グラフとネットワーク(第9回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2004.12.02

2.1. 木と道

木は p. 13 において, 「閉路を含まない連結なグラフ」として定義された.

グラフ $G = (V, A)$ が与えられたときに, G の全域部分グラフで木であるようなものを G **の木**と呼ぼう. つまり G の木とは, ある $T \subseteq A$ に対して $H = (V, T)$ と表されるグラフである.

さらに, G の枝の部分集合 $T \subseteq A$ に対して, 部分グラフ $H = (V, T)$ が G の木になるときに, T を G **の木**と呼ぶ.

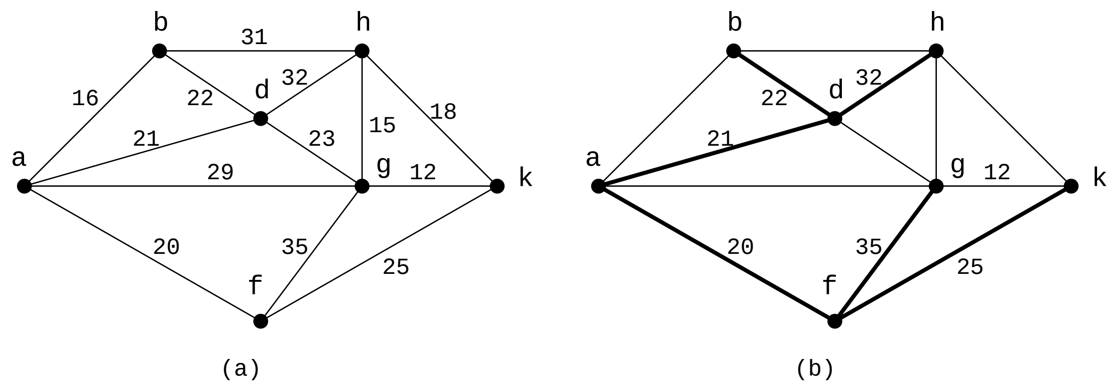


図 2.1: (a) グラフ G と $w\colon A \to \mathbb{R}$; (b) G の木 T(太字の枝)

2.1.1. 最小木問題

連結な無向グラフ $G = (V, A)$ と枝集合上の重み関数 $w\colon A \to \mathbb{R}$ が与えられているとする. G の木 $T \subseteq A$ に対して

$$w(T) = \sum_{a \in T} w(a) \tag{2.1}$$

で定義される $w(T)$ を T の**重み** (weight) という. $G = (V, A)$ が与えられたときに, 重みが最小である木を見出す問題を**最小木問題** (minimum-tree problem) と呼ばれる.

最小木問題は**貪欲アルゴリズム** (greedy algorithm) と呼ばれるつぎの手順で解くことができる.

Algorithm 1 貪欲アルゴリズム (クラスカル (Kruskal) のアルゴリズム)

Require: 無向グラフ $G = (V, A)$, 重み関数 $w\colon A \to \mathbb{R}$.

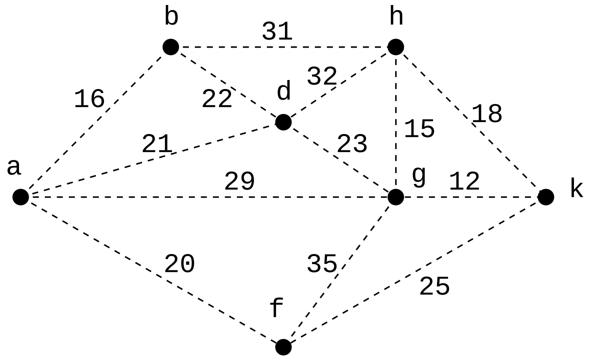
Ensure: G の最小木 T.

1: $T \leftarrow \emptyset$.

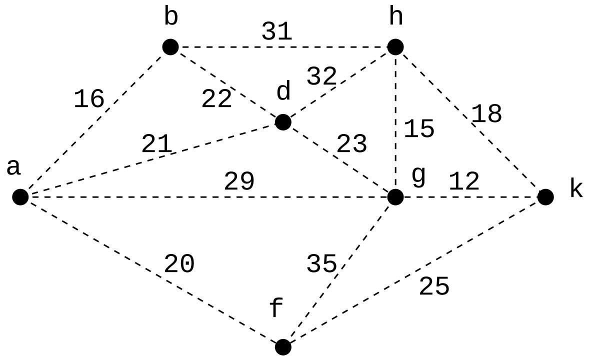
2: 現在の T が木ならば停止 (T は最小木). そうでなければ, $T \cup \{a\}$ がサーキットを含まないような枝 $a \in A \setminus T$ のうちでその重み $w(a)$ が最小であるものを 1 つ選び, それを $\hat{a}$ とおく.

