

グラフとネットワーク (第10回)

安藤 和敏

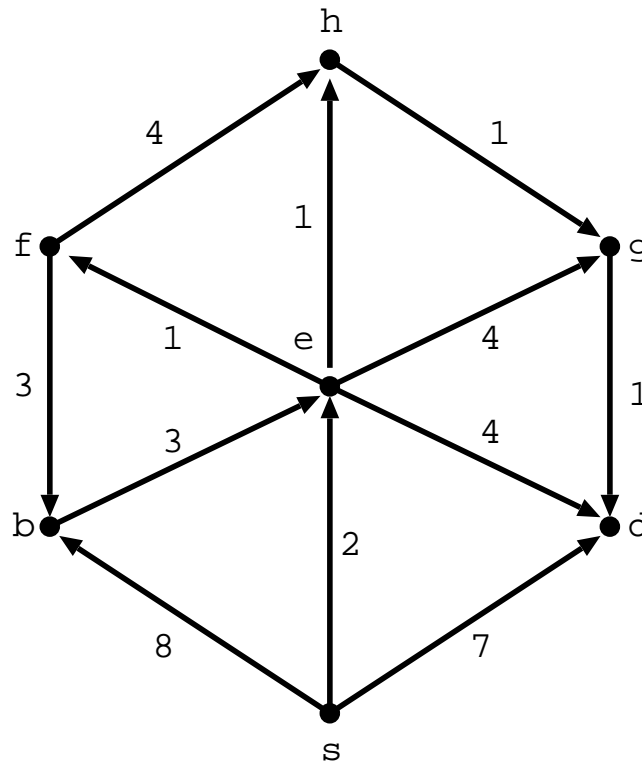
ando@sys.eng.shizuoka.ac.jp

静岡大学工学部

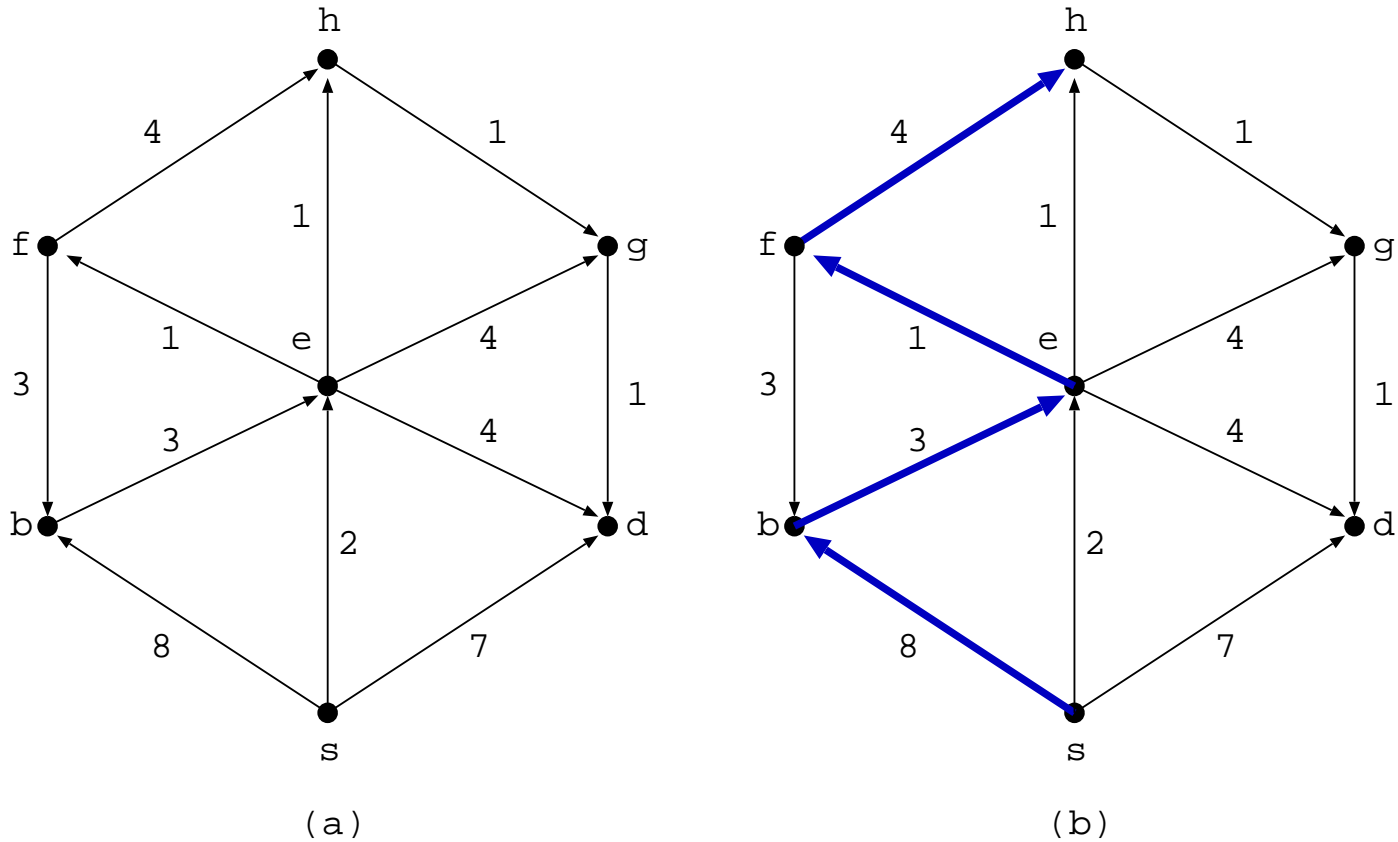
2.1.2 最短路問題

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), l)$

有向グラフ $G = (V, A)$ の各枝 a に対して, その長さ $l(a)$ を指定する関数 $l: A \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられている.



有向道



(a)

(b)

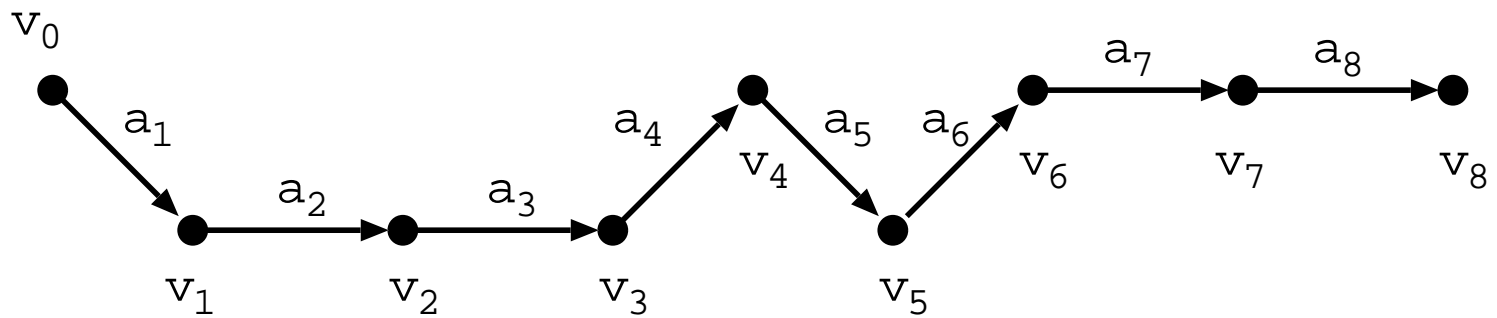
(a) ネットワーク \mathcal{N}
(b) \mathcal{N} の s から h への有向道 (青い枝)

有向道の長さ

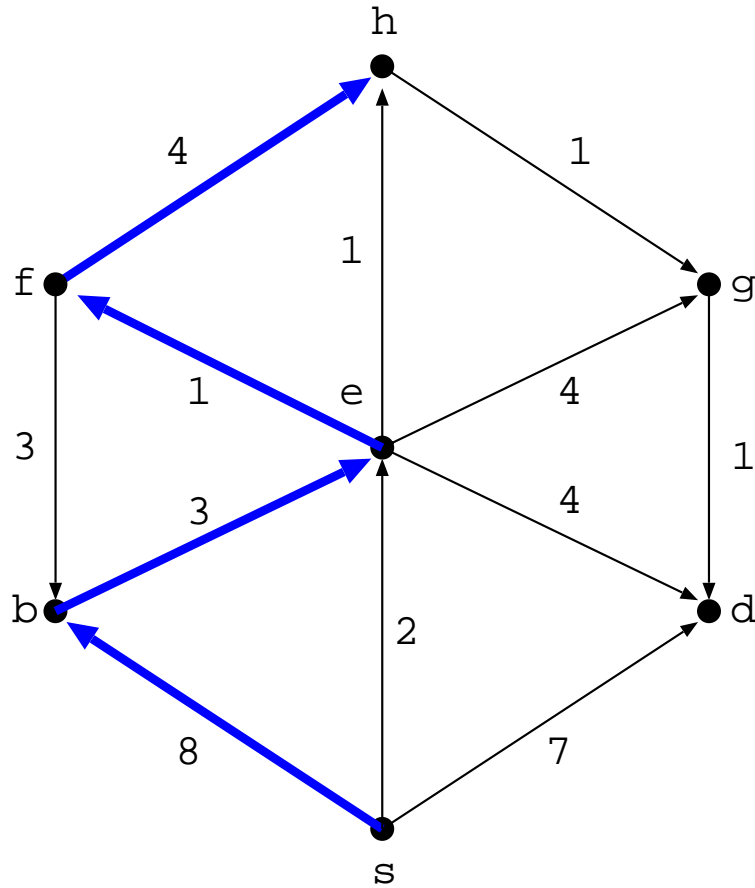
ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), l)$ が与えられているとする. G 中の有向道

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \dots, a_k, v_k)$$

に対して, $\sum_{i=1}^k l(a_i)$ を P の長さと呼ぶ.

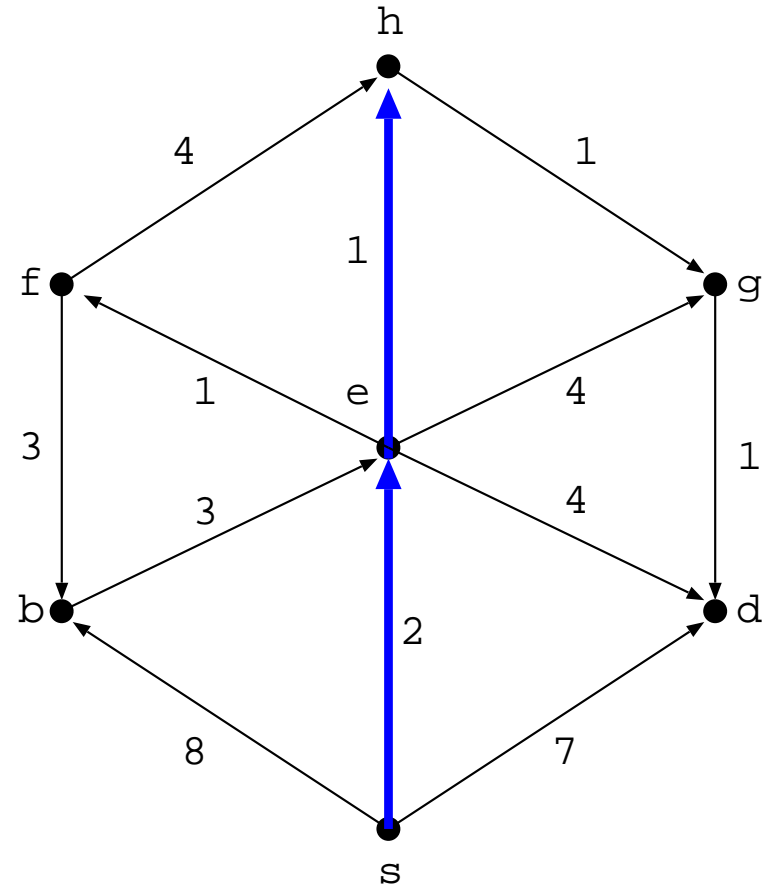


有向道の長さ (例)



(a)

長さ = 16



(b)

