グラフとネットワーク(第14回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gnB/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2004.02.03

2.3. 最小費用フロー

2.3.1. 最小費用フロー問題

最大フロー問題のときのように, 特別な 2 点 s^+ と s^- が指定されている有向グラフ $G = (V, A)$ を考える．ここでは, 各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ の他に, 枝 a に 1 単位のフローを流すのにかかる**費用** $\gamma(a)$ が与えられている．このネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と書く．

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられたとき, 流量が $\hat{v}$ であるようなフロー φ の中で, フローの費用

$$\sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$$

が最小になるものを**最小費用フロー** (minimum cost flow) と呼び, 最大費用フローを求める問題を**最小費用フロー問題** (minimum-cost flow problem) と呼ぶ.

2.3.2. 補助グラフと最適性の条件

最小費用フロー問題を解くためのアルゴリズムには, プライマル法, ネットワークシンプレックス法, などがあるが, ここでは, **プライマル法**と**プライマル-デュアル法**について学ぶ.

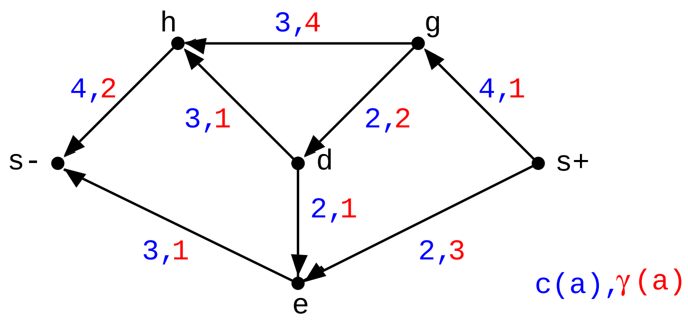

図 2.1: 最小費用流問題で考えるネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$. 各枝 $a \in A$ に付された数値は $c(a), \gamma(a)$ を表す

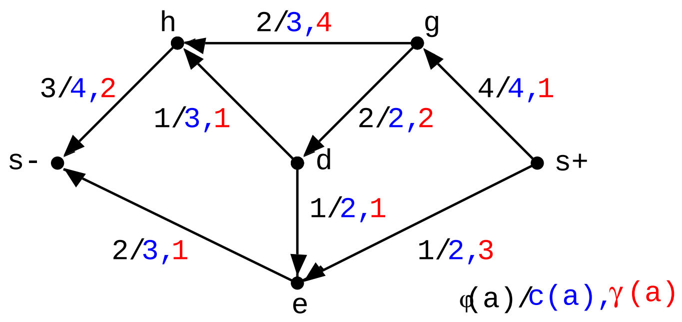

図 2.2: 図 2.1 のネットワーク $\mathcal{N}$ 中のフロー φ. φ の費用は, $1\times4+4\times2+2\times3+1\times2+3\times1+1\times1+2\times2+1\times1=29$.

これらのアルゴリズムでは, 以下に説明する補助ネットワークを用いる.

ネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c,\gamma)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ は以下のように構成される. 枝集合 A_φ は, 最大フロー問題の補助ネットワークと同様に,

$$\begin{aligned} A_\varphi &= A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-, && (2.33)\\ & A_\varphi^+ = \{a | a\in A, \varphi(a) < c(a)\} && (2.34)\\ & A_\varphi^- = \{\bar{a} | a\in A, 0<\varphi(a)\} \quad (\bar{a}\text{: } a \text{ の逆向き枝}) && (2.35)\end{aligned}$$

で与えられ, 容量関数 $c_\varphi\colon A_\varphi\to\mathbb{R}$ も最大フロー問題の補助ネットワークと同様に,

$$c_\varphi(a)=\begin{cases} c(a)-\varphi(a) & \text{if } a\in A_\varphi^+ \text{ のとき,}\\ \varphi(a) & \text{if } \bar{a}\in A_\varphi^- \text{ のとき.}\end{cases} \tag{2.36}$$

で定義される. ここでは, 新たに費用関数 $\gamma_\varphi\colon A_\varphi\to\mathbb{R}$ を

$$\gamma_\varphi(a)=\begin{cases} \gamma(a) & \text{if } a\in A_\varphi^+ \text{ のとき,}\\ -\gamma(a) & \text{if } \bar{a}\in A_\varphi^- \text{ のとき.}\end{cases} \tag{2.37}$$

で定義する.