3: $T \leftarrow T \cup \{\hat{a}\}$ として, 2 へ戻る.

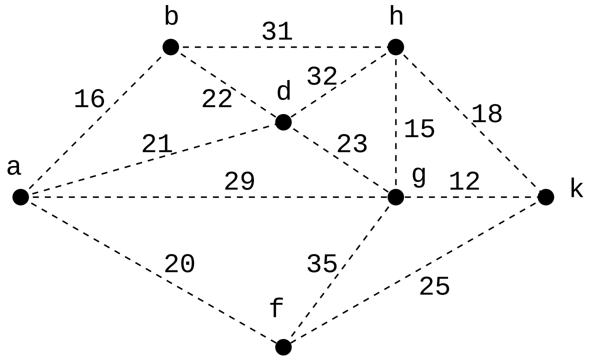
例として, 図 2.1(a) の $G = (V, A)$ と w を入力として, 貪欲アルゴリズムを動かしてみよう. (学生諸君は, 私の板書を見ながら, 図に T を書き込みなさい.)



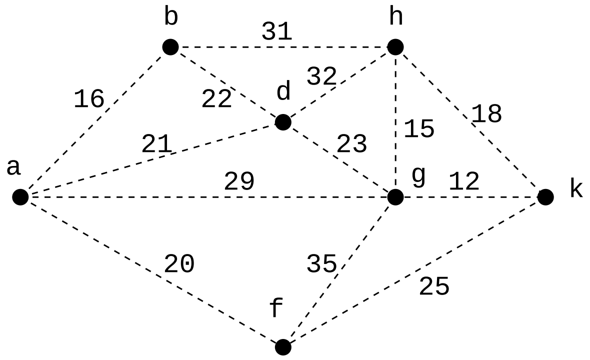
1 回目の Step 3 の終了時の T



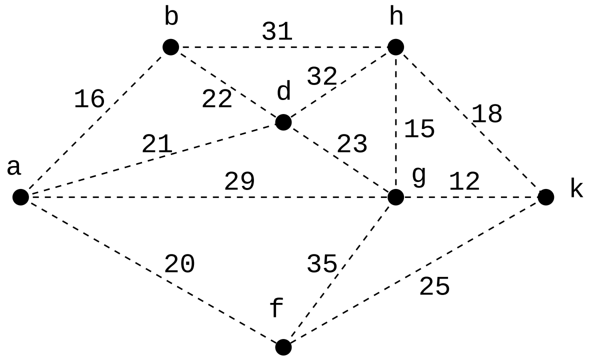
2 回目の Step 3 の終了時の T



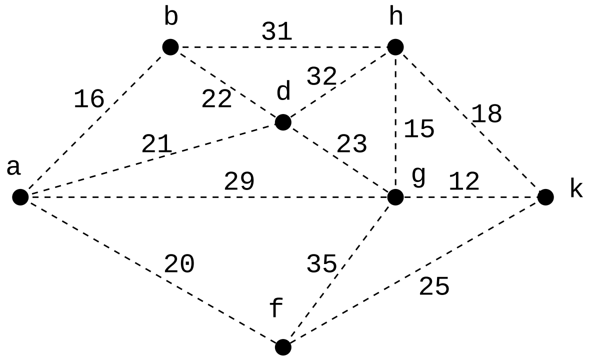
3 回目の Step 3 の終了時の T



4 回目の Step 3 の終了時の T



5 回目の Step 3 の終了時の T



6 回目の Step 3 の終了時の T

補題: グラフ $G=(V,A)$ の 2 つの枝部分集合 $B_1, B_2 \subseteq A$ に対して,

- B_1 と B_2 がともに閉路を含まない, かつ,
- $|B_1| < |B_2|$

ならば, ある $a^* \in B_2 \setminus B_1$ に対して $B_1 \cup \{a^*\}$ は閉路を含まない. □

定理 2.1: 貪欲アルゴリズムの実行中に得られる T はつぎの性質をもつ:

(*) T は, 枝数 $|T|$ をもちサーキットを含まないような枝集合のうちで, その重みが最小なものである.