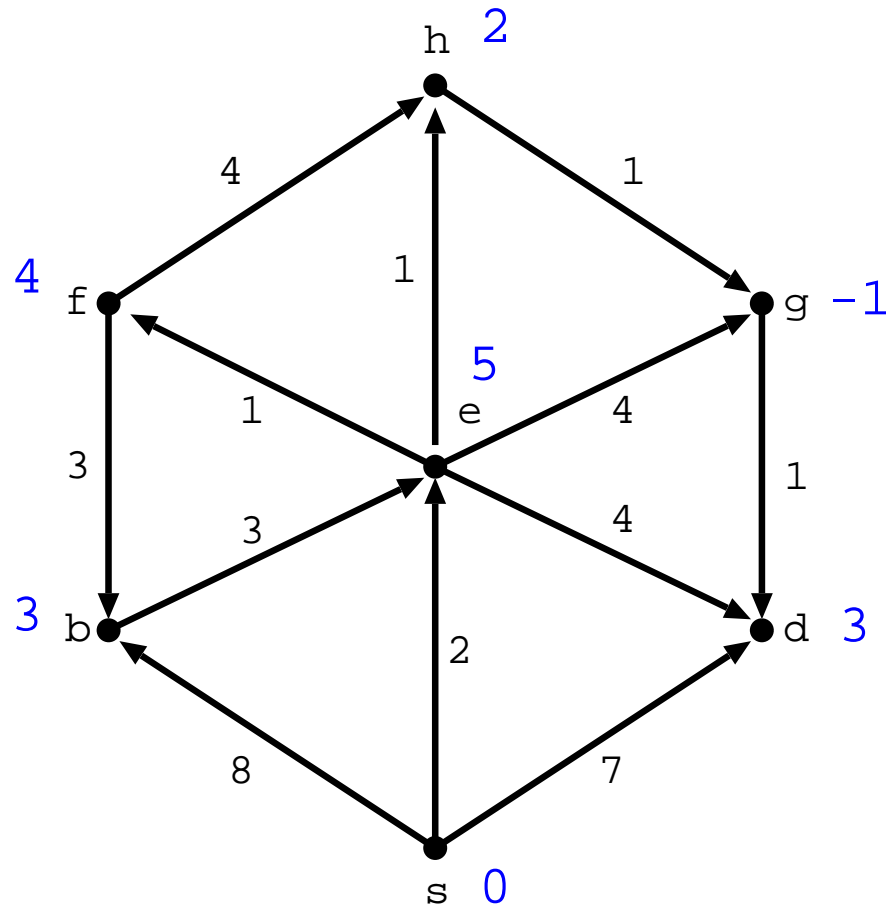
長さ = 3

最短路問題

最短路問題とは、与えられた2点 $u, v \in V$ に対して、 u から v への長さが最小の有向道を見付ける問題である。

ポテンシャル

点集合上で定義された関数 $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ をポテンシャルと呼ぶ。

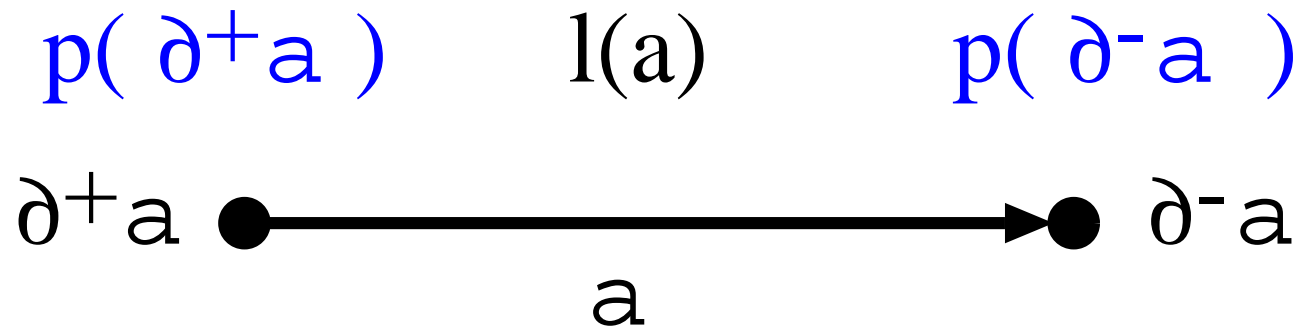


l_p

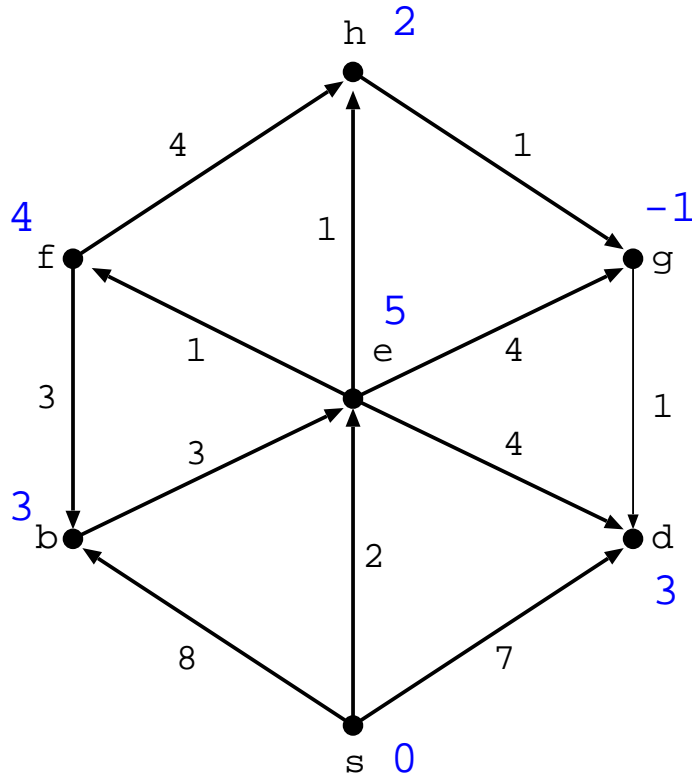
任意なポテンシャル $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,
 $l_p: A \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \quad (2.11)$$

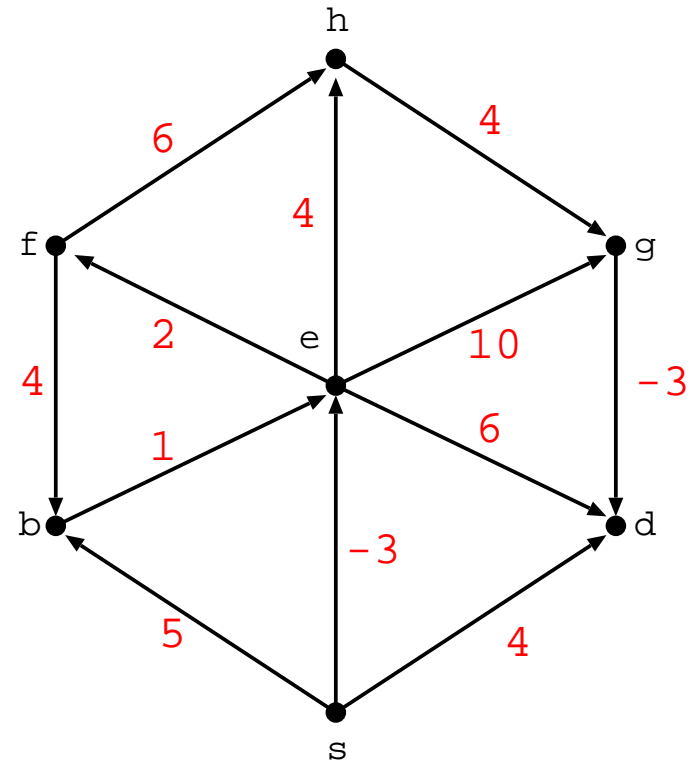
で定義する.



l_p の例



(a)



(b)

(a) ネットワーク \mathcal{N} とポテンシャル p ;
(b) $l_p: A \rightarrow \mathbb{R}$

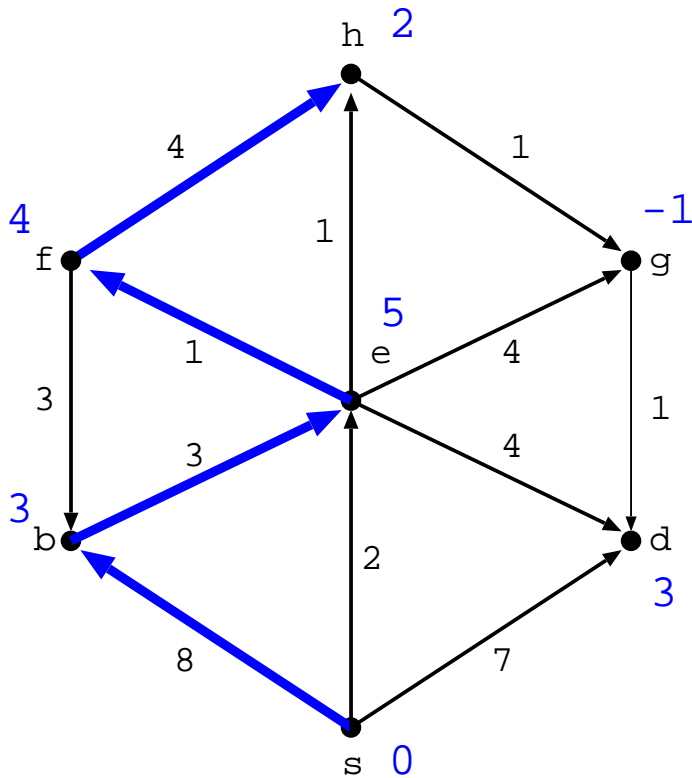
補題 2.1

\mathcal{N} 中の点 u から点 v への任意な有向道 P に対して,

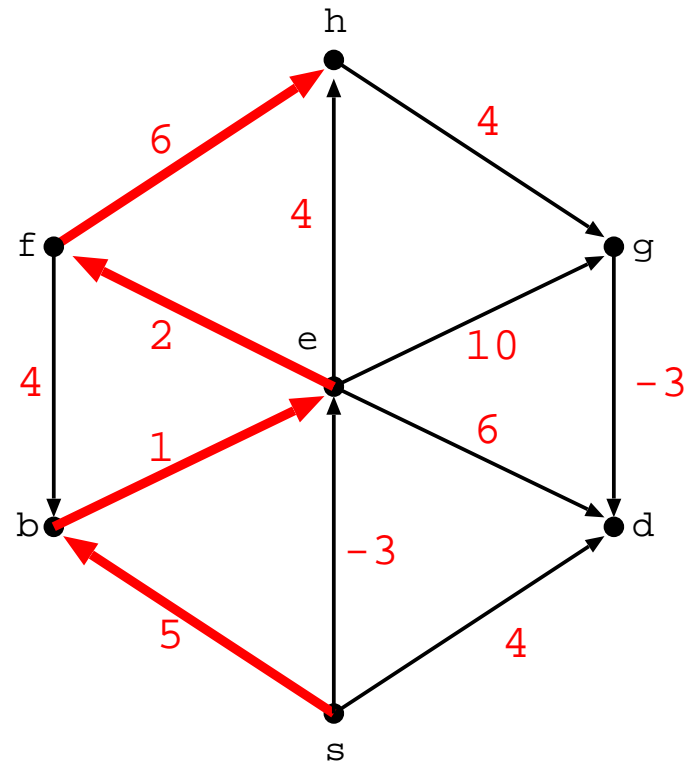
$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v) \quad (2.12)$$

が成り立つ。

補題2.1の説明



(a)



(b)

(a) $l(P) = 16;$

(b) $l_p(P) = l(P) + p(a) - p(h)$

注意 2.a

道 P があるポテンシャル p に対する l_p に関しての点 u から点 v への最短路であれば, P は l に関して u から v への最短路である.

補題 2.2

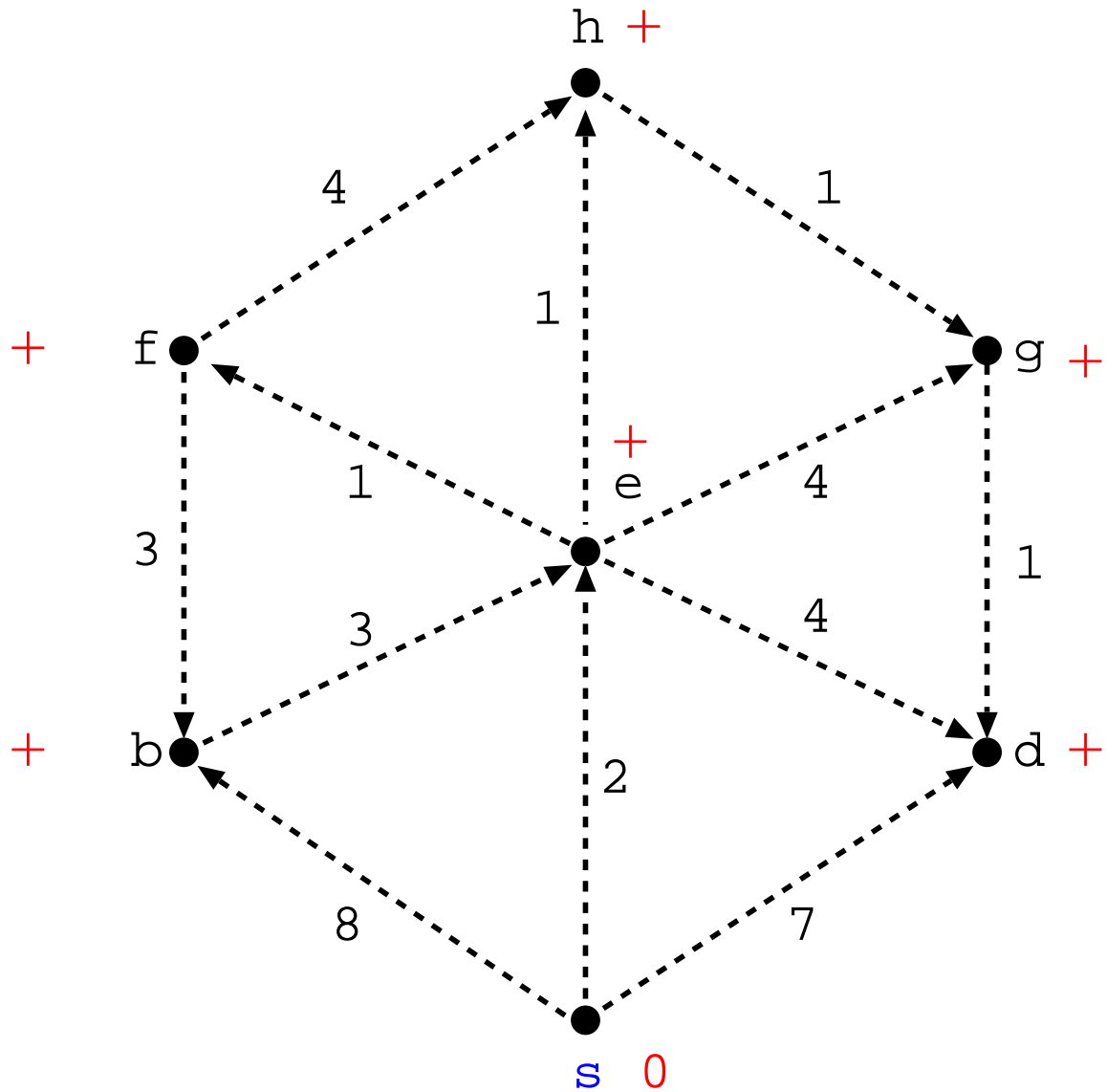
点 u から点 v への有向道 P に対して, あるポテンシャル $p: V \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, (2.11) で定義される l_p が非負関数であり, かつ, P 上の各枝 a に対して $l_p(a) = 0$ であるとする, P は点 u から点 v への最短路である.

ダイクストラ法

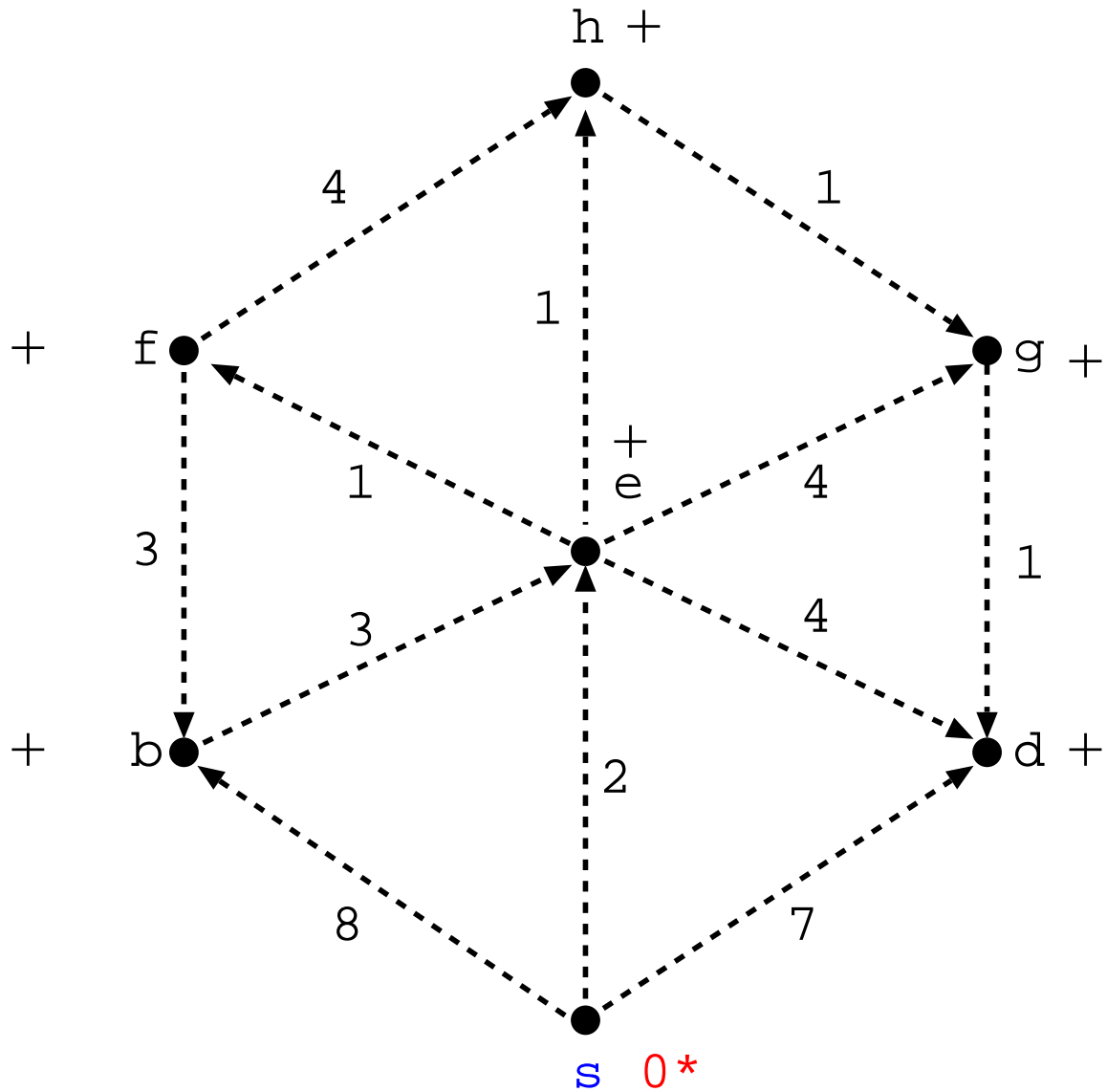
全ての枝の長さが非負の場合, 即ち $l(a) \geq 0$ ($a \in A$) の場合には, **ダイクストラ法**を用いることができる.

