

グラフとネットワーク (第12回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/gn/>

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2005.01.20

2.2. フローとカット

2.2.1. 2端子フロー

[フォード・ファルカーソンのアルゴリズム]

ここで考えるネットワークは, グラフ $G = (V, A)$ の相異なる特別な2点 s^+, s^- が指定されて, さらに, 各枝 $a \in A$ に対してその枝中を単位時間に流れるフローの流量の上限 $c(a)$ が定められているものである. そのようなネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ と書く. 特別な点 s^+ と s^- はそれぞれ入口 (source, entrance), 出口 (sink, exit) と呼ばれる.

例 2.1: 図 2.1(a) は, ネットワークの例である. □

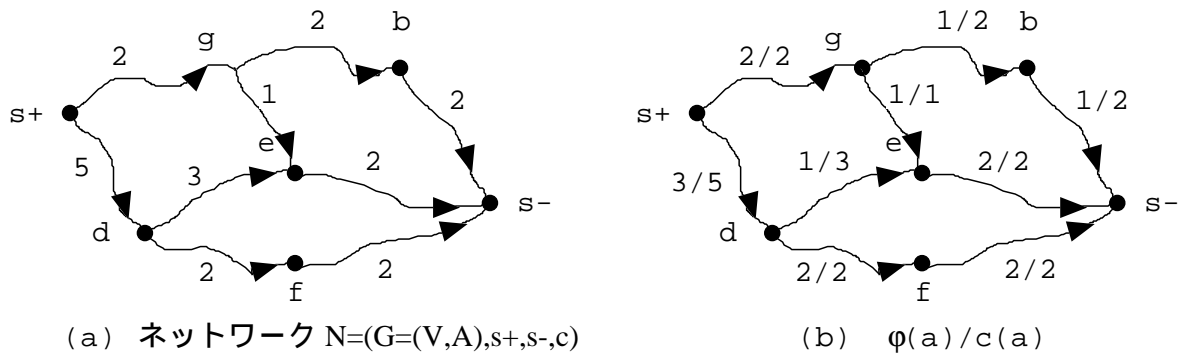


図 2.1: 容量付き有向グラフとフロー

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフロー (flow) とは, つぎの (i),(ii) を満足する枝集合上の実数値関数 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ のことである.

(i) 容量制約: 各枝 $a \in A$ に対して

$$0 \leq \varphi(a) \leq c(a). \quad (2.25)$$

(ii) 流量保存則 (キルヒホッフの法則): 各点 $v \in V \setminus \{s^+, s^-\}$ に対して

$$\partial\varphi(v) = 0. \quad (2.26)$$

ただし、各点 $v \in V$ に対して

$$\partial\varphi(v) = \sum_{a \in \delta^+v} \varphi(a) - \sum_{a \in \delta^-v} \varphi(a) \quad (2.27)$$

と定義され、 $\partial\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ はフロー φ の境界 (boundary) と呼ばれる。

例 2.2: 図 2.1(b) の φ は、図 2.1(a) のネットワーク上のフローである。□

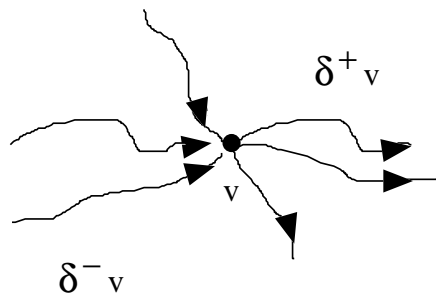


図 2.2: フローの境界

流量保存則によって、

$$\partial\varphi(s^+) = -\partial\varphi(s^-) \quad (2.28)$$

が成り立つ。(2.28) の値をフロー φ の流量 (value, flow value) といい、 $v^*(\varphi)$ と書くことにする。

例 2.3: 図 2.1(b) のフロー φ の流量は、5 である。

与えられたネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ に対して、 \mathcal{N} 上のフロー φ でその流量 $v^*(\varphi)$ が最大であるようなものを最大フロー (最大流) (maximum flow) と呼び、最大フローを求める問題を最大フロー問題 (maximum flow problem) と呼ぶ。

図 2.3 に最大フロー問題を解くフォード-ファルカーソンのアルゴリズムを記述する。その前に、補助ネットワークという概念について説明しなければならない。

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 上のフロー φ が与えられたときに、 φ に関する補助ネットワーク (auxiliary network) $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi)$ とは、以下のよう
に定義される。枝集合 A_φ は、

$$A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-, \quad (2.33)$$

$$A_\varphi^+ = \{a | a \in A, \varphi(a) < c(a)\} \quad (2.34)$$

$$A_\varphi^- = \{\bar{a} | a \in A, 0 < \varphi(a)\} \quad (\bar{a}: a \text{ の逆向き枝}) \quad (2.35)$$

