離散システム論 (第 14 回)

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2012.07.19; 2012.07.20 改訂

5. プライマル-デュアル法

最小費用フロー問題に対する別のアルゴリズムとして, プライマル-デュアル法を紹介する. プライマル法では, 常に与えられた流量 $\hat{v}$ を持つフロー x を維持しながら, 補助ネットワーク $(G(x), c')$ に負の長さの有向閉路がなくなったとき, つまり x が最適になったときに終了する. 一方で, プライマル-デュアル法では, 流量が $\hat{v}$ より小さいフロー (例えばゼロフローでもいい) x で, x と同じ流量を持つフローのなかでは x は費用が最小であるものを維持しながら反復を繰り返し, x の流量が $\hat{v}$ と等しくなったときに終了する.

プライマル-デュアル法の各反復では, 最大フロー問題に対するフォード-ファルカーソンのアルゴリズムと同様に補助グラフの中で r から s への有向道を見付けて, その有向道に沿ってフローを増加 (減少) する. ここで, その有向道は枝の長さ c' に関して最短のものが選ばれる. 図 5.1 に, プライマル-デュアル法を形式的に示す.

$x_{vw} \leftarrow 0$ $(vw \in E)$.
補助ネットワーク $(G(x), c')$ を作る.
while $f_x(r) < \hat{v}$ **do**
    P を $(G(x), c')$ 中の r から s への最短路とする.
    P に沿ってフローをできる限り流す. (ただし, $f_x(r) \leq \hat{v}$ となるように.)
    補助ネットワーク $(G(x), c')$ を作り直す.
end while

図 5.1: プライマル-デュアル法

例 5.1: 図 5.2 に示したネットワーク $(G = (V, E), u, c)$ と $\hat{v} = 5$ が与えられたとしよう. 図 5.3〜図 5.7 にプライマル-デュアル法の動作を示す. □

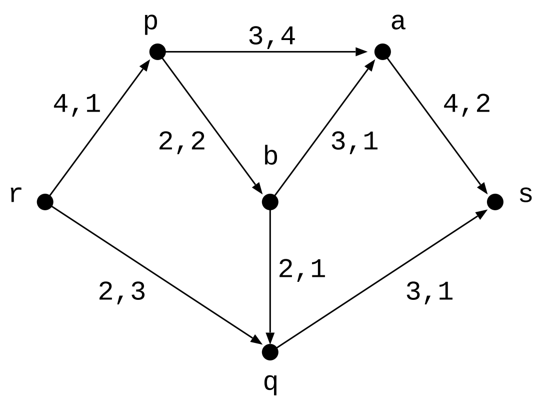

図 5.2: ネットワーク $(G = (V, E), u, c)$ の例. 枝 vw の横の数は u_{vw}, c_{vw} を表す.

図 5.3〜図 5.7 に示した補助ネットワークには負の長さの有向閉路は存在しないことが, それぞれの補助ネットワークに対する可能ポテンシャルを与えることで確認できる. したがって, アルゴリズムの途中に現