ダイクストラ法は, 与えられた1点から他の全ての点への最短路を求める.

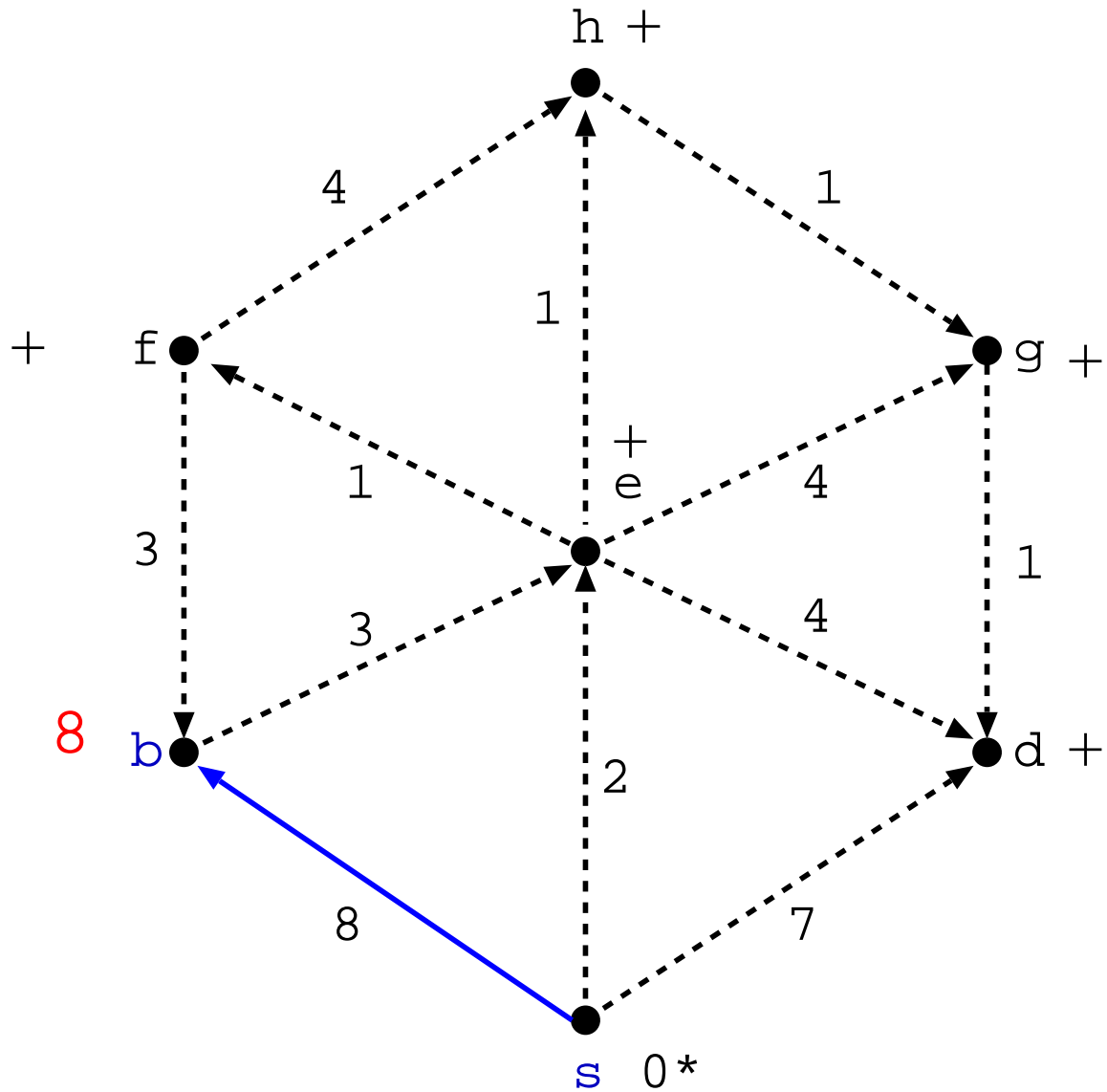
Step 1 終了時



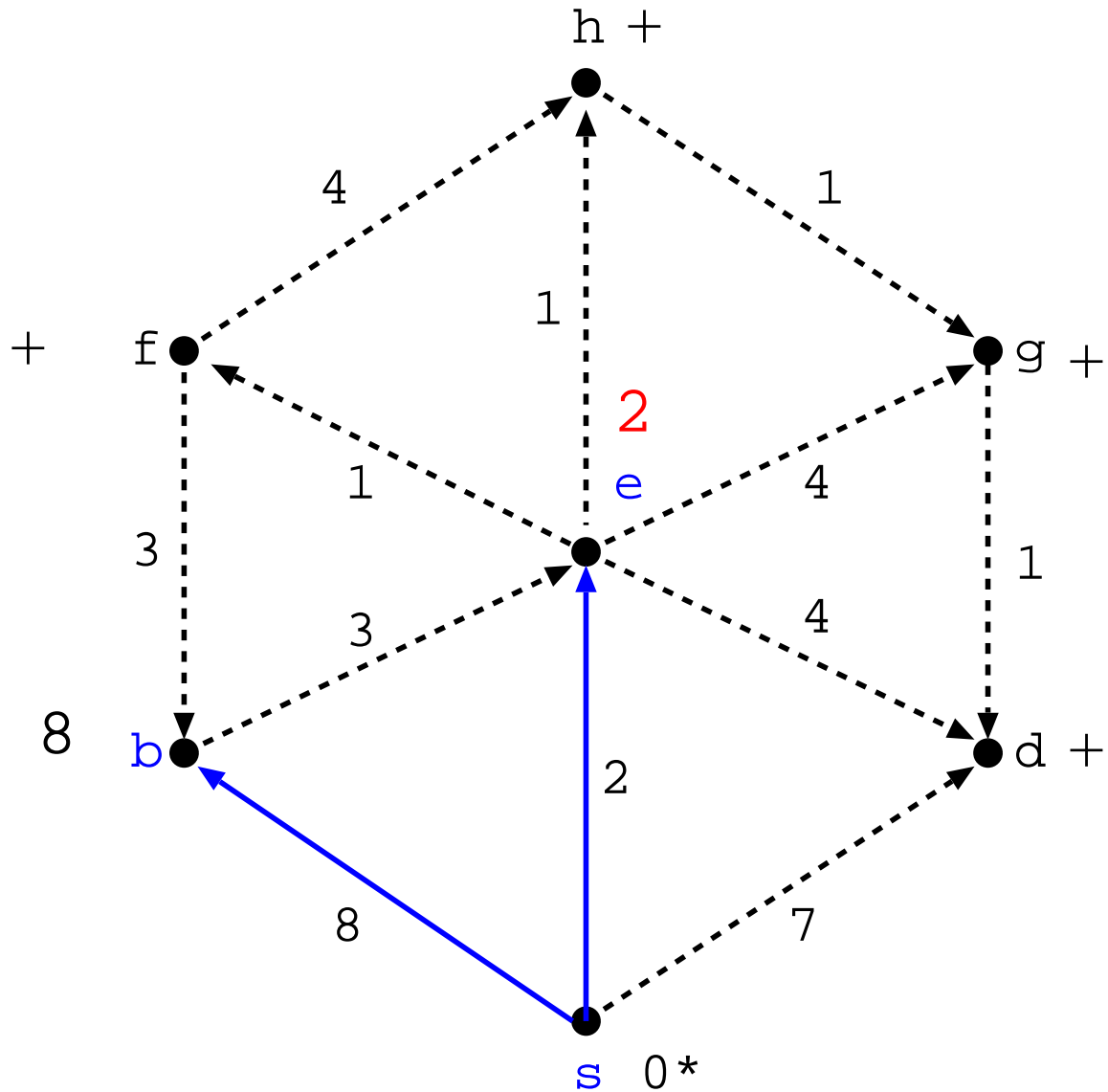
1回目のStep 2で w として s が選ばれたとき



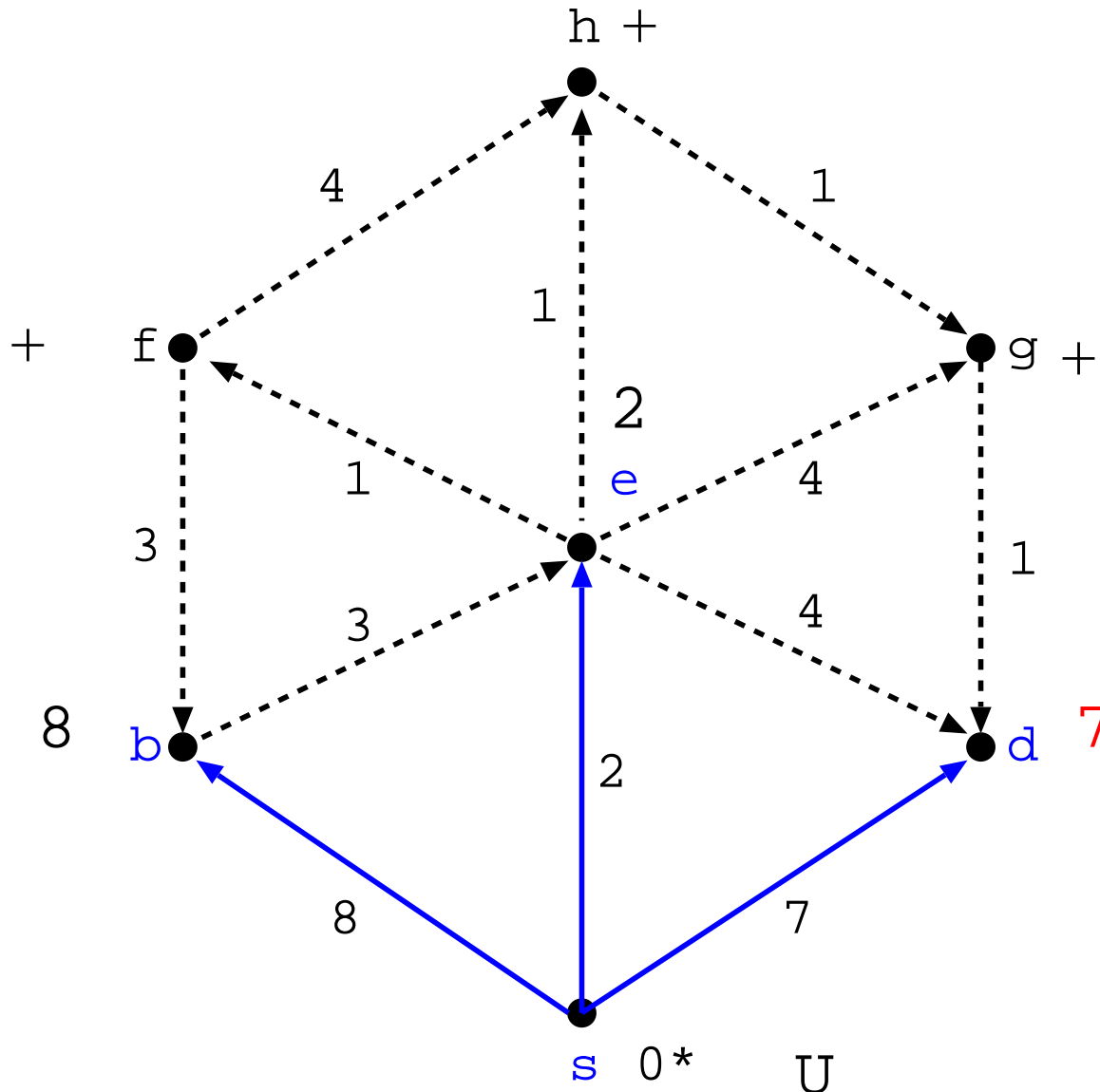
1回目のStep 2: $a = (s, b)$



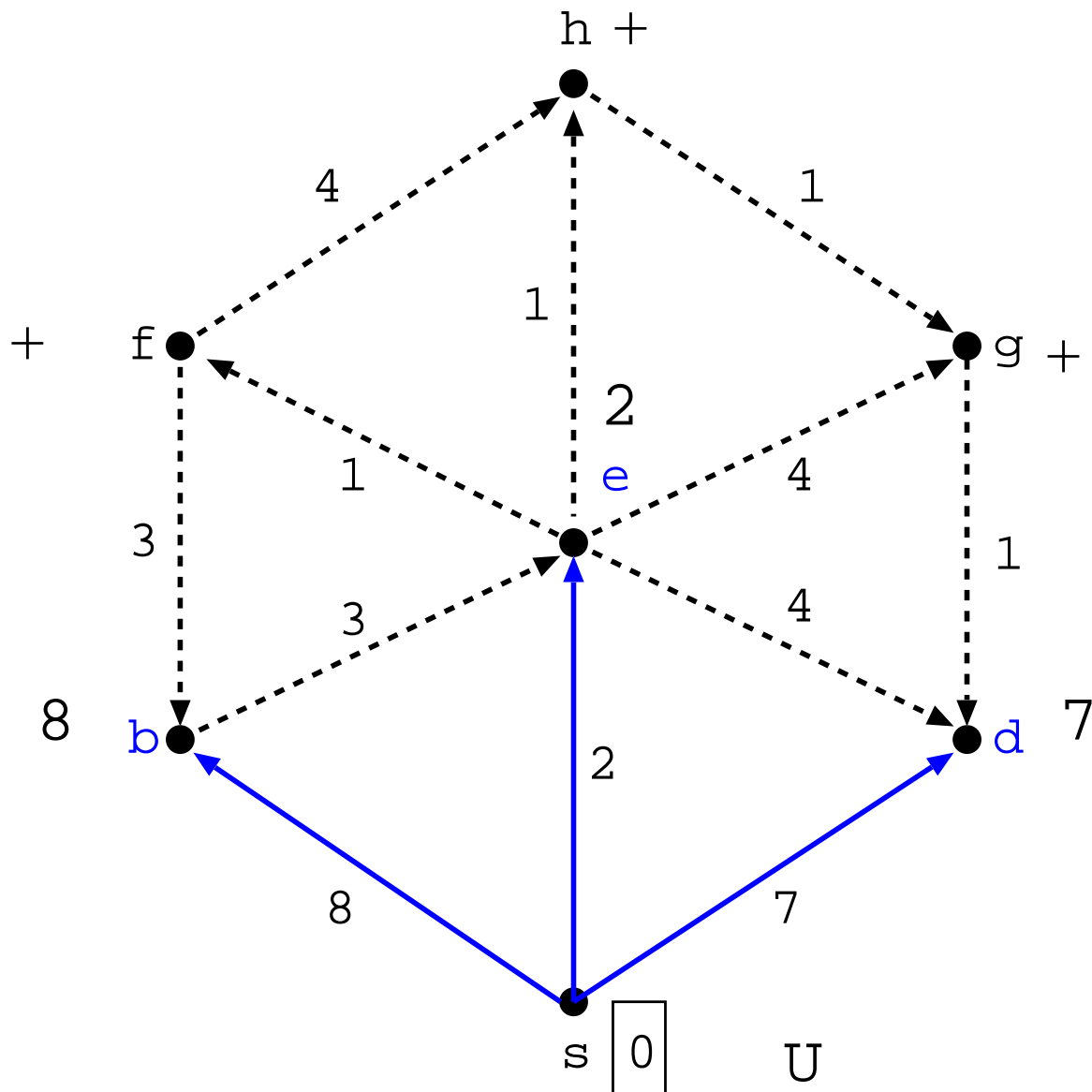
1回目のStep 2: $a = (s, e)$



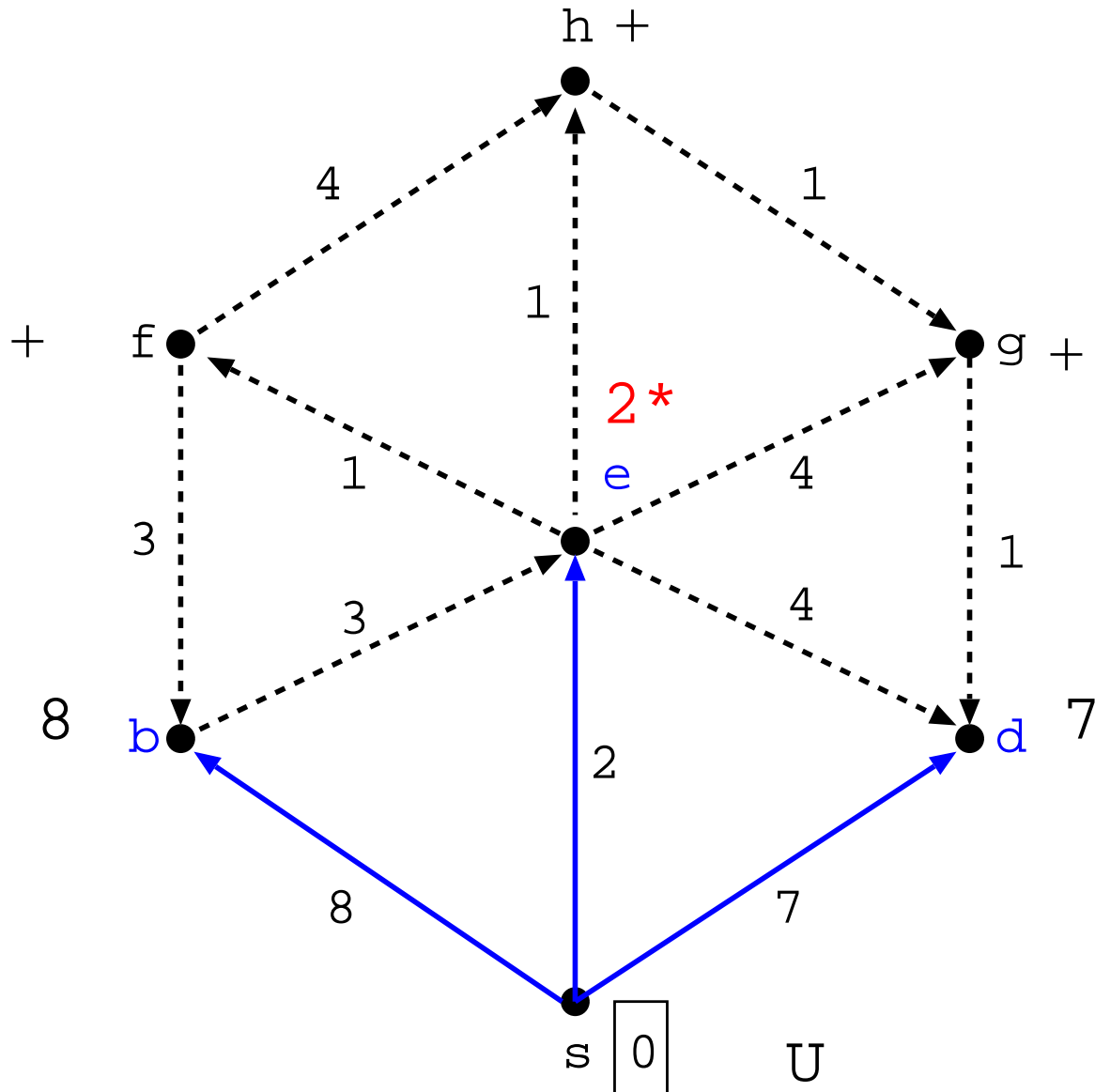
1回目のStep 2: $a = (s, d)$



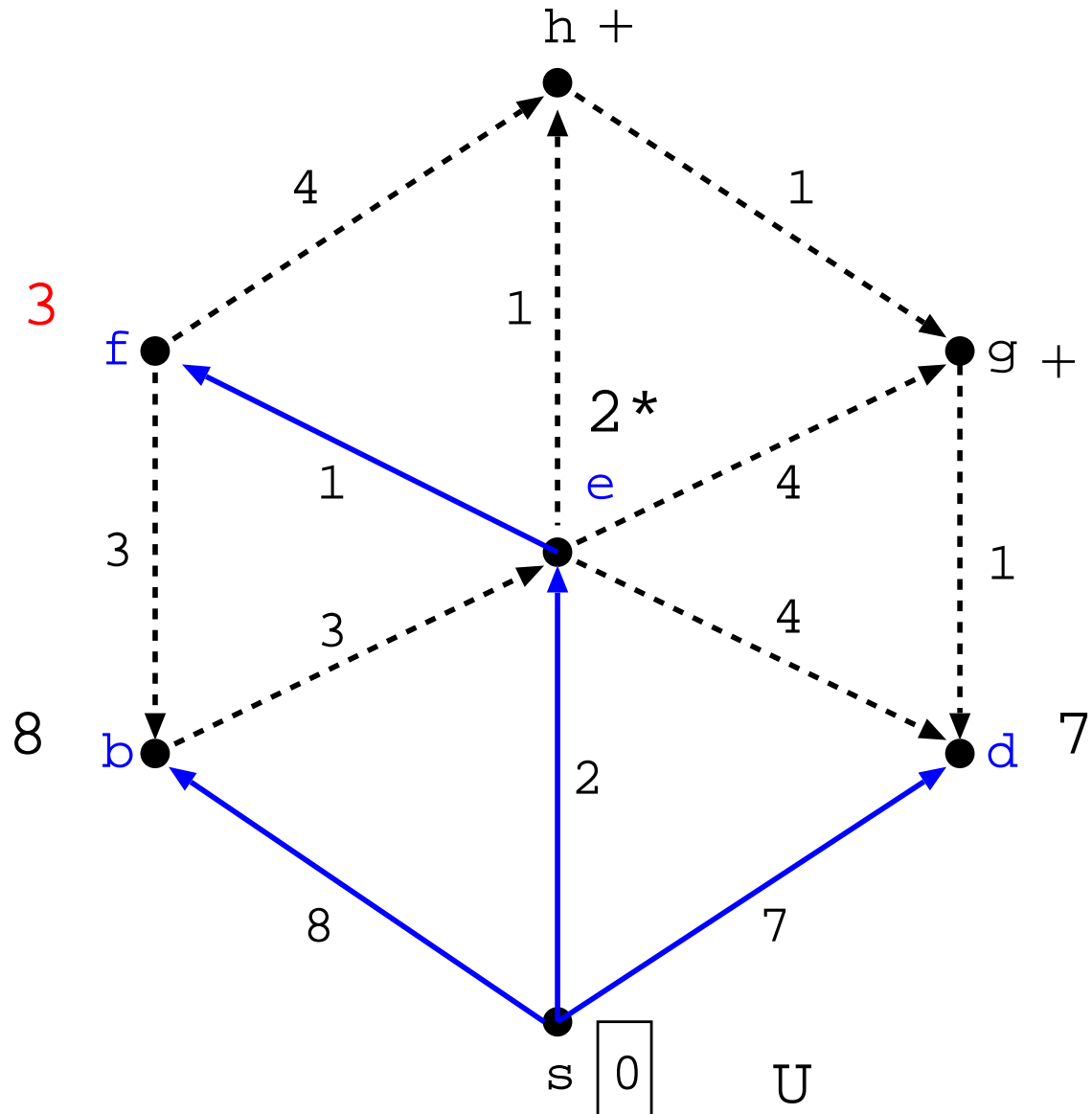
1回目の Step 3 終了時: $W = \{s\}, U = \{b, e, d\}$



