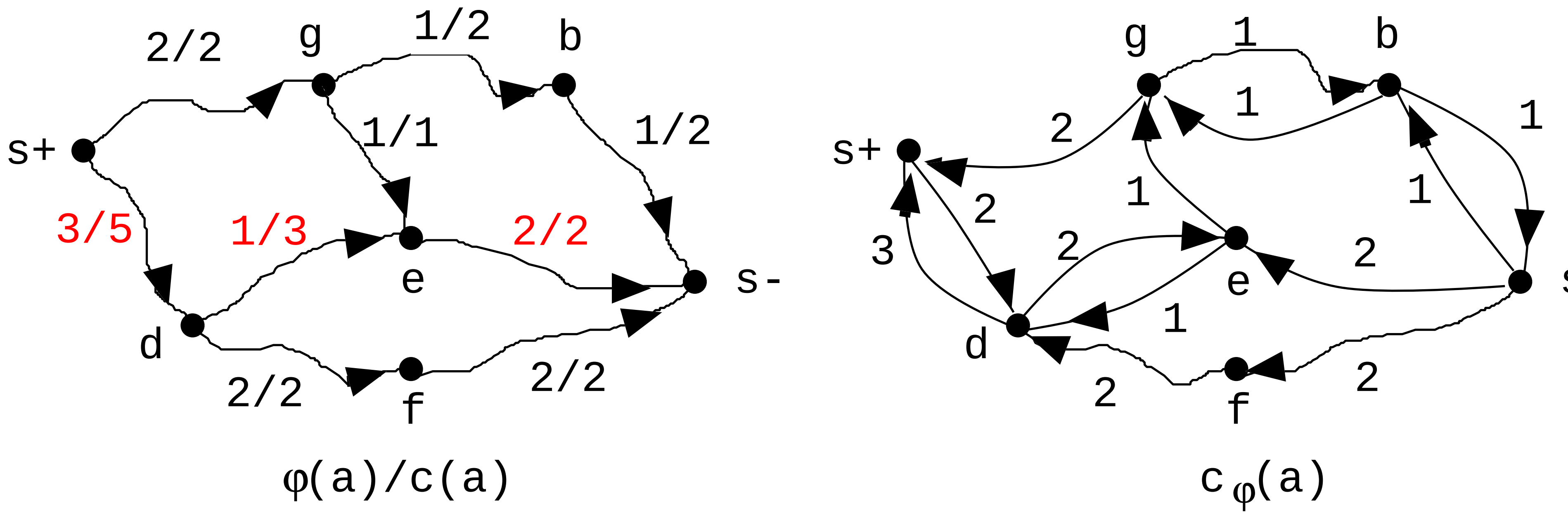


φ(a)/c(a)

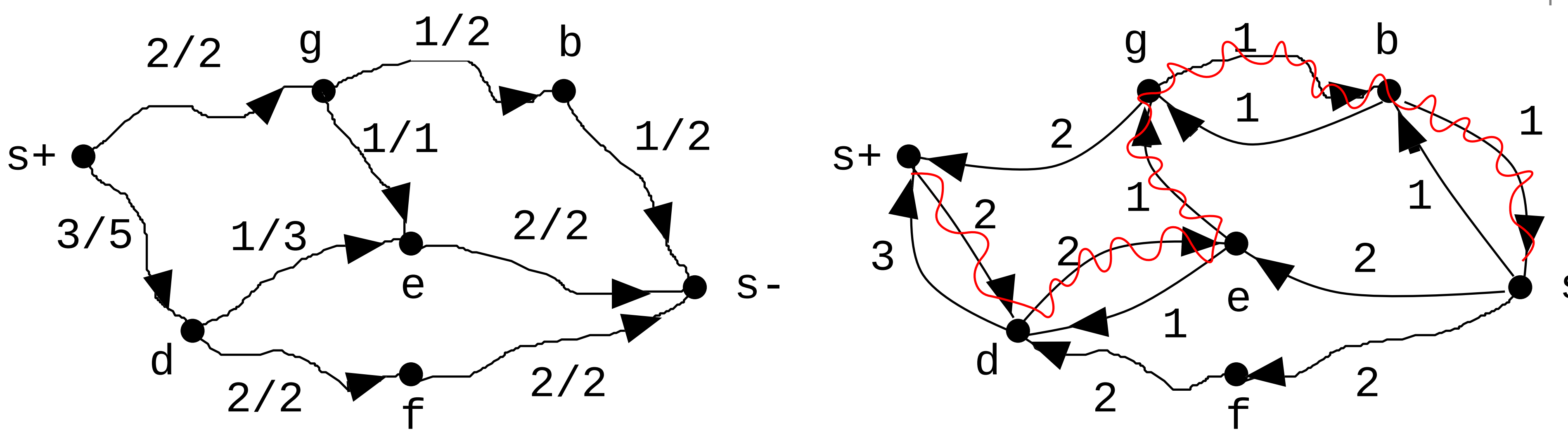


$c_{\varphi}(a)$

フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (5



フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (5



φ(a)/c(a)

$c_{\varphi}(a)$

フォード-ファルカーソンのアルゴリズム (6