で与えられ、容量関数 $c_\varphi: A_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ はつぎのように定義される。

$$c_\varphi(a) = \begin{cases} c(a) - \varphi(a) & \text{if } a \in A_\varphi^+ \text{ のとき,} \\ \varphi(\bar{a}) & \text{if } a \in A_\varphi^- \text{ のとき.} \end{cases} \quad (2.36)$$

- 1: $\varphi(a) \leftarrow 0 \ (a \in A)$.
- 2: 補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を作る.
- 3: for \mathcal{N}_φ 上に s^+ から s^- までの有向道 P が存在する do
- 4: $d \leftarrow \min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}$.
- 5: for P の各枝 a について do
- 6: if a が A_φ^+ の枝 then
- 7: $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
- 8: else if a が A_φ^- の枝 then
- 9: $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) - d$.
- 10: end if
- 11: end for
- 12: 補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を作り直す.
- 13: end for

図 2.3: フォード-ファルカーソンのアルゴリズム

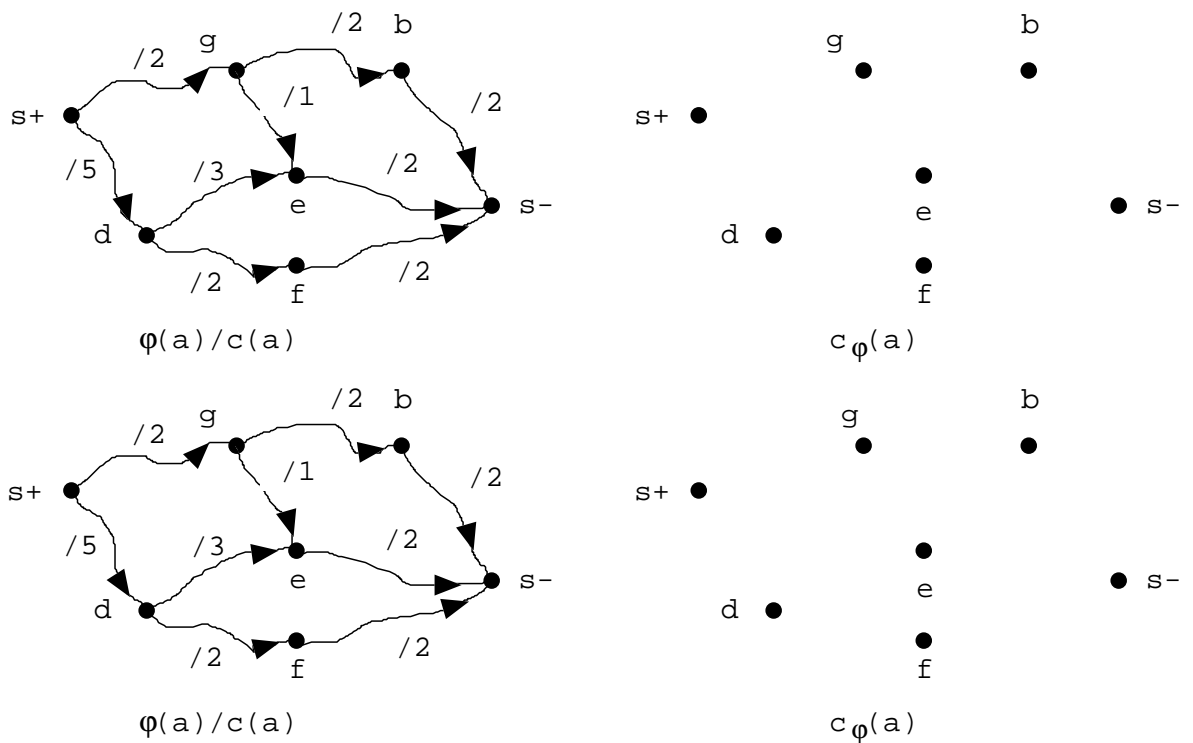


図 2.4: アルゴリズムの動き

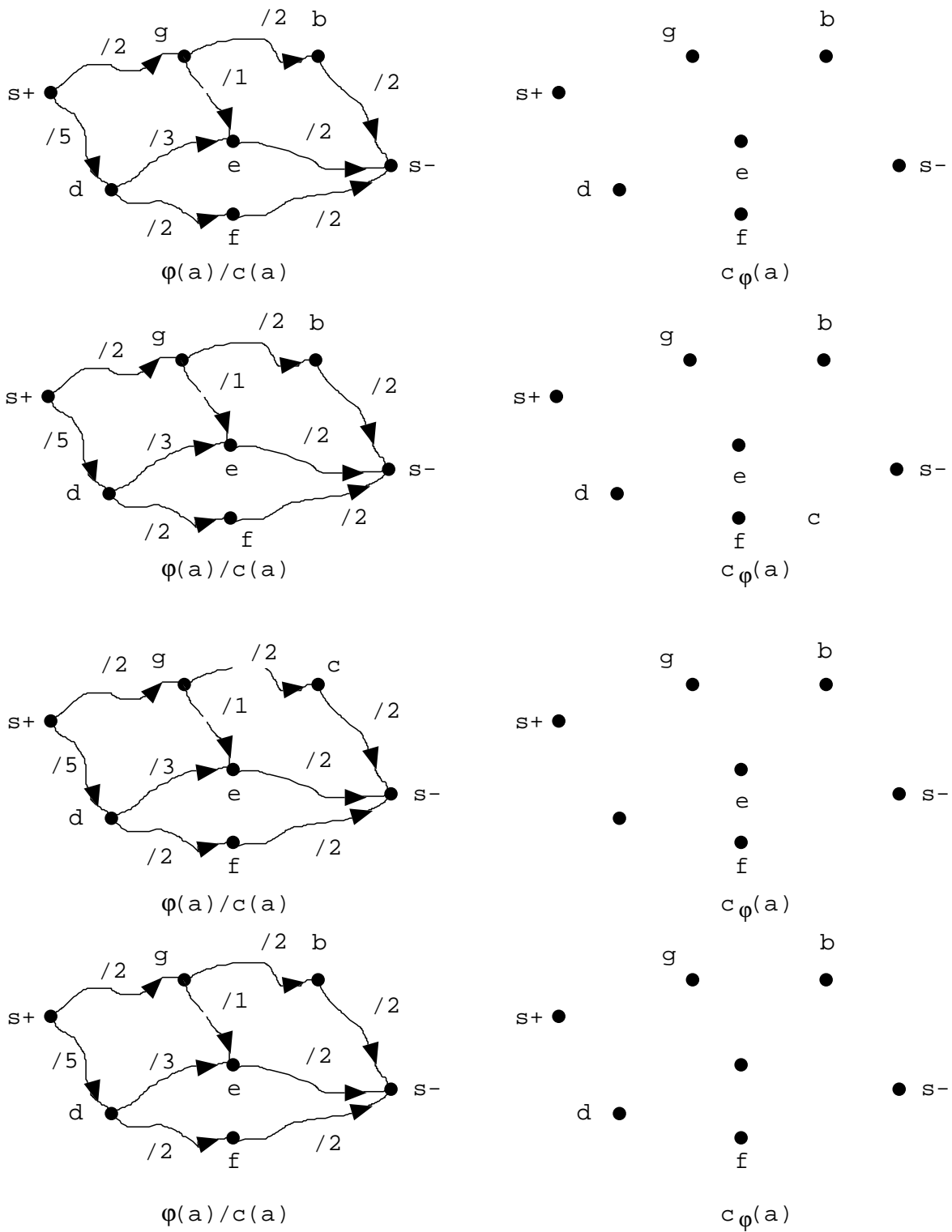


図 2.5: アルゴリズムの動き (続き)

例 2.4: 図 2.4 と図 2.5 にアルゴリズムが動作する様子を示す. 最大フローの流量は 6 である. \square

[アルゴリズムの正当性]

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ のカット (cut) とは, $s^+ \in U, s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことである. カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は, 以下で定義される.

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \quad (2.29)$$

ここで, Δ^+U は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体である.

例 2.5: 図 2.6 のようにカット $U = \{s^+, d\}$ をとると, その容量は 7 である.

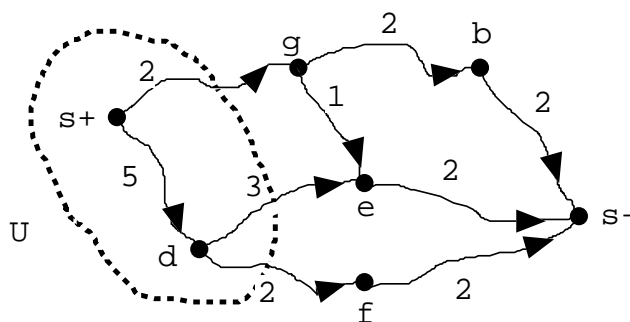


図 2.6: カット $U = \{s^+, d\}$

補題 2.7: ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \leq \kappa_c(U) \quad (2.30)$$

が成り立つ.