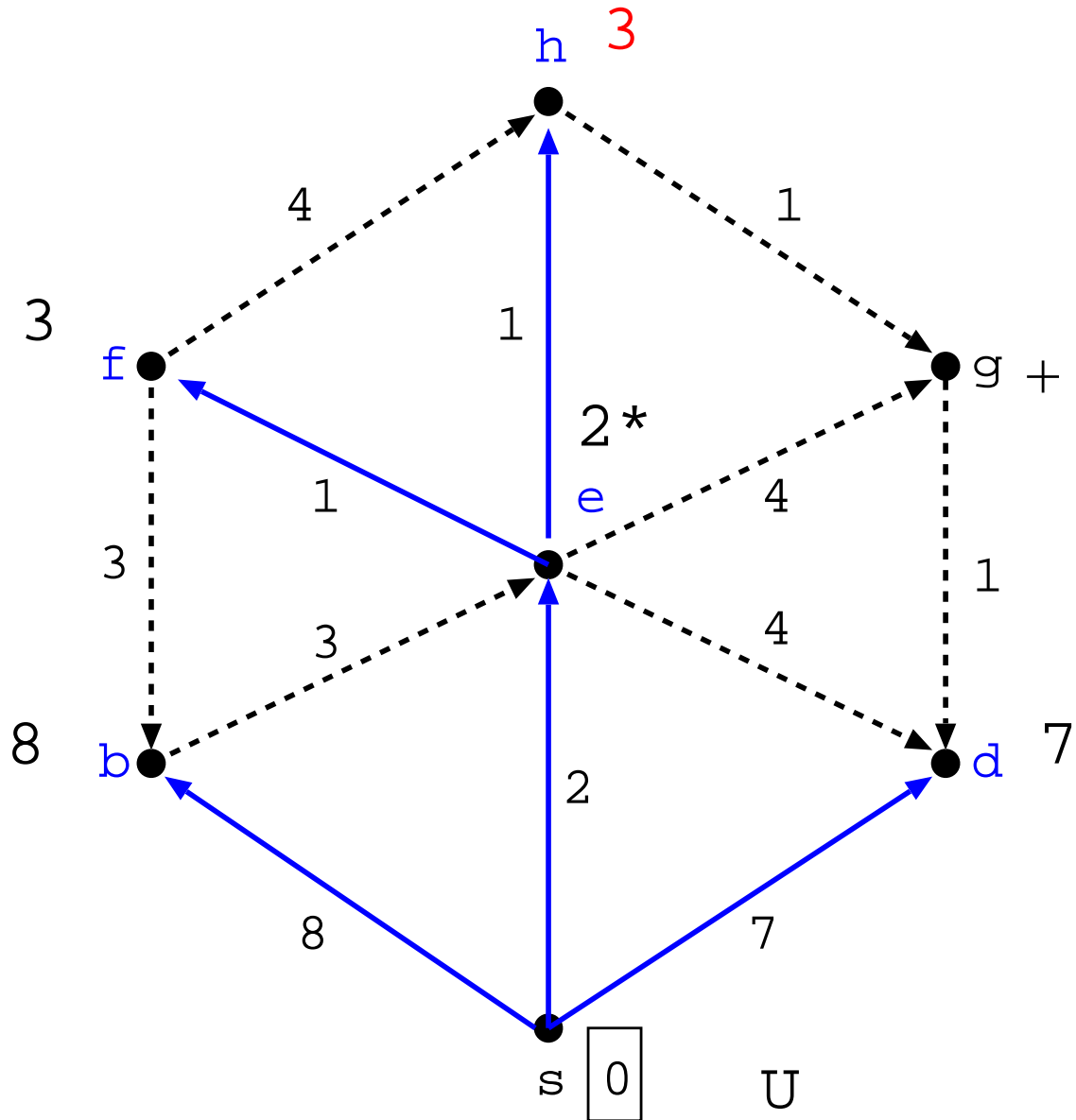
2回目の Step 2: w として e が選ばれたとき



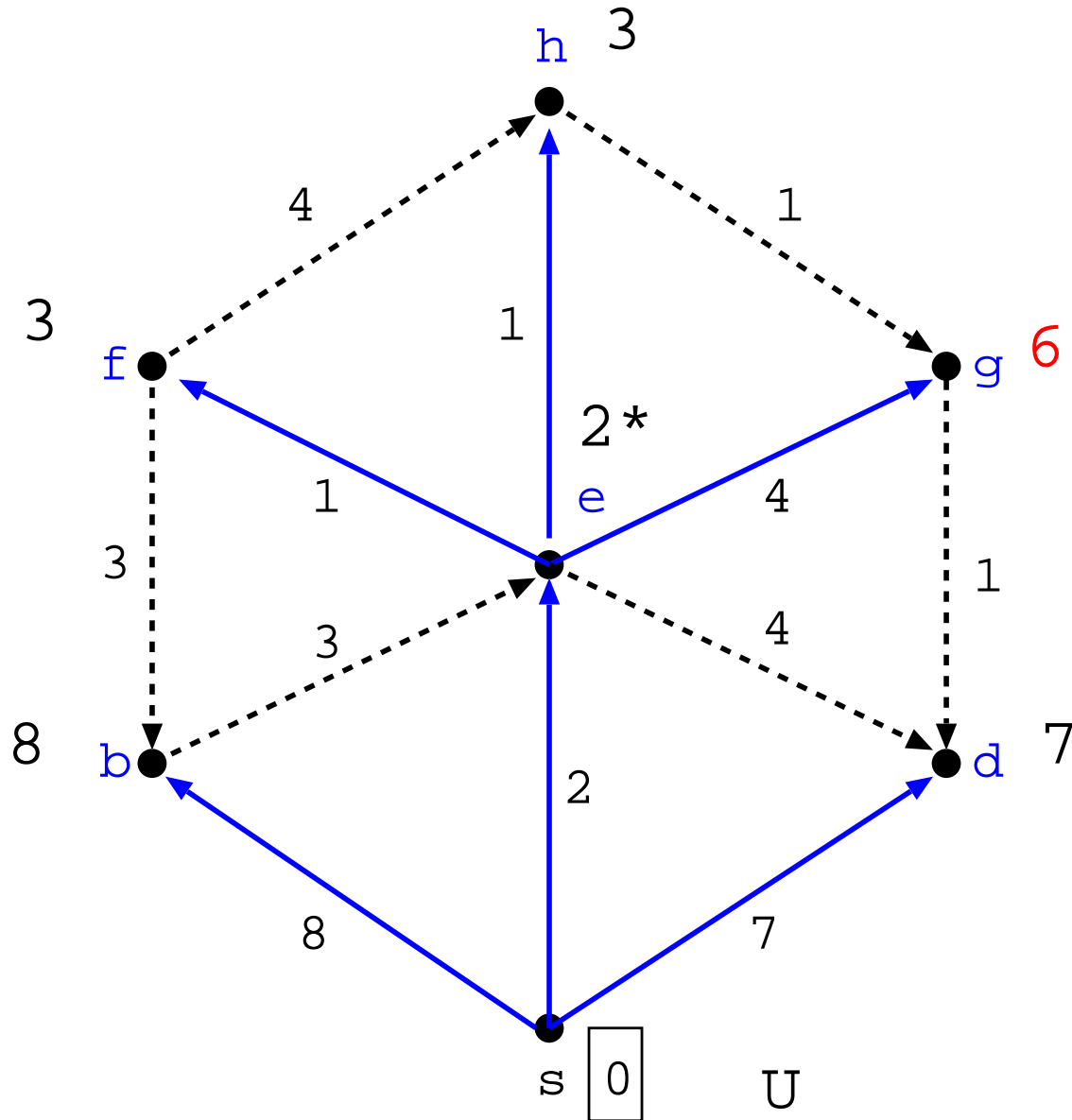
2回目のStep 2: $a = (e, f)$



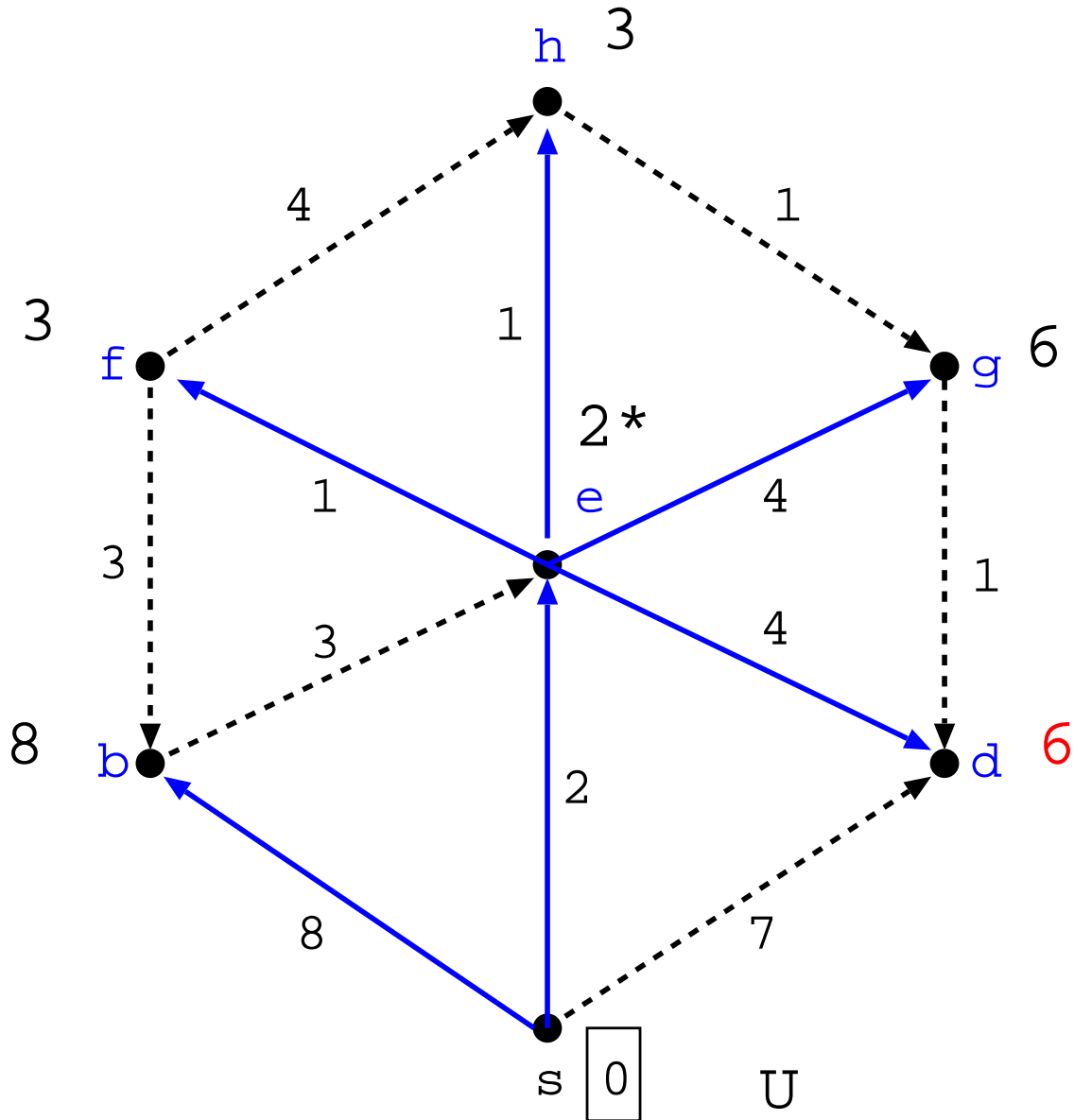
2回目の Step 2: $a = (e, h)$



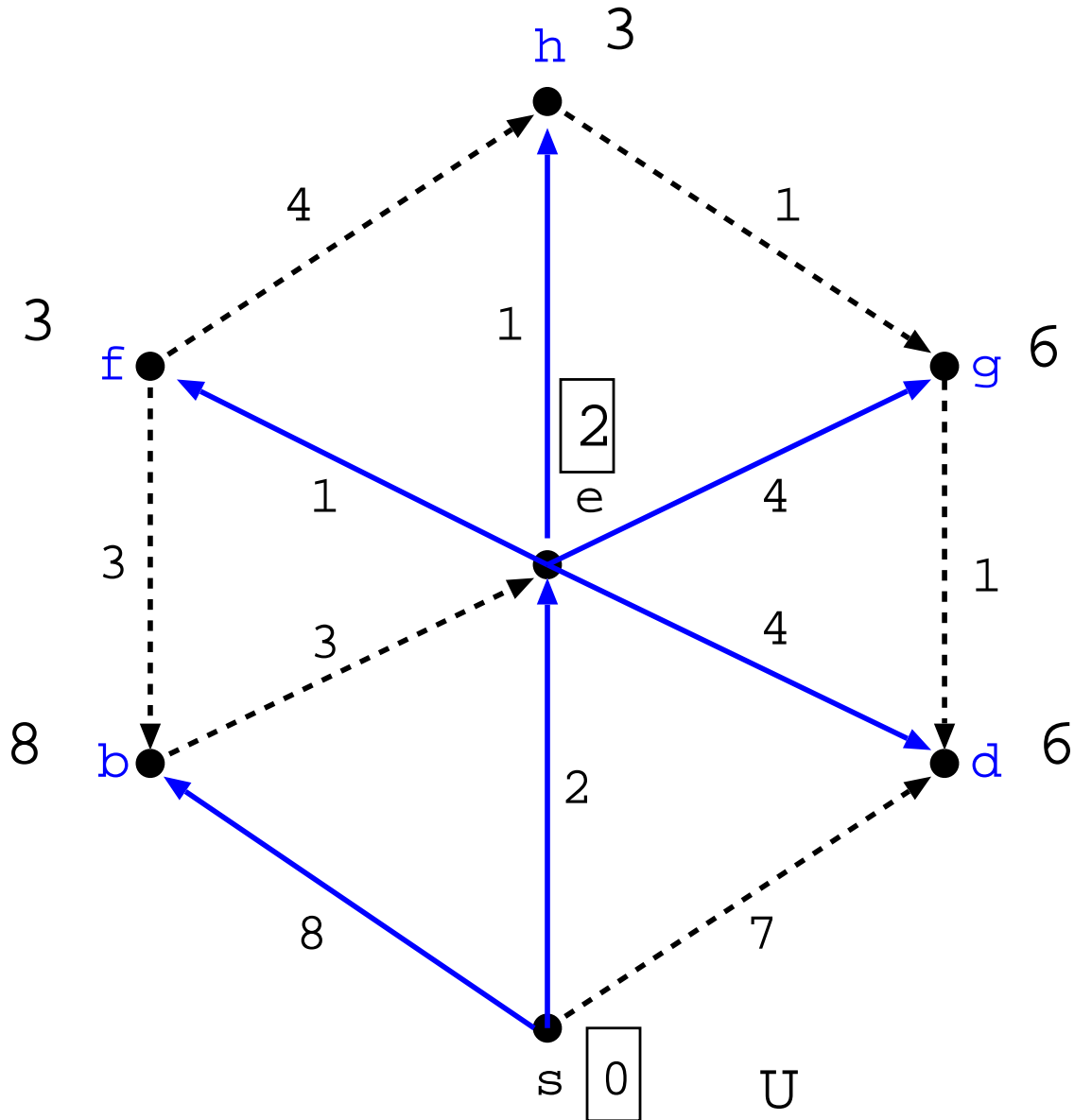