最小費用フローは補助ネットワークを用いて, 以下のように特徴付けられる.

定理 2.12: *2* 端子ネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c,\gamma)$ 中のフロー φ がそれと同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のすべてのフローのうちで費用最小であるための必要十分条件は, φ に関する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ 中に負の長さの有向閉路が存在しないことである.

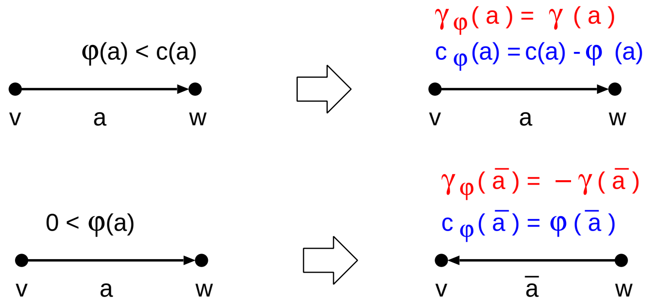

図 2.3: 補助ネットワークの作り方

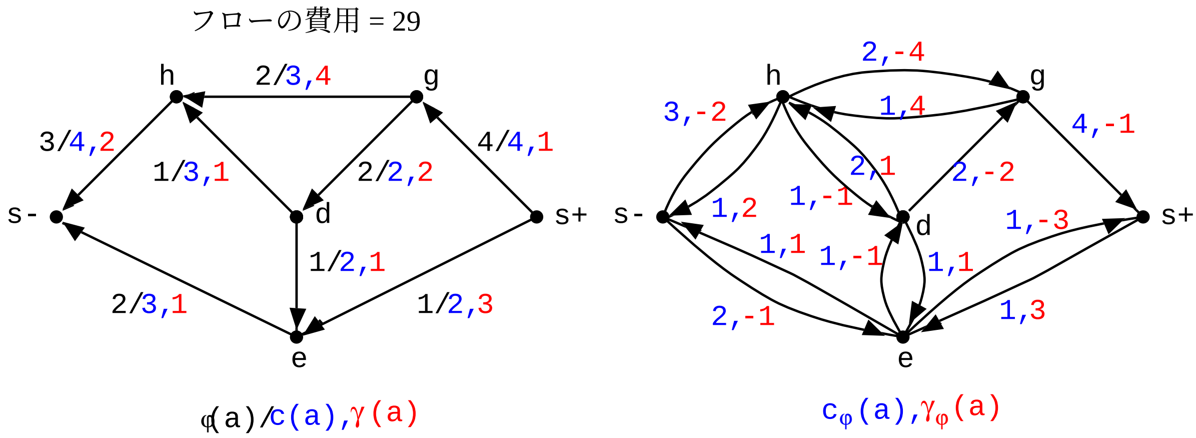

図 2.4: 補助ネットワークの例

2.3.3. 最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

[**プライマル法**]

プライマル法は, 定理 2.12 に基づいており, 適当な初期フロー φ から出発して, $\mathcal{N}_\varphi$ の中に負の長さの有向閉路が存在する限り, その有向閉路にそってフロー φ を更新してゆくというアルゴリズムである.

流量が $\hat{v}$ であるような適当なフローを φ とする.
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作る.
while $\mathcal{N}_\varphi$ 中に有向閉路 Q が存在する **do**
　$d \leftarrow \min\{c_\varphi(a) \mid a \in Q\}$.
　for Q の各枝 a について **do**
　　if a が A_φ^+ の枝 **then**
　　　$\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
　　else if a が A_φ^- の枝 **then**
　　　$\varphi(\bar{a}) \leftarrow \varphi(\bar{a}) - d$.
　　end if
　end for
　補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作り直す.
end while

