グラフとネットワーク(第2回)

安藤和敏

2004.10.14

1.1. グラフの定義

1.1.1. グラフの定義

一つのグラフは, 以下の述べる4つの構成要素からなる.

(1) 集合 V,

(2) 集合 A,

(3) 写像 $\partial^+ : A \to V$,

(4) 写像 $\partial^- : A \to V$

これを合わせて, グラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ と書く. 誤解のおそれがないときは, $G = (V, A)$ と書く.

V を**点集合**と呼び. V の要素は**点**と呼ばれる.
A を**枝集合**と呼び. A の要素は**枝**と呼ばれる.
枝 $a \in A$ に対して, $\partial^+ a$ を, a の**始点**と呼び, $\partial^- a$ を a の**終点**と呼ぶ.

1.1.2. グラフの幾何学的表現

グラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ が与えられたとき, 各枝 $a \in A$ に対して下図のように, $\partial^+ a$ から $\partial^- a$ にむかう矢線を描く. こうして得られる線図をグラフ G の**幾何学的表現**と呼ぶ.

$$\partial^+ a \; \bullet \xrightarrow{\qquad a \qquad} \bullet \; \partial^- a$$

1.1.3. 有向グラフと無向グラフ

1.1.4. 同型

1.1.5. 単純なグラフ

2つの枝 $a_1, a_2 \in A$ は, もし $\{\partial^+ a_1, \partial^- a_1\} = \{\partial^+ a_2, \partial^- a_2\}$ のとき, **並列枝**と呼ばれる.

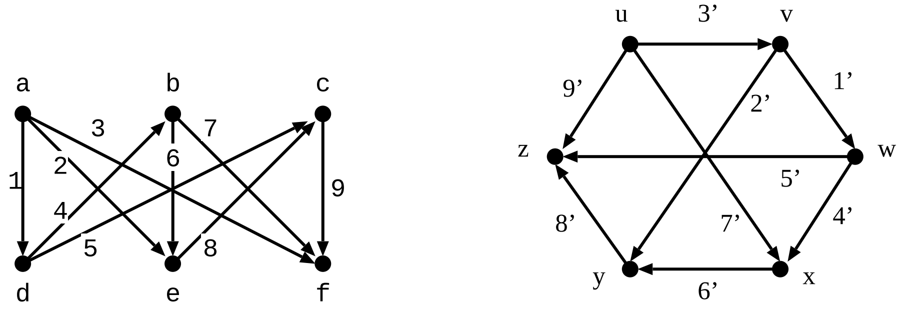
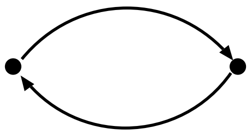
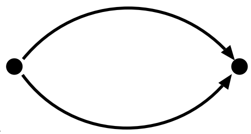


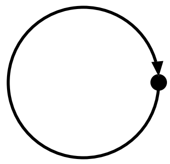
図 1.1: 同型な 2 つのグラフ



あるいは



枝 $a \in A$ は, $\partial^+ a = \partial^- a$ のとき, **自己閉路**と呼ばれる.



並列枝も自己閉路もないグラフを**単純な**グラフという.

1.1.6. 次数

$v \in V$ に対して,

$$\begin{aligned} \delta^+ v &= \{a \mid a \in A, \partial^+ a = v\} = v \text{ から出る枝の全体}, \\ \delta^- v &= \{a \mid a \in A, \partial^- a = v\} = v \text{ に入る枝の全体} \end{aligned}$$

と書く. $|\delta^+ v|$ を v の**正の次数** (あるいは, **出次数**) と呼んで, $|\delta^- v|$ を v の**負の次数** (あるいは, **入次数**) と呼ぶ. さらに, $|\delta^+ v| + |\delta^- v|$ を v の**次数**と呼ぶ.

1.1.7. 雑多な定義

直列枝

孤立点

全ての点の次数が一定値 k に等しいとグラフを k-**正則グラフ**と呼ぶ. k を陽に示さないときは, 単に**正則グラフ**と呼ぶ.