2回目のStep 2: $a = (e, g)$



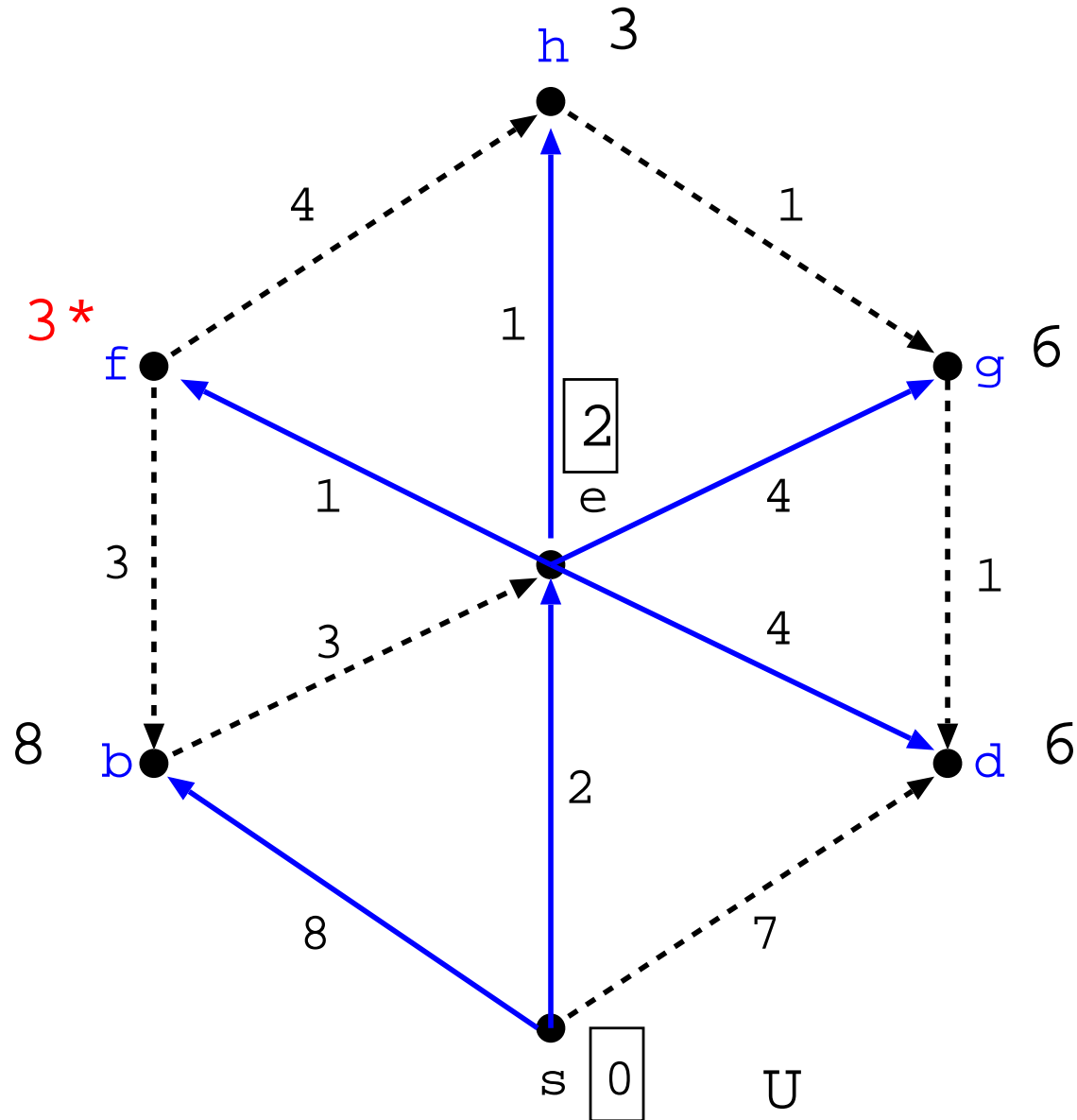
2回目の Step 2: $a = (e, d)$



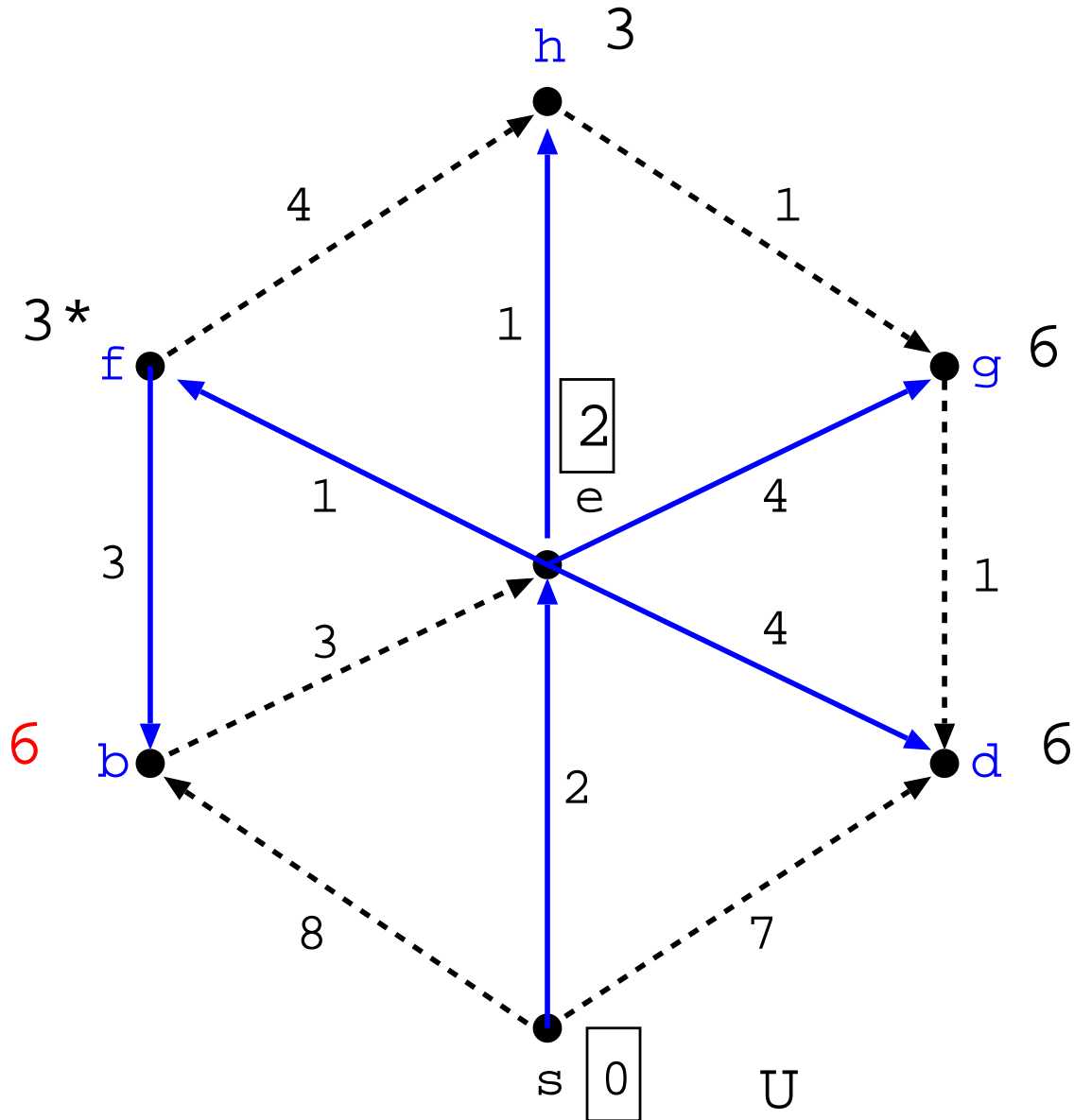
2回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e\}$, $U = \{b, d, f, g, f\}$