図 2.5: プライマル法

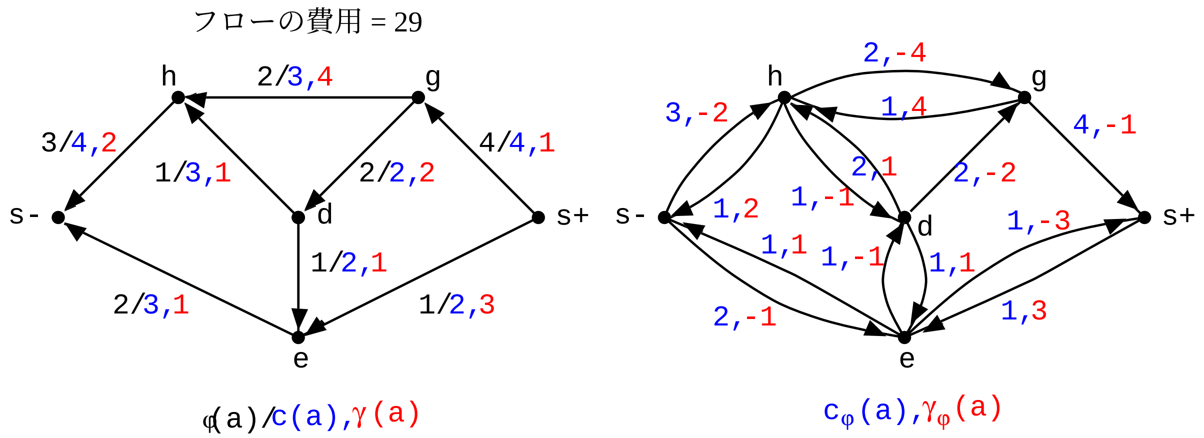

図 2.6: プライマル法の動き (最初のフロー φ と, $\mathcal{N}_\varphi$ の有向閉路)

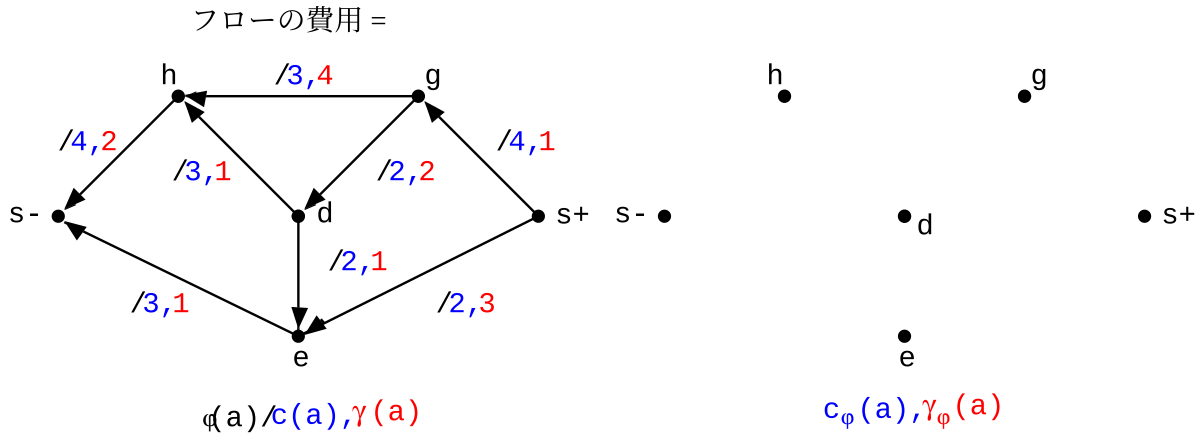

図 2.7: プライマル法の動き (フロー φ と, $\mathcal{N}_\varphi$ の有向閉路)