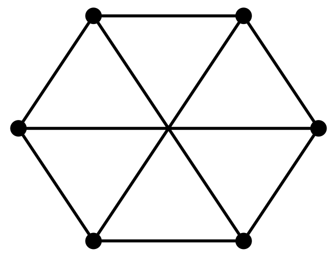


図 1.2: 3-正則グラフ

1.1.8. グラフの変形

開放除去と**短絡除去**

1.1.9. 部分グラフ

$G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ をグラフとする．グラフ $G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ は，もし $U \subseteq V, B \subseteq A$ であって，∂_0^+ と ∂_0^- が，それぞれ，∂^+ と ∂^- を B 上に制限して得られる写像であるとき，G の**部分グラフ**であるという．

例えば，例 1.1 のグラフ $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ は，
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$ で，∂^+ と ∂^- は以下のように与えられる．

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
∂^+	v_1	v_1	v_1	v_5	v_5	v_2	v_3	v_4	v_3	v_4
∂^-	v_4	v_2	v_2	v_1	v_4	v_5	v_2	v_3	v_5	v_4

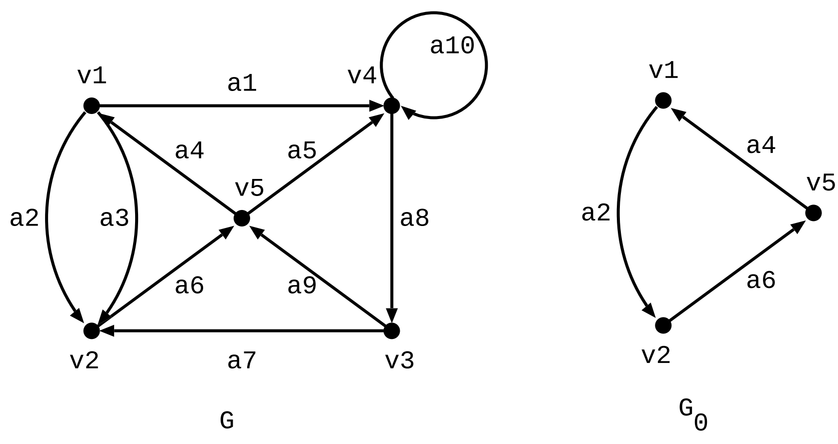


図 1.3: グラフ G (左) とその部分グラフ G_0 (右)

$G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ として，
$U = \{v_1, v_2, v_5\}$,$B = \{a_2, a_4\}$,

	a_2	a_4	a_6
∂_0^+	v_1	v_5	v_2
∂_0^-	v_2	v_1	v_5

を考えると, G_0 は G の部分グラフである．これは, 幾何学的表現を考えた方が分かり易いであろう.

$G_0 = (U, B, \partial_0^+, \partial_0^-)$ が $G = (V, A, \partial^+, \partial^-)$ の部分グラフで, かつ, $U = V$ であるとき, G_0 は G を**張る**といい, G_0 を G の**全域部分グラフ**と呼ぶ.

点部分集合 $U \subseteq V$ に対して,

$$A(U) = \{a \mid a \in A, \partial^+ a \in U, \partial^- a \in U\}$$

とする．このとき, グラフ $G(U) = (U, A(U))$ を, 点集合 U によって**誘導される部分グラフ**, あるいは, 点集合 U に関する**誘導部分グラフ**と呼ぶ.

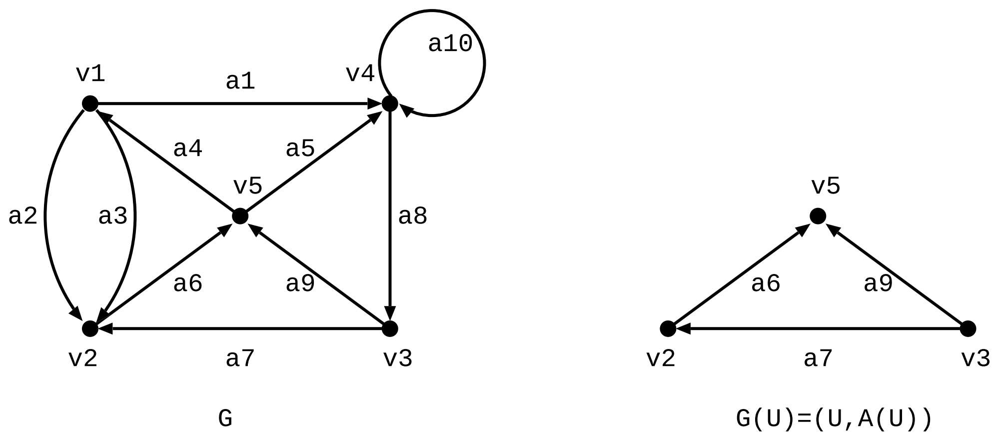


図 1.4: グラフ G (左) から $U = \{v_2, v_3, v_5\}$ によって誘導される部分グラフ $G(U)$ (右)