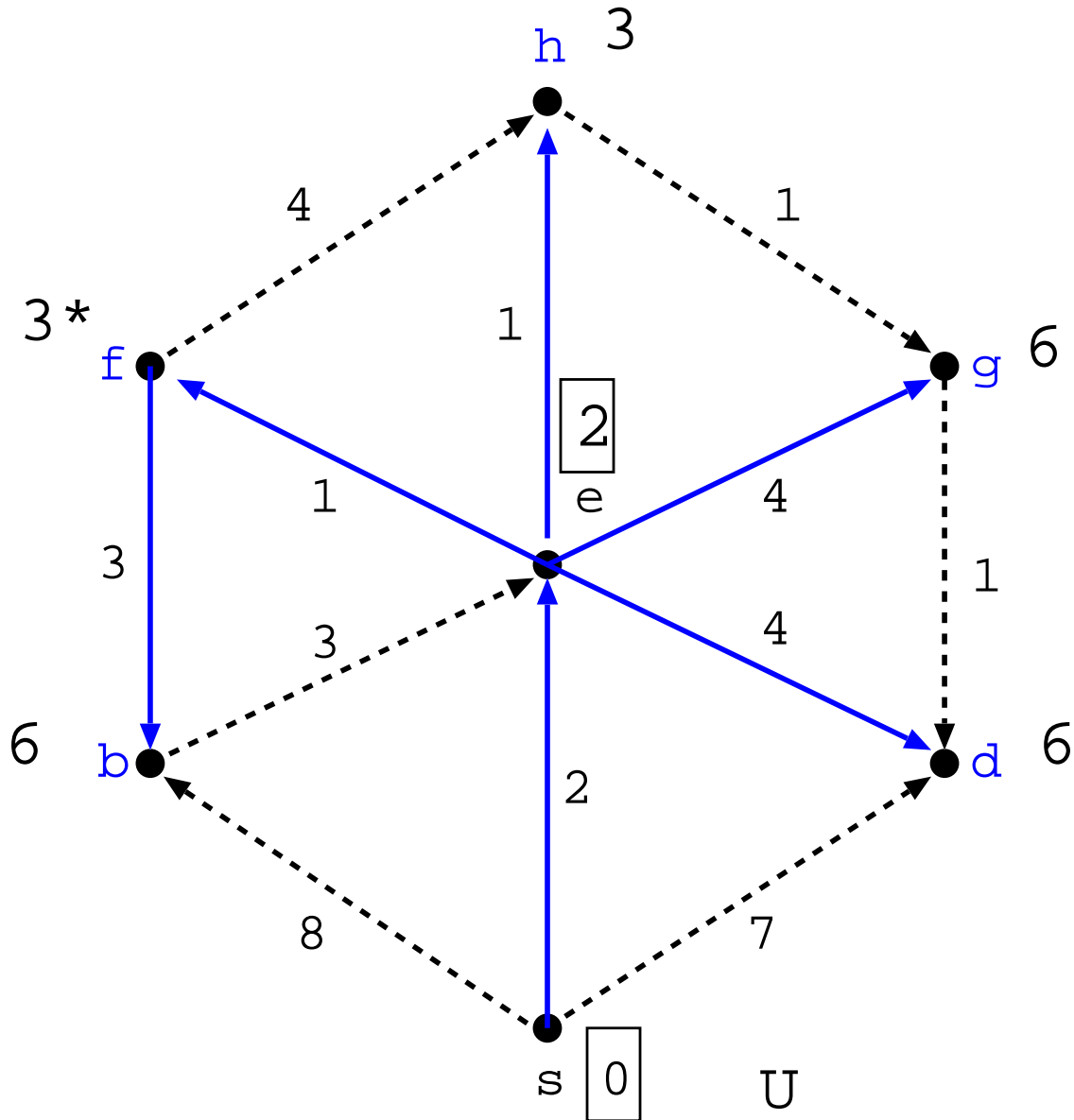
3回目の Step 2: w として f が選ばれたとき



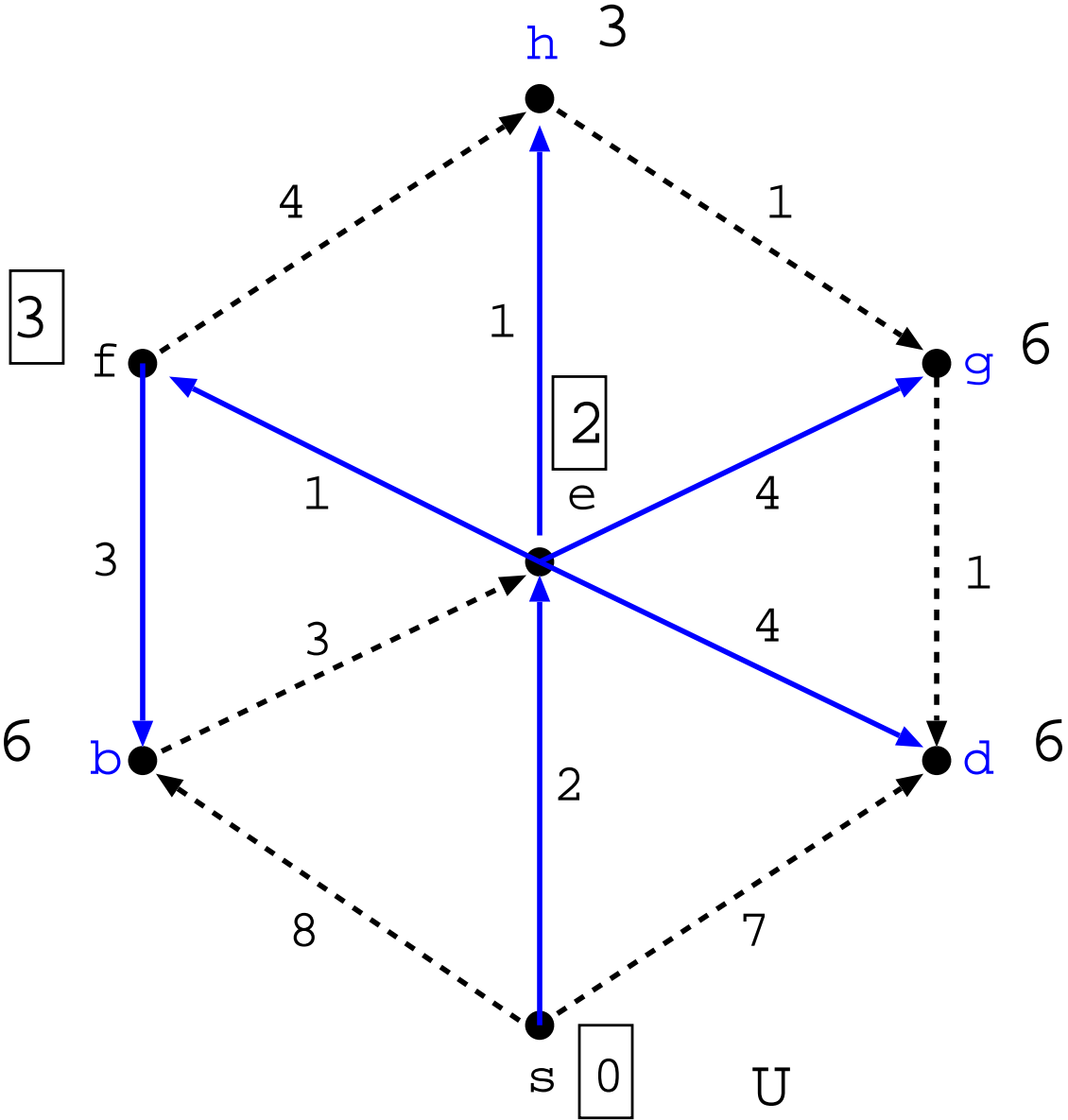
3回目のStep 2: $a = (f, b)$



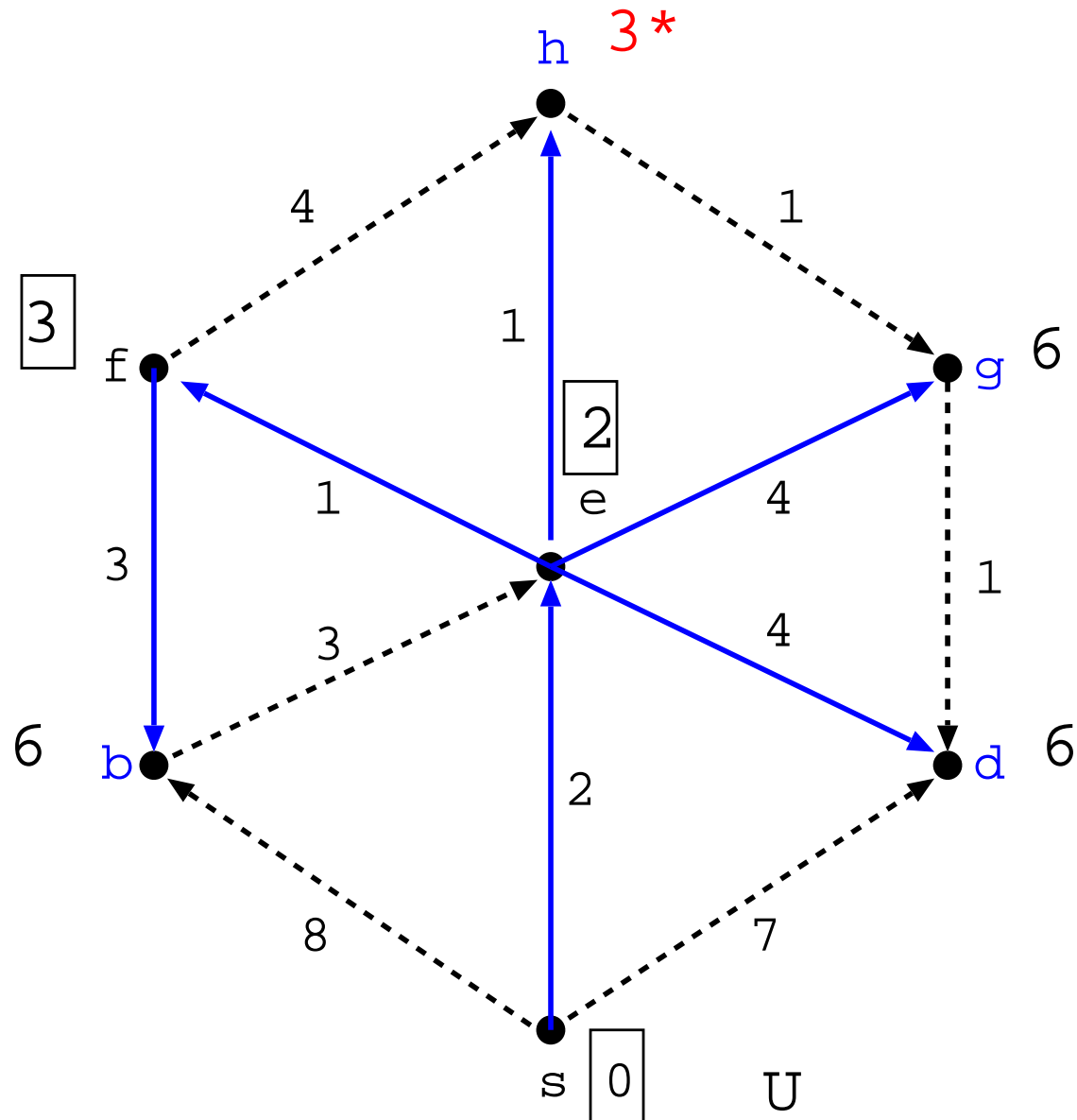
3回目のStep 2: $a = (f, h)$



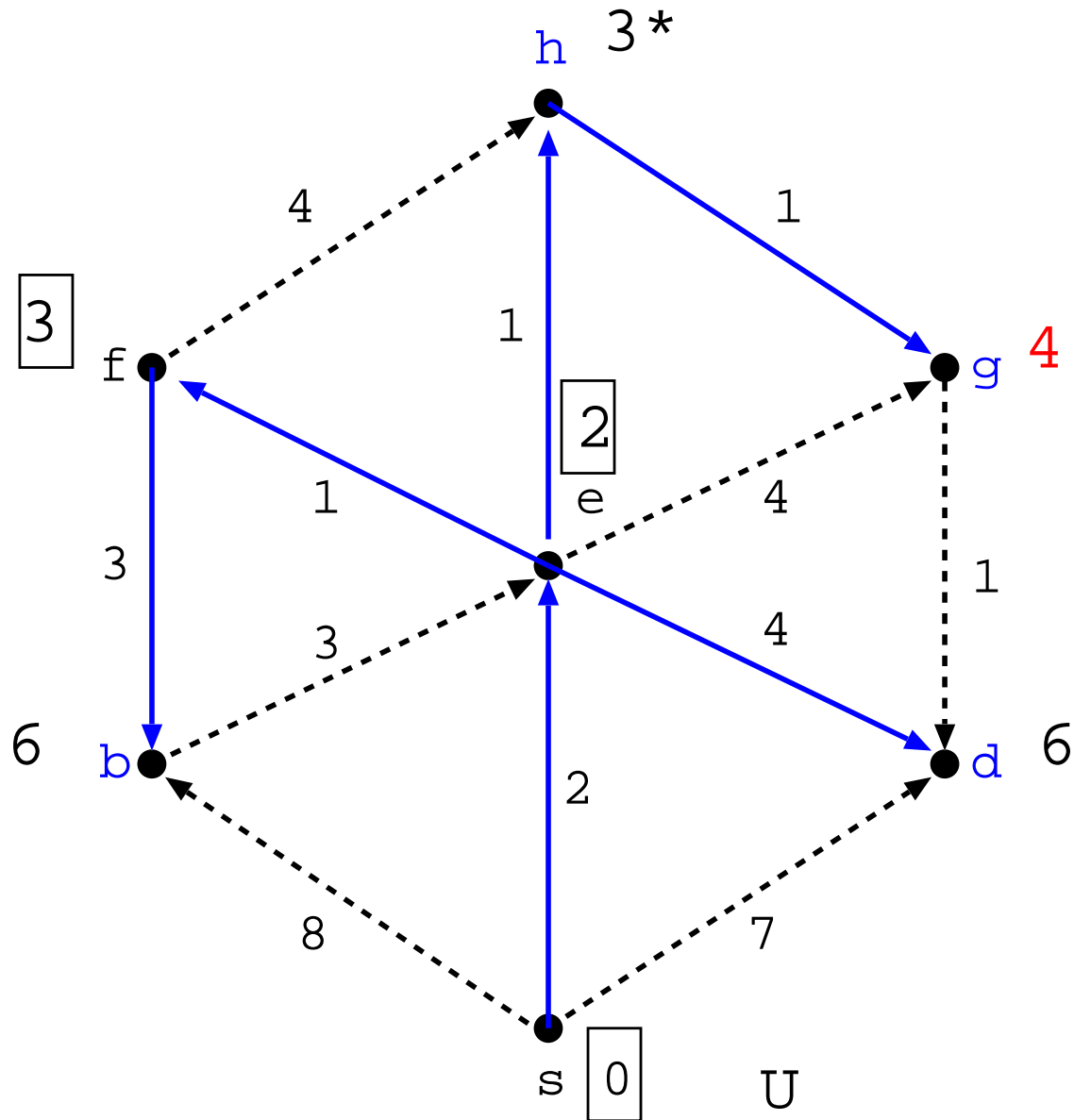
3回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e, f\}$, $U = \{b, d, g, h\}$