(証明)

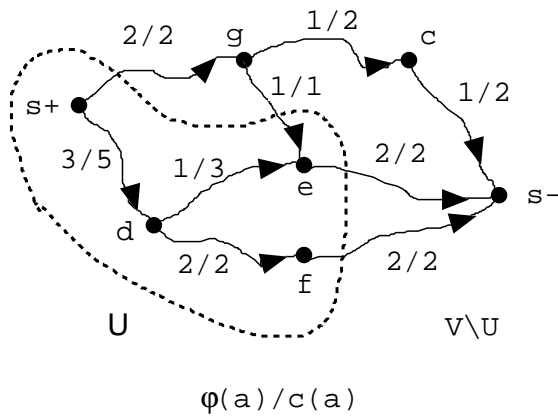
$$\begin{aligned} v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\ &= \sum_{a \in \Delta^+U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^-U} \varphi(a) \\ &\leq \sum_{a \in \Delta^+U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^-U} 0 \\ &= \kappa_c(U). \end{aligned} \quad (2.31)$$

\square

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} \leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \quad (2.32)$$

を得る.



$$\begin{aligned}
 v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
 &= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(e) + \partial\varphi(f) \\
 &= (2+3) + (1+2-3) \\
 &\quad + (2-1-1) + (2-2) \\
 &= 2+2+2-1 \\
 &= \varphi(s^+, a) + \varphi(e, s^-) + \varphi(f, s^-) - \varphi(a, e) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
 &\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

図 2.7: 式 (2.31) の説明

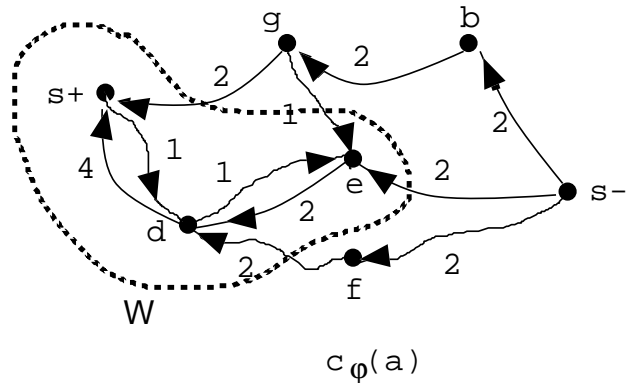
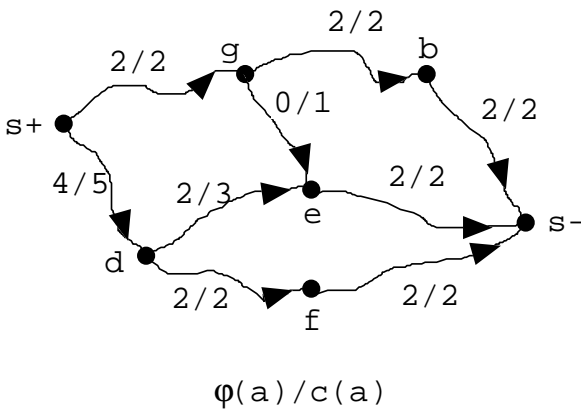


図 2.8: (a) アルゴリズムが終了したときの φ と (b) それに対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ

定理 2.a: フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(証明) φ をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし, \mathcal{N} のあるカット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \quad (*)$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \leq \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \leq \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大流であり, W は最小カットである.

φ に対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を考えよう (図 2.8 を見よ). このとき, 入口 s^+ から出口 s^- までの有向道は存在しない.

\mathcal{N}_φ において, 入口 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W と置く (図 2.8 を見よ). このとき, $s^+ \in W$ であり, また, s^- は s^+ から到達可能ではないから $s^- \notin W$ である. したがって, W はカットである. このカット W に対して, (*) が成り立つことを示そう.

次の (ア), (イ) が成り立つ.

- (ア) ネットワーク \mathcal{N} において W から出る枝 a は, 補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから, $\varphi(a) = c(a)$.
- (イ) ネットワーク \mathcal{N} において W に入る枝 a' に対して, その逆向き枝 \bar{a}' は補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから, $\varphi(a') = 0$.

したがって, 式 (2.31) と同じ計算をカット W と最大フロー φ に対して行くと,

$$\begin{aligned}
 v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^-W} \varphi(a) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^-W} 0 \\
 &= \kappa_c(W)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

を得る. \square

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は, つぎのことを示したことにもなっている.

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理):

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\}. \tag{2.40}$$

\square

注意 2.b: 全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの各反復においてフローの流量は少くとも 1 ずつ増加する. したがって, 有限回で最大流に到達する. \square

全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムは整数値のフローしか生みださない. したがって, 以下を得る.

定理 2.6: 容量関数 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ が整数値関数であるとき, 整数値 (各枝のフローの値が整数) の最大フローが存在する. \square