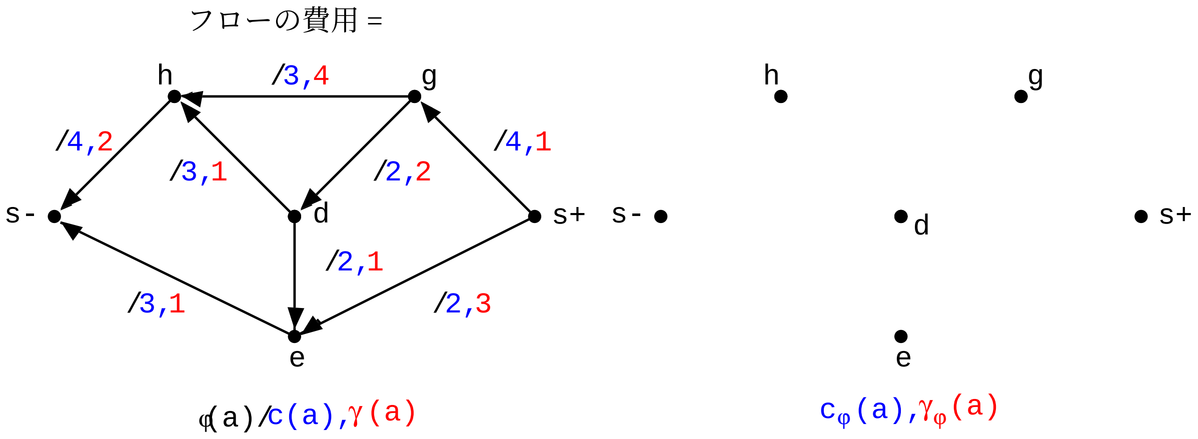

図 2.8: プライマル法の動き (フロー φ と, $\mathcal{N}_\varphi$ の有向閉路)

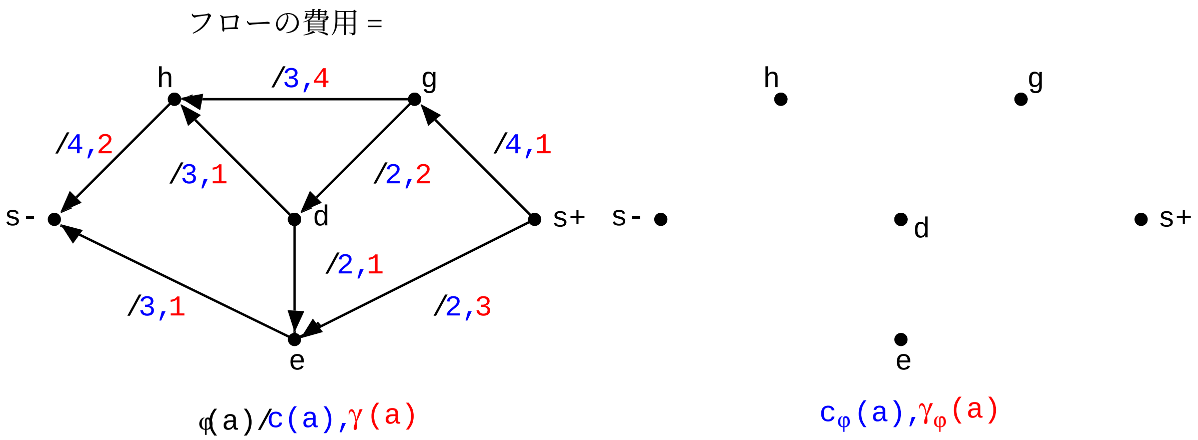

図 2.9: プライマル法の動き (フロー φ と, $\mathcal{N}_\varphi$ の有向閉路)

[プライマル-デュアル法]

最小費用フロー問題に対する別のアルゴリズムとして，プライマル-デュアル法を紹介する．このアルゴリズムの動きは最大フロー問題に対するフォード-ファルカーソンのアルゴリズムと同様に補助グラフの中で s^+ から s^- への有向道を見付けて，その有向道に沿ってフローを増加 (減少) するものであるが，有向道は枝の費用 γ_φ に関して最短のものが選ばれる．

$\varphi(a) \leftarrow 0 \ (a \in A)$.
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作る．
while $\mathcal{N}_\varphi$ 上に s^+ から s^- までの有向道 P が存在する **do**
  P をそのような有向道のうちで，γ_φ に関して最短のものとする．
  $d \leftarrow \min\{\min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}, \hat{v} - v(\varphi)\}$.
  for P の各枝 a について **do**
    if a が A_φ^+ の枝 **then**
      $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
    else if a が A_φ^- の枝 **then**
      $\varphi(\bar{a}) \leftarrow \varphi(\bar{a}) - d$.
    end if
  end for
  補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作り直す．
end while