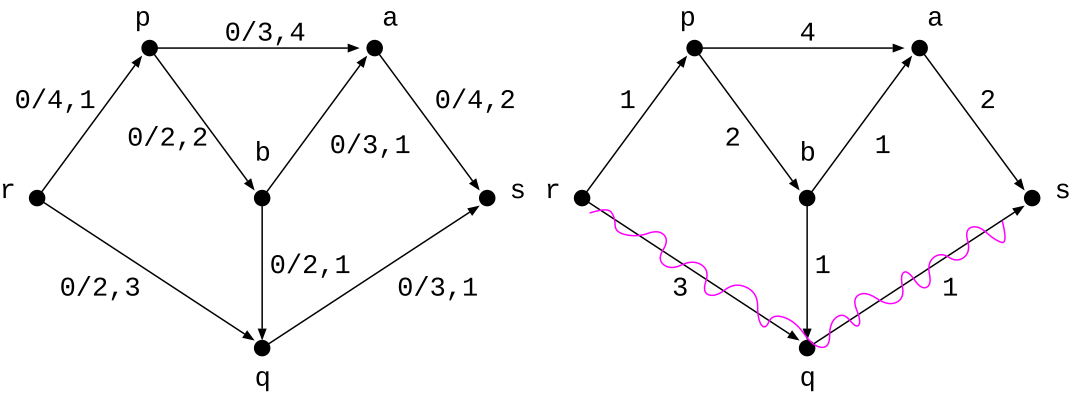

図 5.3: プライマル-デュアル法の動き (最初のフロー x と補助ネットワーク $(G(x), c'))$

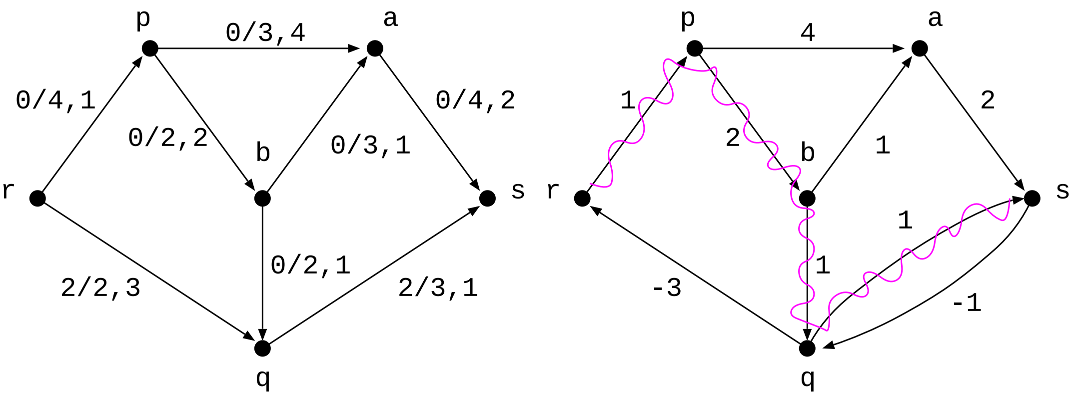

図 5.4: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x' と補助ネットワーク $(G(x'), c'))$

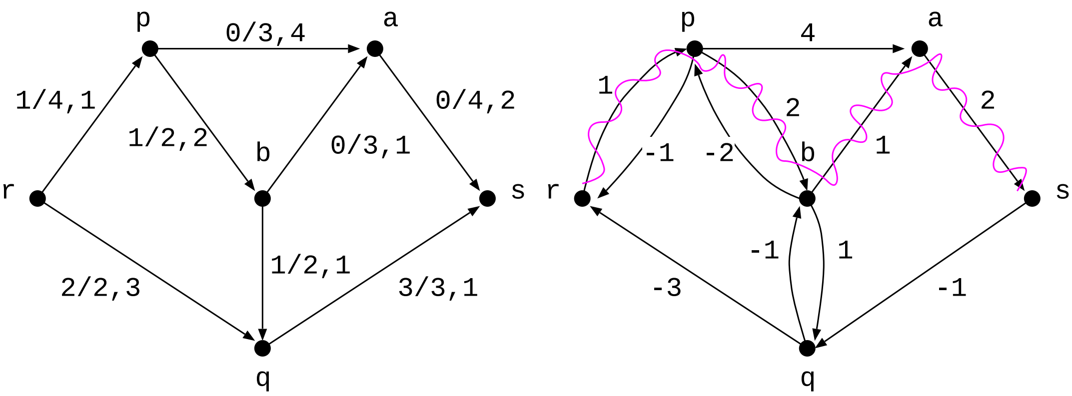

図 5.5: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x'' と補助ネットワーク $(G(x''), c'))$

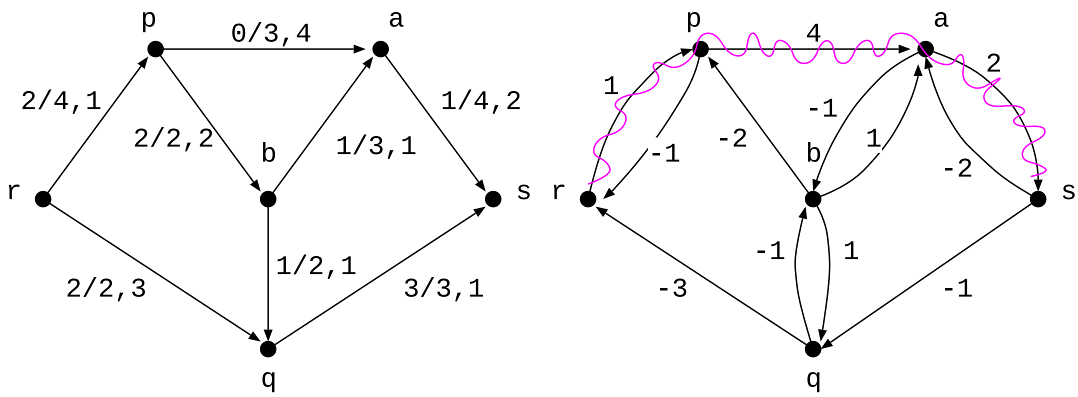

図 5.6: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x''' と補助ネットワーク $(G(x'''), c'))$