(ここで, 木でない枝集合 T に対しても (2.1) で重みを定義する.) □

貪欲アルゴリズムが終了したときの T は, G の木であるから $|T| = n-1$ である. (n は点の個数. つまり, $n = |V|$.) したがって定理 2.1 によって, 貪欲アルゴリズムが終了したときの T は, 枝数が $n-1$ でサーキットを含まないような枝集合のうちで, 重みが最小のものである. ところが, 枝数が $n-1$ でサーキットを含まない枝集合というものは, まさしく G の木である. ゆえに, 貪欲アルゴリズムが終了したときの T は, G の木のうちで重みが最小のものである.

グラフ $g=(V,A)$ の木 T と枝 $a \in A \setminus T$ に対して, $T \cup \{a\}$ はちょうど一つの閉路を含む. この閉路を $\mathrm{C}(T|a)$ と表し, T と a に**関連する基本サーキット**と呼ぶ.

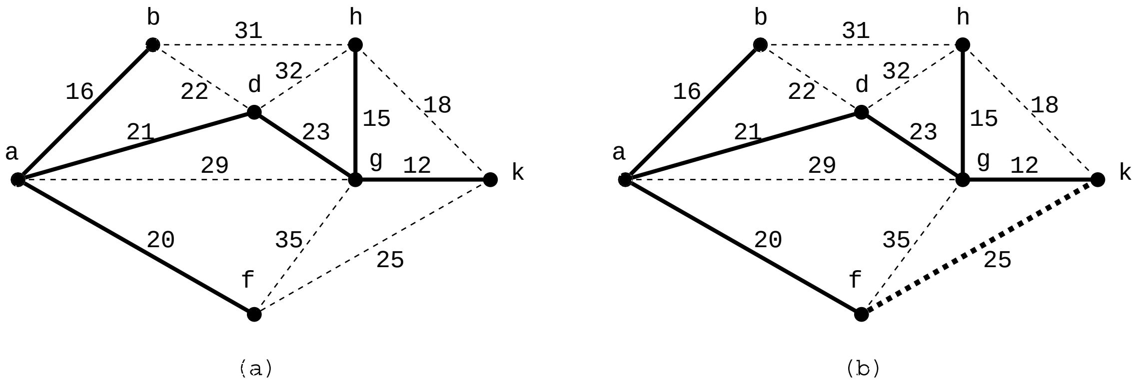


図 2.2: (a) グラフ G の木 T(実線の枝からなる) と $w\colon A \to \mathbb{R}$; (b) T と $a=(f,k)$ に関連する基本サーキット $\mathrm{C}(T|a) = \{(a,f),(f,k),(k,g),(g,d),(d,a)\}$

定理 2.2: グラフ $G=(V,A)$ の木 $T \subseteq A$ が重み $w\colon A \to \mathbb{R}$ に関する最小木であるための必要十分条件は, 各 $a \in A \setminus T$ とそれに関連する基本サーキット $\mathrm{C}(T|a)$ 上の任意の枝 a' に対して

$$w(a') \le w(a) \tag{2.5}$$

が成り立つことである.

最小木問題は**ヤルニーク-プリム (Jarník-Prim) のアルゴリズム**と呼ばれるつぎの手順によっても解くことができる.

例として, 再び図 2.1(a) の $G=(V,A)$ と w を入力として, ヤルニーク-プリムのアルゴリズムを動かしてみよう. (学生諸君は, 私の板書を見ながら, 図に T を書き込みなさい.)

Algorithm 2 ヤルニーク-プリム (Jarník-Prim) のアルゴリズム

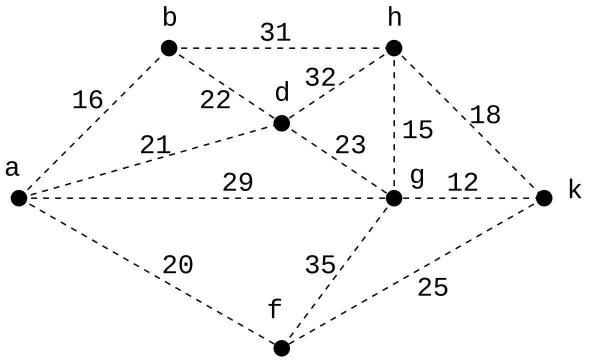
Require: 無向グラフ $G = (V, A)$, 重み関数 $w \colon A \to \mathbb{R}$.

Ensure: G の最小木 T.