図 2.10: プライマル-デュアル法

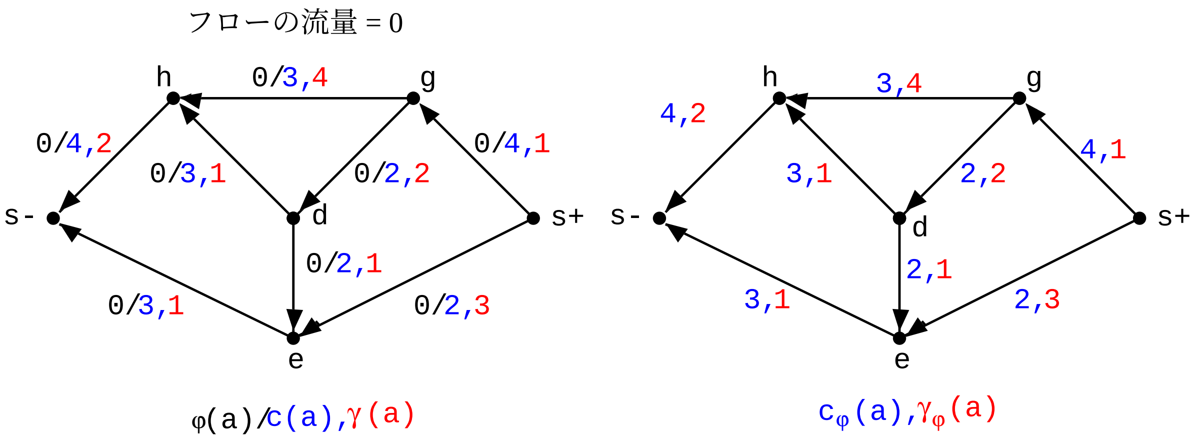

図 2.11: プライマル-デュアル法の動き (最初のフロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