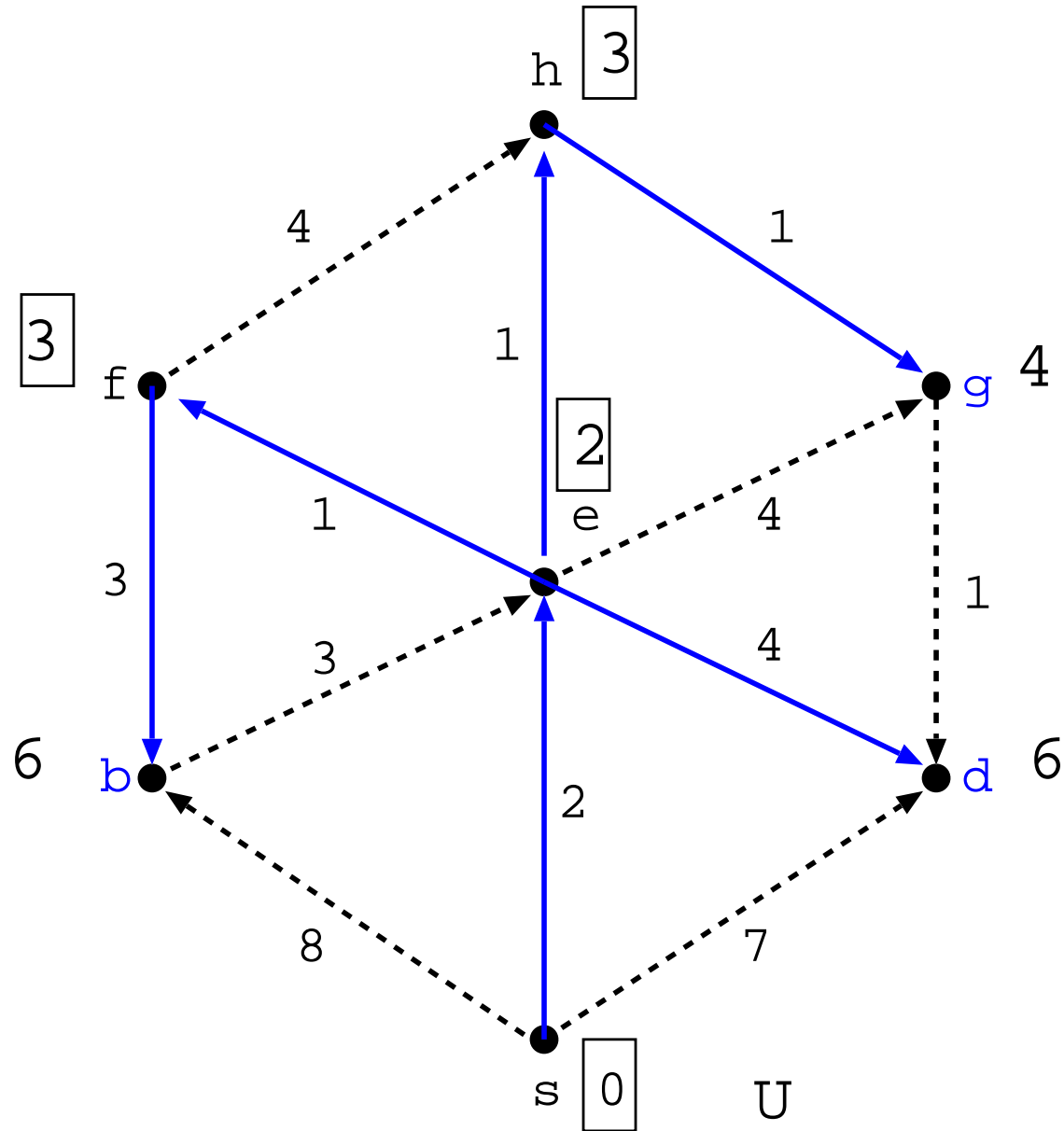
4回目の Step 2: w として h が選ばれたとき



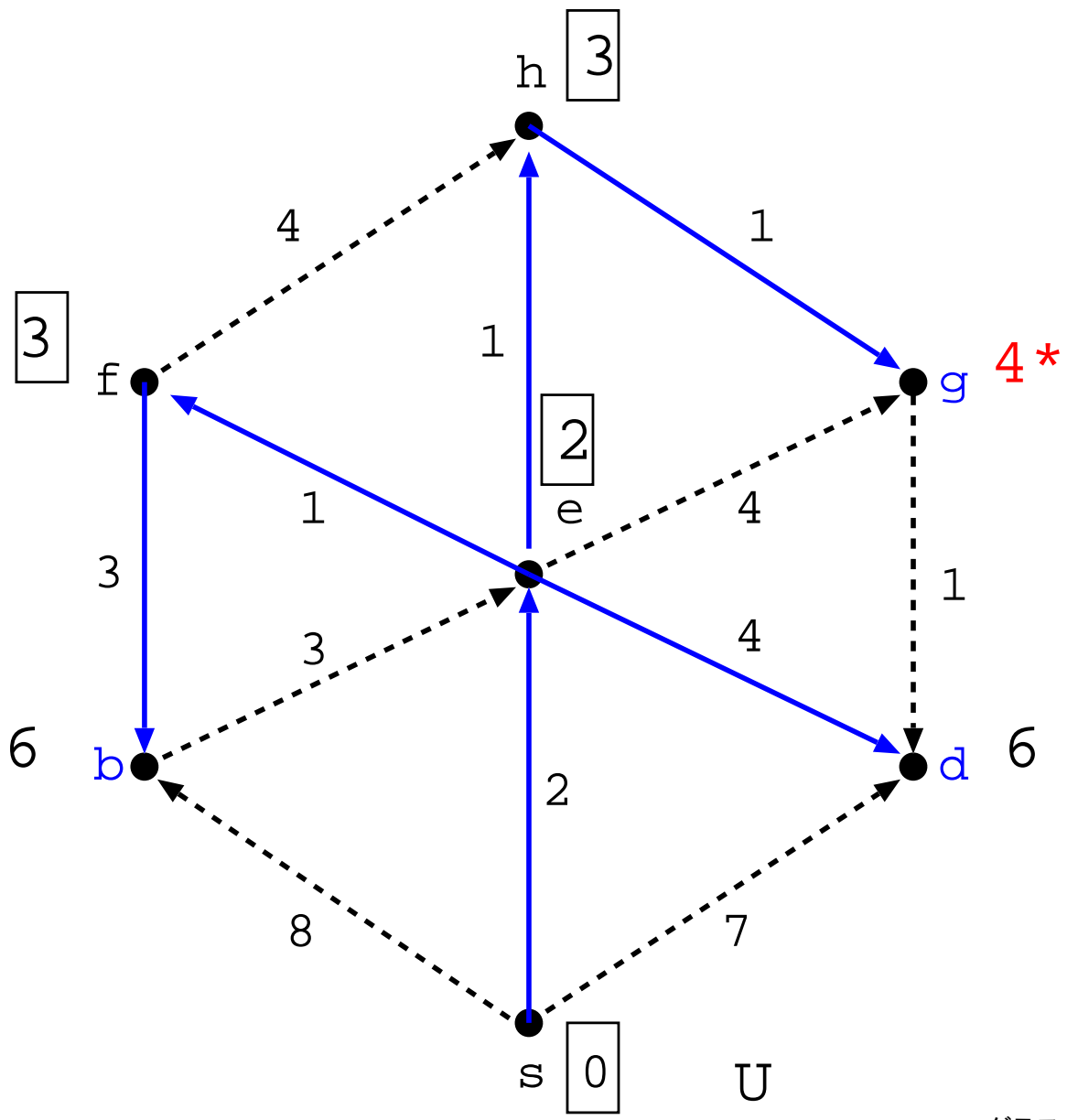
4回目のStep 2: $a = (h, g)$



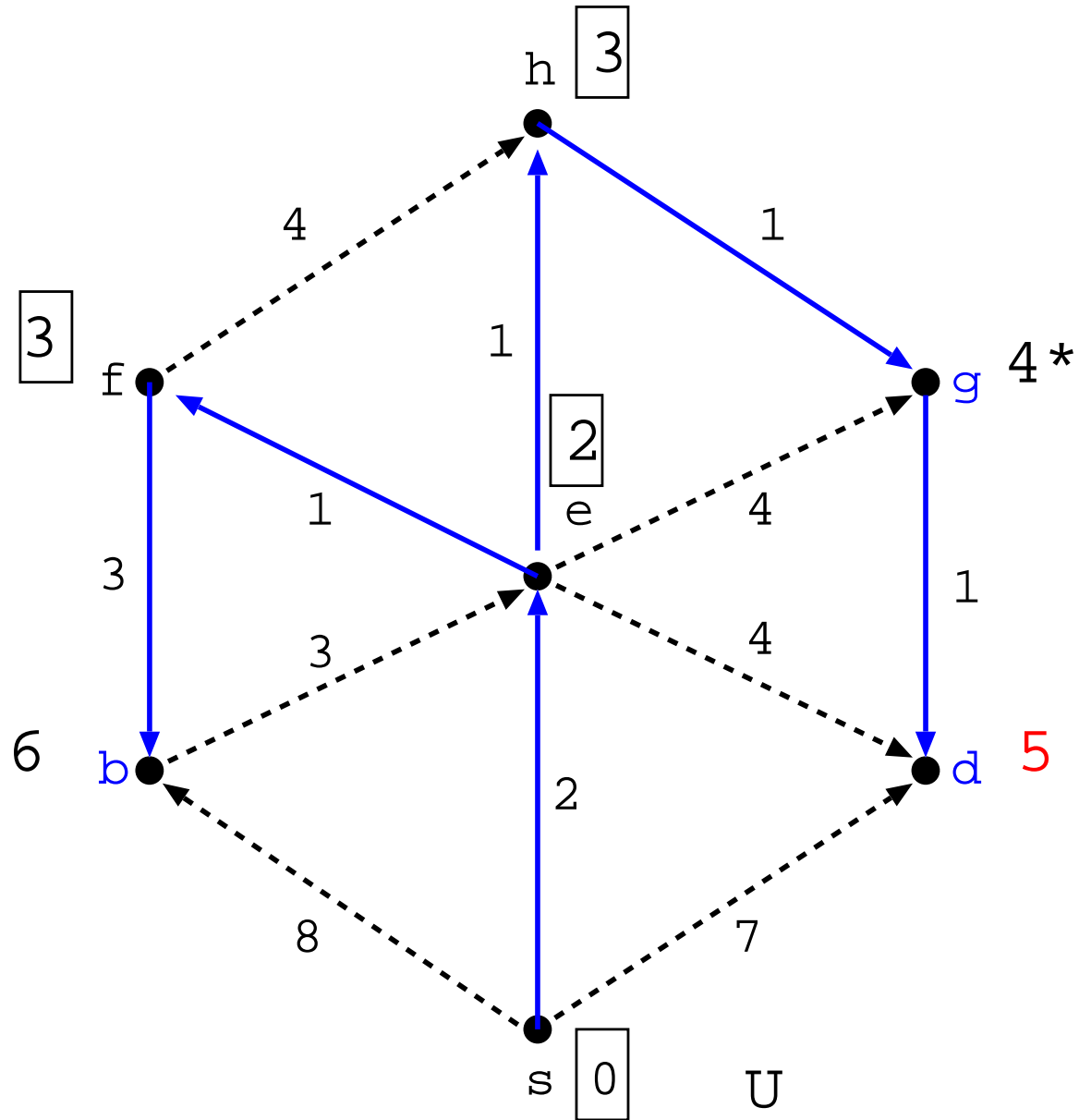
4回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e, f, h\}$, $U = \{b, d, g\}$