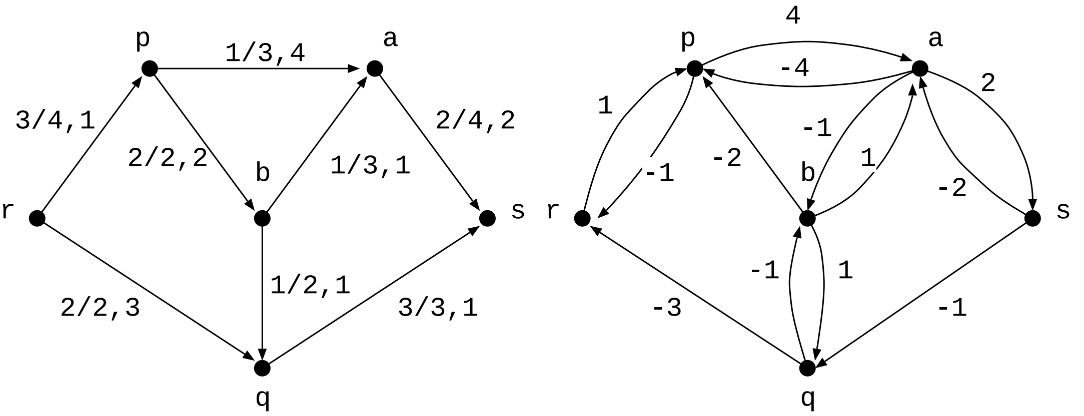

図 5.7: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x'''' と補助ネットワーク $(G(x''''), c')$)

れる各フローはそのフローと同じ流量を持つフローの中で費用が最小のものになっていることが分かる. 特に, 最後に得られたフローは与えられた流量 $\hat{v}$ を持つフローの中で費用が最小である.

このことが常に成り立つことを以下で示そう.

定理 5.2: プライマル-デュアル法では, 途中で得られる各フロー x は, x と同じ流量をもつ $(G = (V, E), u, c)$ 中のフローのうちで費用が最小なものになっている.

(証明) まず初期フロー $x = \mathbf{0}$ について考える. 与えられたネットワーク $(G = (V, E), u, c)$ のすべての枝の費用は非負である. したがって, このフローは流量が 0 であるフローのうちで費用が最小 (= 0) である. ゆえに定理の主張は成り立っている.

アルゴリズムを何回か繰返して得られたフロー x を考える. このフロー x に対して定理の主張が成り立っていると仮定する. つまり, x は x と同じ流量をもつ $(G = (V, E), u, c)$ 中のフローのうちで費用が最小であるとする. すると定理 4.1 より, $G(x)$ には c' に関して負の長さの有向閉路は存在しない. 第 12 回で示した定理 1.3 によって, $G(x)$ に対する可能ポテンシャル $y = (y_v)_{v \in V}$ が存在する. つまり, 補助ネットワーク $(G(x), c')$ のすべての枝 vw に対して $y_v + c'_{vw} \geq y_w$ となる. 特に, P を $(G(x), c')$ 中の r から s への最短路とすると, P 上の各枝 vw に対して,

$$y_v + c'_{vw} = y_w$$

が成り立っていると仮定できる. (例えば, 図 5.5 のフロー x'' を x として考えると下の図 5.8 の右に四角の中に示した可能ポテンシャルが得られる.)