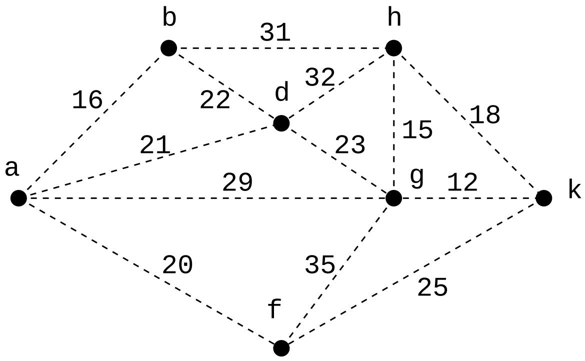
1: 任意な点 $v \in V$ を選び, $U \leftarrow \{v\}$, $T \leftarrow \emptyset$ とおく.

2: 現在の T が G の木 (すなわち $U = V$) ならば停止 (T が最小木である). そうでなければ, U と $V \setminus U$ を結ぶ枝 a のうちでその重み $w(a)$ が最小であるものを 1 つ選ぶ. 選ばれた枝を $\hat{a}$ とおいて, $\hat{a}$ の $V \setminus U$ 側の終点を u とおく,

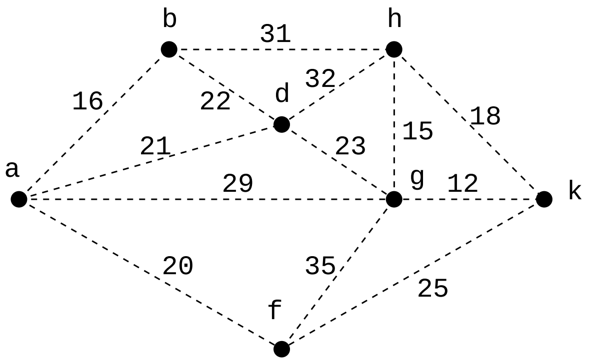
3: $U \leftarrow U \cup \{u\}, T \leftarrow T \cup \{\hat{a}\}$ として, 2 へ戻る.



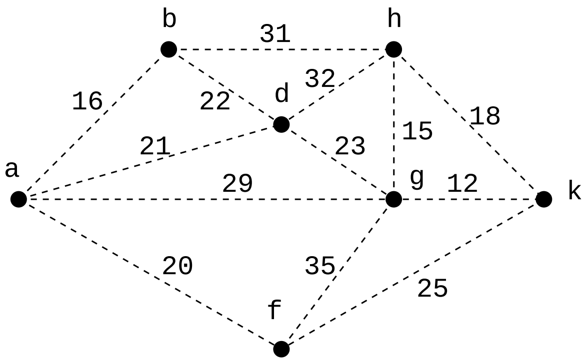
1 回目の Step 3 終了時の T



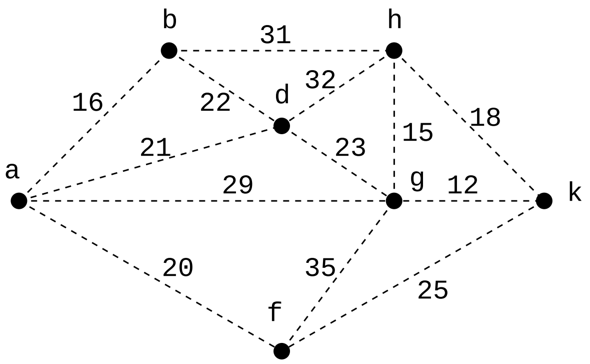
2 回目の Step 3 終了時の T



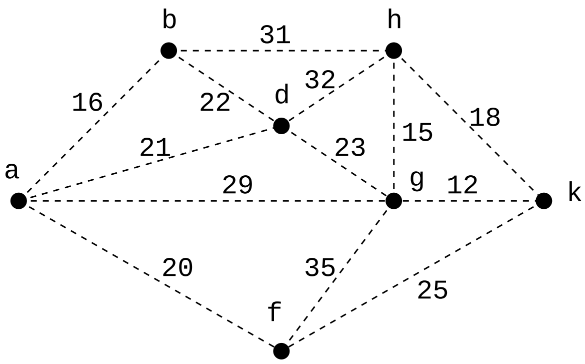
3 回目の Step 3 終了時の T



4 回目の Step 3 終了時の T



5 回目の Step 3 終了時の T



6 回目の Step 3 終了時の T