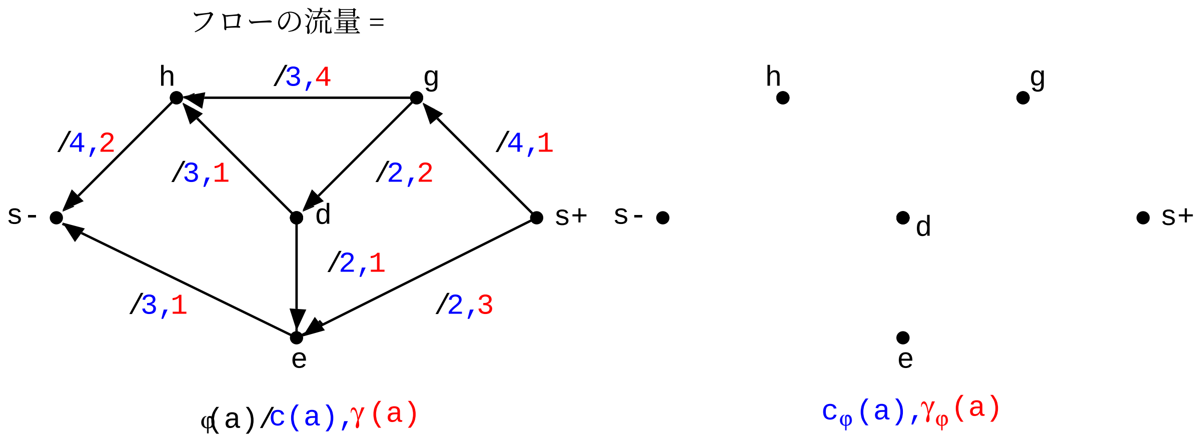

図 2.12: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

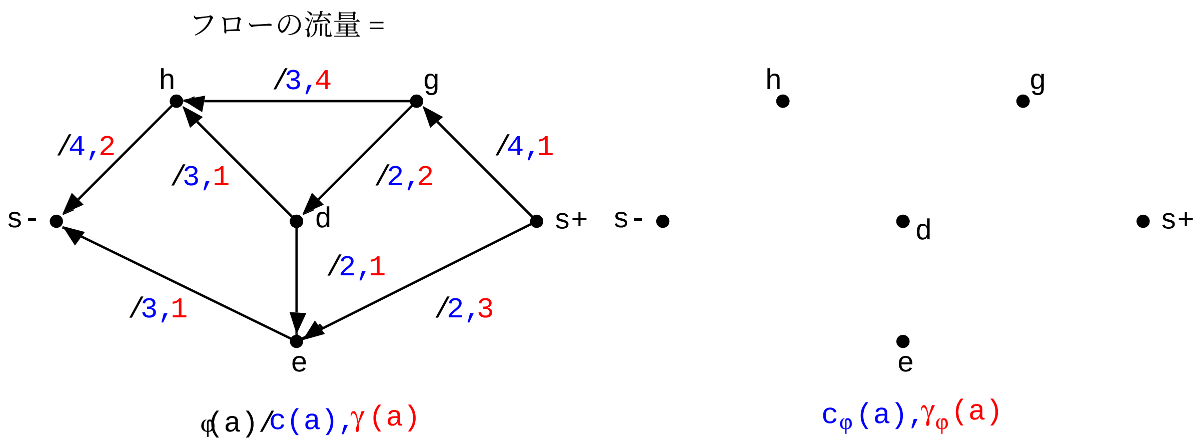

図 2.13: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

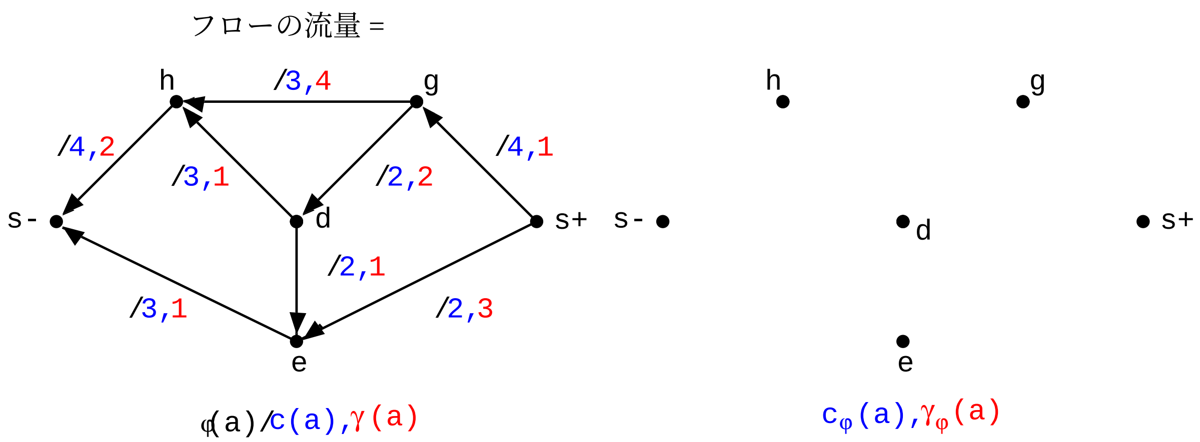

図 2.14: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

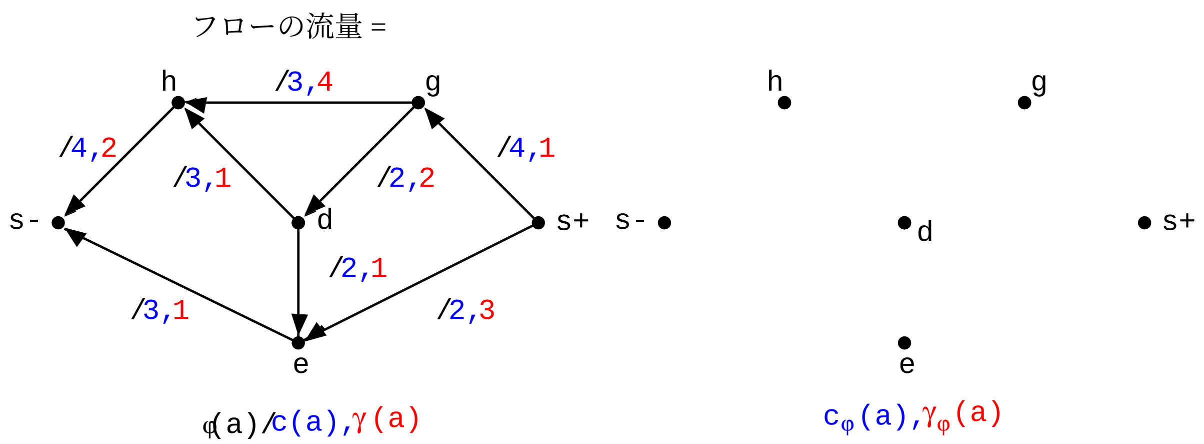

図 2.15: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)