グラフとネットワーク(第13回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2005.01.27

2.2. フローとカット

2.2.1. 2端子フロー

[アルゴリズムの正当性]

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ の**カット** (cut) とは, $s^+ \in U,\ s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことである. カット U の**容量** $\kappa_c(U)$ は, 以下で定義される.

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \tag{2.29}$$

ここで, Δ^+U は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体である.

例 2.1: 図 *2.1* のようにカット $U = \{s^+, d\}$ をとると, その容量は 7 である.

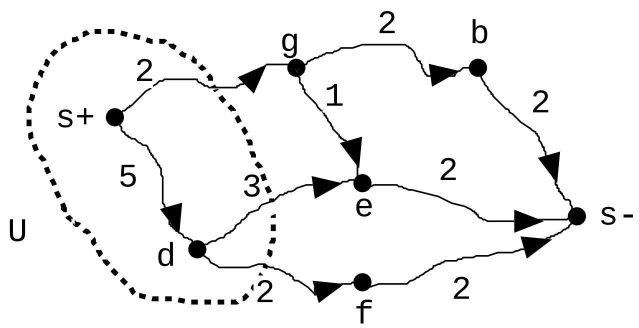
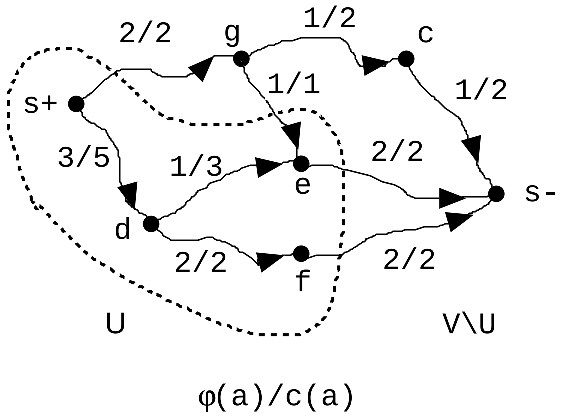


図 2.1: カット $U = \{s^+, d\}$

補題 2.7: ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \le \kappa_c(U) \tag{2.30}$$

が成り立つ.



$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
&= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(e) + \partial\varphi(f) \\
&= (2+3) + (1+2-3) \\
&\quad +(2-1-1) + (2-2) \\
&= 2+2+2-1 \\
&= \varphi(s^+, a) + \varphi(e, s^-) + \varphi(f, s^-) - \varphi(a, e) \\
&= \sum_{a\in\Delta^+U} \varphi(a) - \sum_{a\in\Delta^-U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a\in\Delta^+U} c(a) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

図 2.2: 式 (2.31) の説明

(証明)

$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v\in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a\in\Delta^+U} \varphi(a) - \sum_{a\in\Delta^-U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a\in\Delta^+U} c(a) - \sum_{a\in\Delta^-U} 0 \\
&= \kappa_c(U). \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

□

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー }\} \leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット }\} \qquad (2.32)$$

を得る.

定理 2.a: フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(証明) φ をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし, $\mathcal{N}$ の**ある**カット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \qquad (*)$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット }\} \leq \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \leq \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー }\}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大流であり, W は最小カットである.

φ に対応する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を考えよう (図 2.3 を見よ). このとき, 入口 s^+ から出口 s^- までの有向道は存在しない.

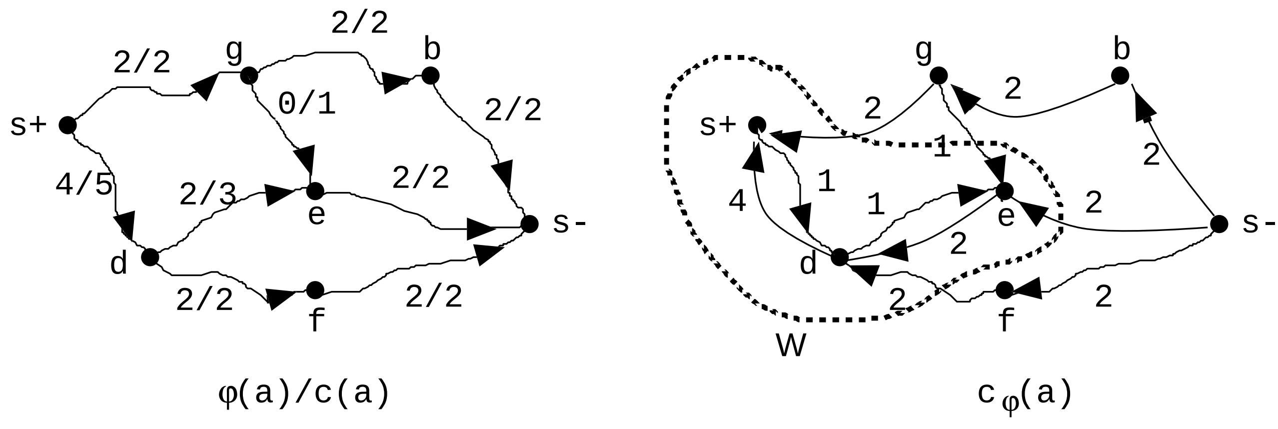


図 2.3: (a) アルゴリズムが終了したときの φ と (b) それに対応する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$

$\mathcal{N}_\varphi$ において, 入口 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W と置く (図 2.3 を見よ). このとき, $s^+ \in W$ であり, また, s^- は s^+ から到達可能ではないから $s^- \notin W$ である. したがって, W はカットである. このカット W に対して, (*) が成り立つことを示そう.

次の (ア),(イ) が成り立つ.

(ア) ネットワーク $\mathcal{N}$ において W から出る枝 a は, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ の中には存在しないから, $\varphi(a) = c(a)$.

(イ) ネットワーク $\mathcal{N}$ において W に入る枝 a' に対して, その逆向き枝 $\bar{a'}$ は補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ の中には存在しないから, $\varphi(a') = 0$.

したがって, 式 (2.31) と同じ計算をカット W と最大フロー φ に対して行うと,

$$
\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} \varphi(a) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- W} 0 \\
&= \kappa_c(W)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

を得る. □

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は, つぎのことを示したことにもなっている.

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理):

$$
\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\}. \tag{2.40}
$$

□

注意 2.b: 全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの各反復においてフローの流量は少くとも *1* ずつ増加する. したがって, 有限回で最大流に到達する. □

全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムは整数値のフローしか生みださない. したがって, 以下を得る.

定理 2.6: 容量関数 $c\colon A \to \mathbb{R}$ が整数値関数であるとき, 整数値 *(*各枝のフローの値が整数*)* の最大フローが存在する. □