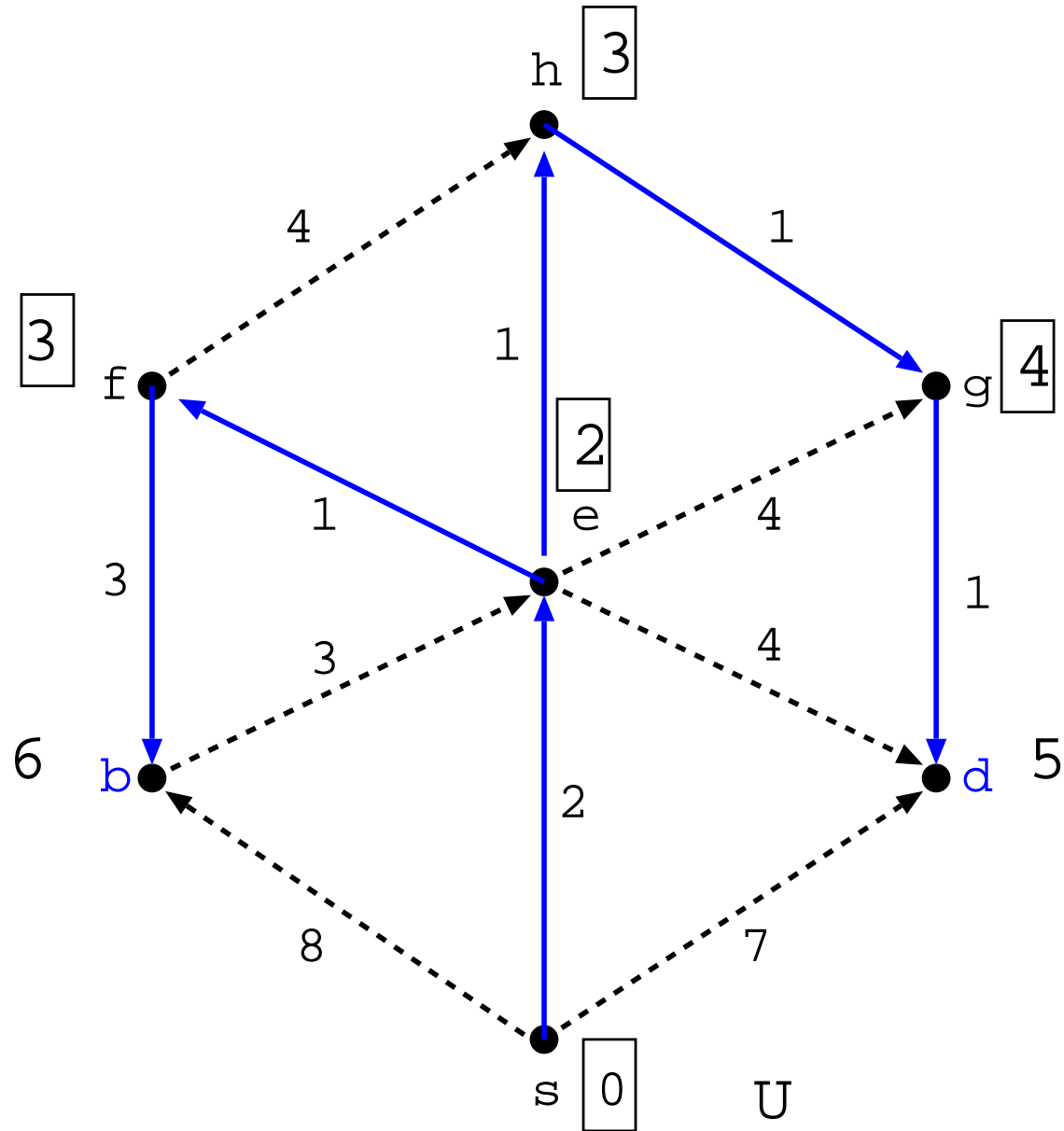
5回目の Step 2: w として g が選ばれたとき



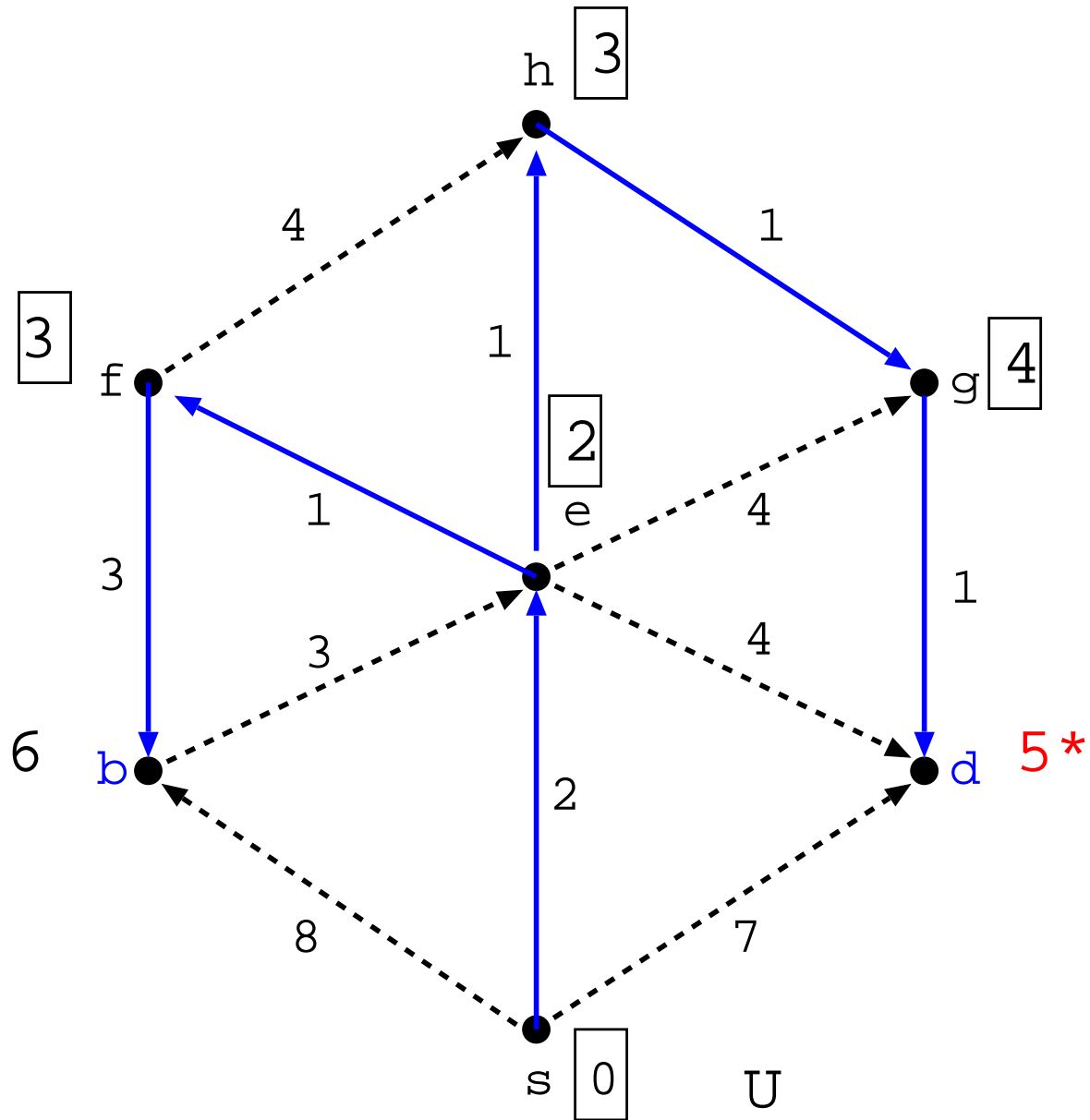
5回目の Step 2: $a = (g, d)$



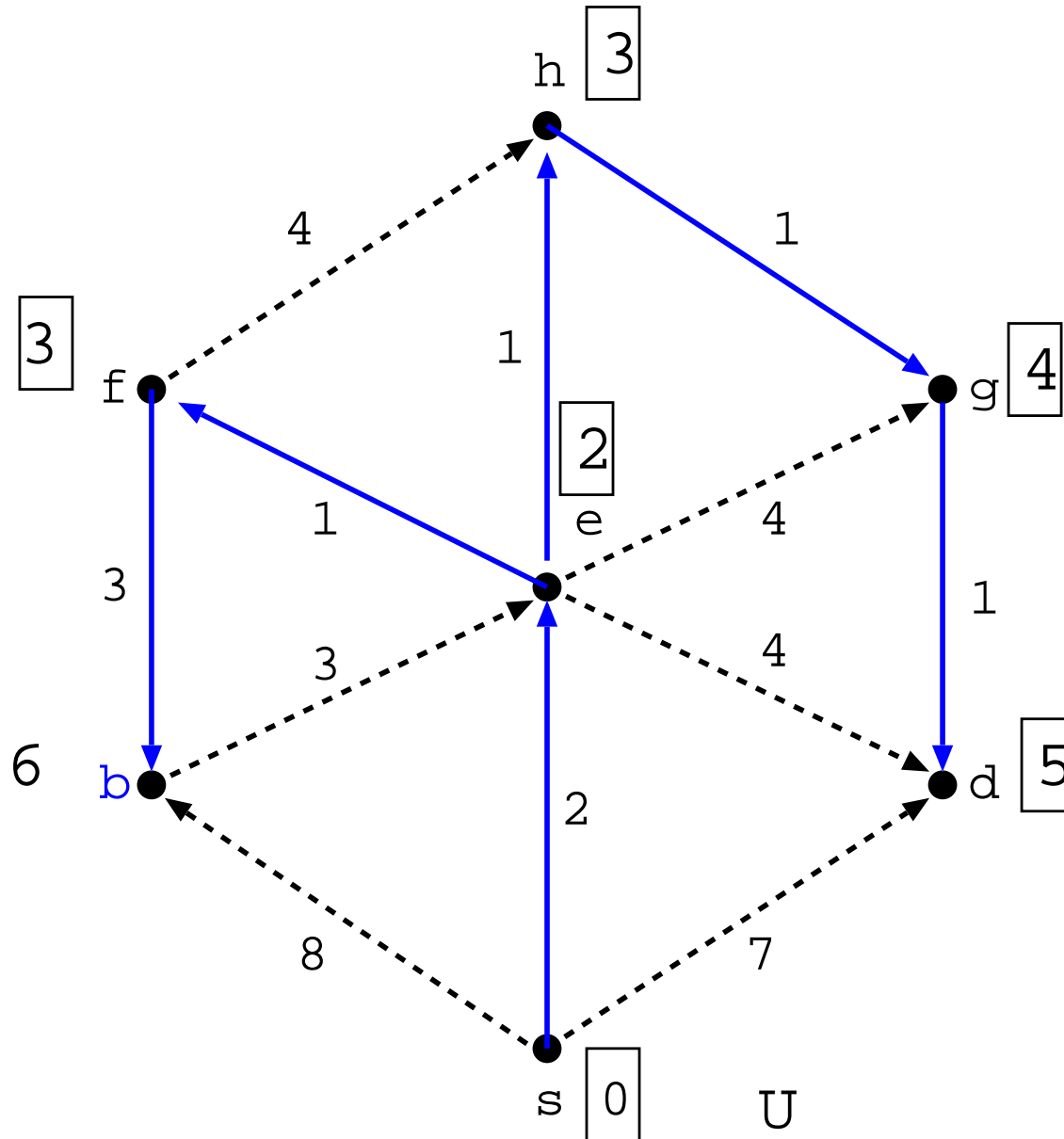
5回目の Step 3 終了時: $W = \{s, e, f, h, g\}$, $U = \{b, d\}$



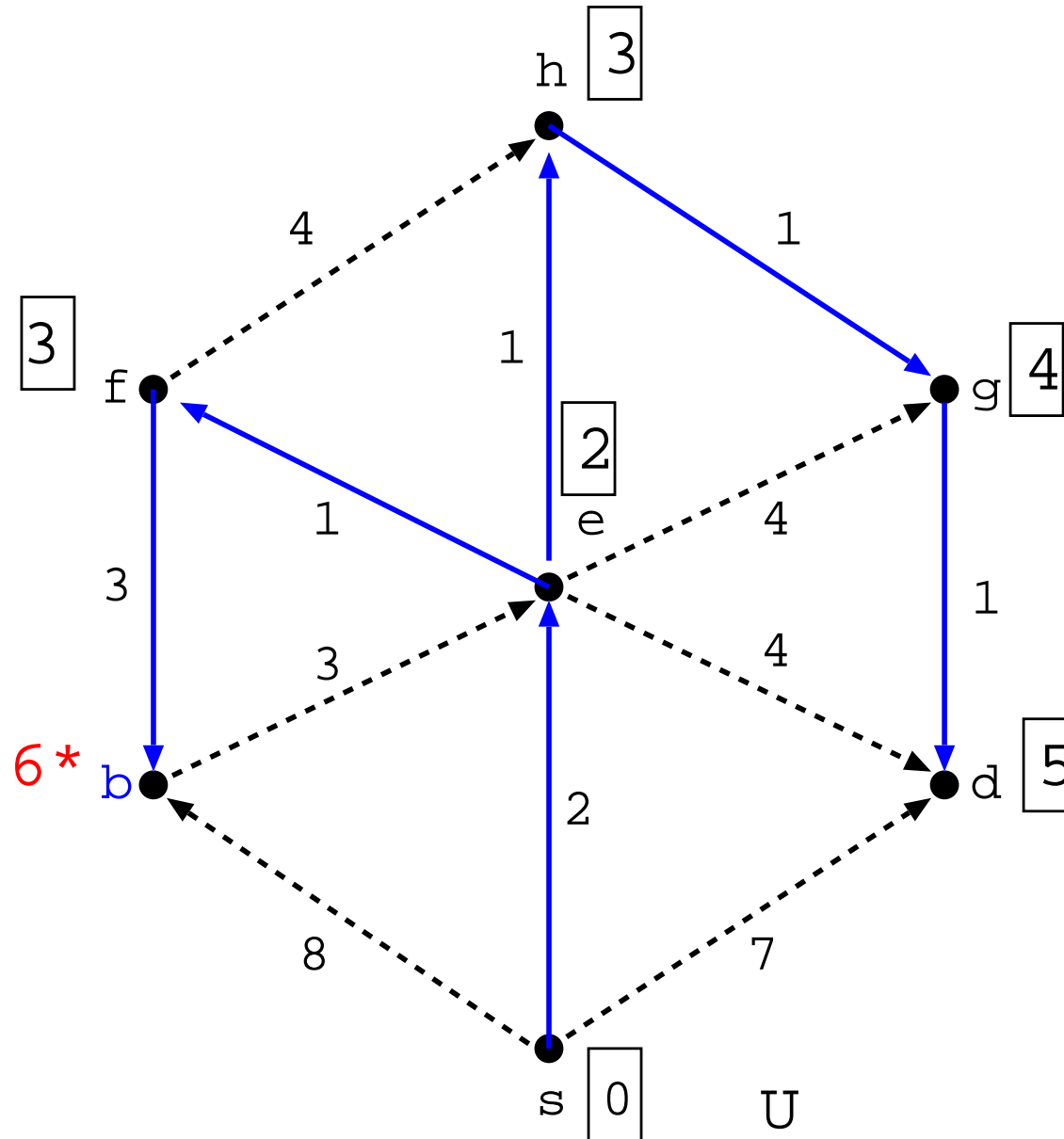
6回目の Step 2: w として d が選ばれたとき



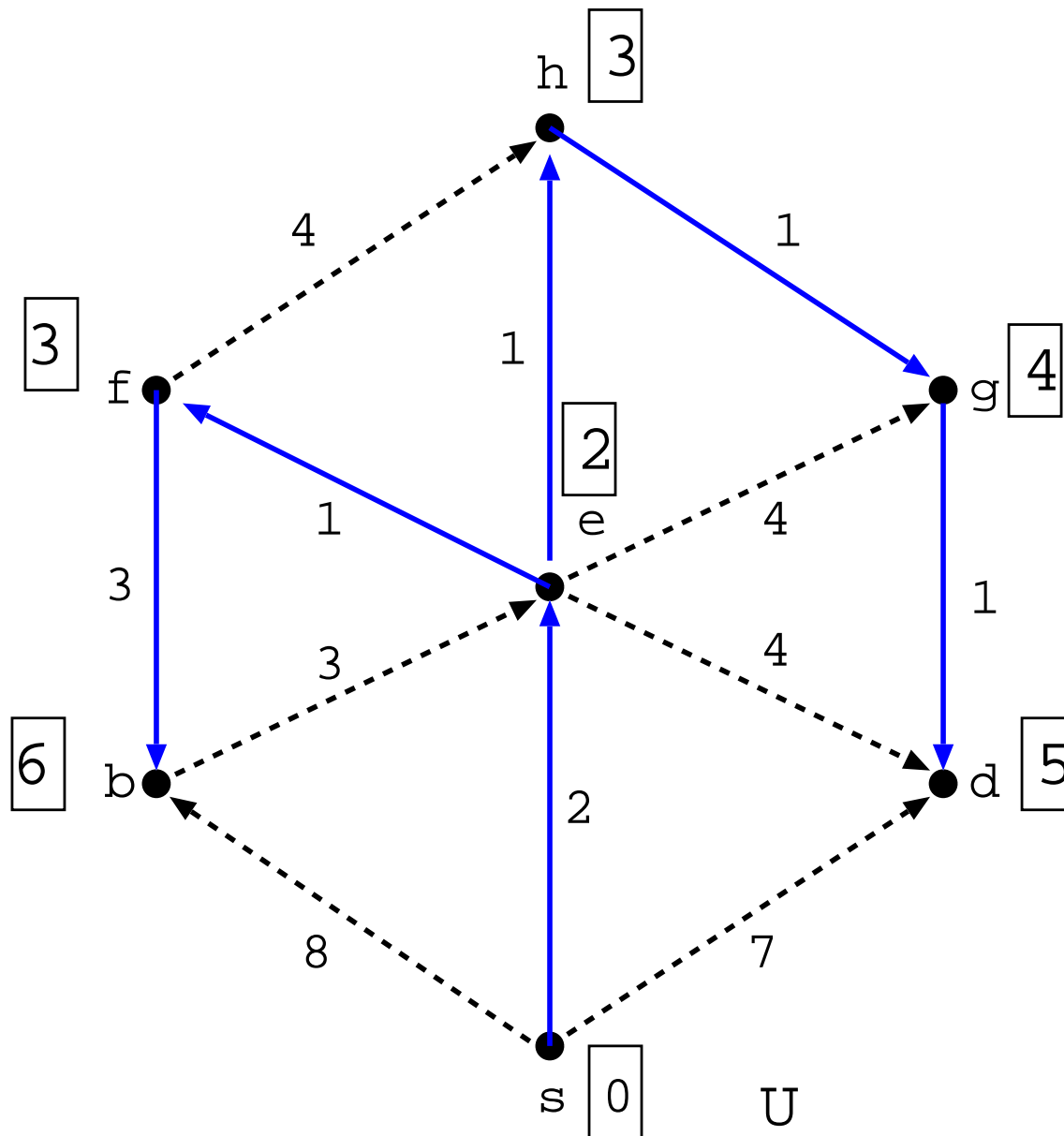
6回目の Step 3 終了時: $W = \{s, b, d, f, g, h\}$, $U = \{b\}$



7回目の Step 2: w として b が選ばれたとき



7回目の Step 3 終了時: $W = \{s, b, d, f, g, h\}, U = \emptyset$



最適性のチェック

補題 2.2 の条件が成立しているかどうか？