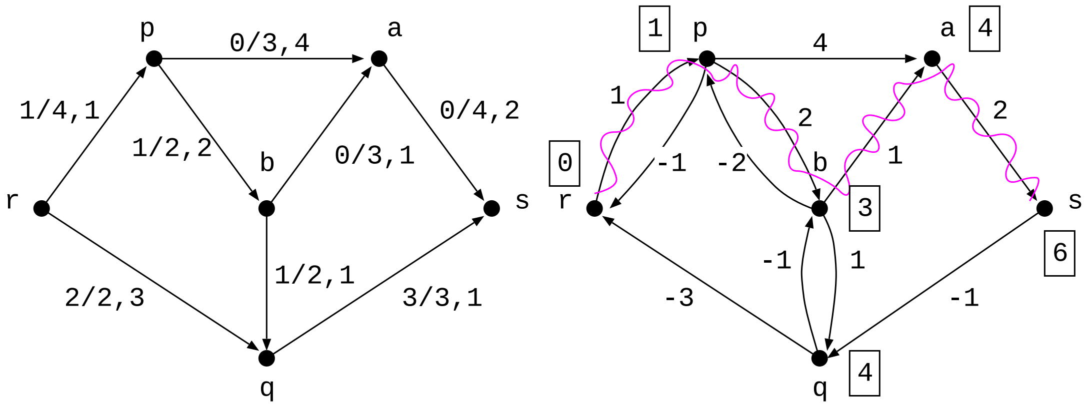

図 5.8: 証明の説明: フロー x と補助ネットワークに対する可能ポテンシャル

$(G(x), c')$ 中の r から s への最短路 P に沿ってフローを流すことによって更新したフローを x' とする. 我々は, 上で用いたのと同じベクトル y に対して, 補助ネットワーク $(G(x'), c')$ のすべての枝 vw に対して $y_v + c'_{vw} \geq y_w$ が成り立つことを示す.

$(G(x'), c')$ の任意の枝 vw を考える．もし vw が $(G(x), c')$ に元からあった枝ならば, 当然 $y_v + c'_{vw} \geq y_w$ が成り立つ．vw が $(G(x), c')$ になくて, $(G(x'), c')$ に新たに出現した枝であるとする．すると, P 上の枝 wv を逆向きにした枝 vw である．wv が P 上の枝であるから, $y_w + c'_{wv} = y_v$ である．また, $c'_{vw} = -c'_{wv}$ であるから,

$$y_v + c'_{vw} = y_v - c'_{wv} = y_w \tag{5.1}$$

である．

(例えば, 図 5.5 のフロー x'' を x とすると, x' は図 5.6 のフロー x''' である．このとき, $(G(x'), c')$ に新たに現れた枝は, ab と sa である．これらの枝で, 式 (5.1) が成り立つことが確認できる．下の図 5.8 の右を見よ.)

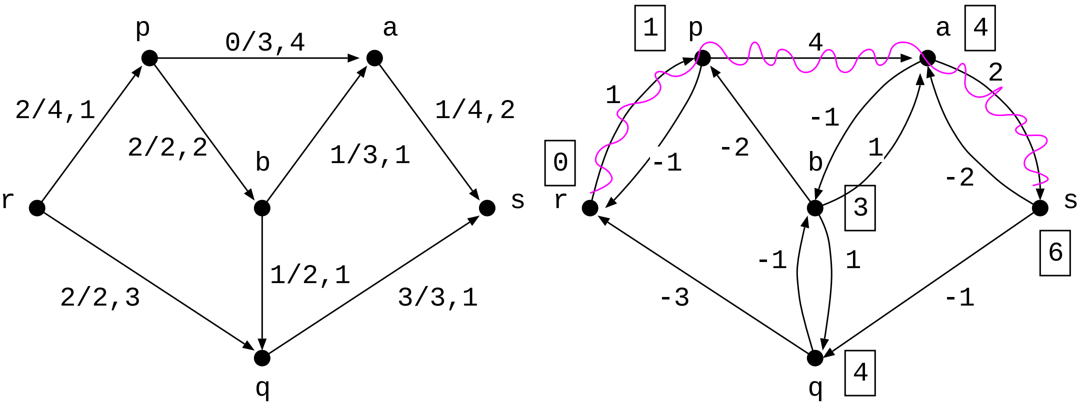

図 5.9: 証明の説明: フロー x' と補助ネットワークに対する可能ポテンシャル

補助ネットワーク $(G(x'), c')$ のすべての枝 vw に対して $y_v + c'_{vw} \geq y_w$ となるということが言えた．再び第 12 回で示した定理 1.3 を用いると, $(G(x'), c')$ には負の長さの有向閉路は存在しない．したがって, 定理 4.1 によって, x' は x' と同じ流量をもつフローのうちで, 費用が最小である．□

6. プライマル-デュアル法の高速化

定理 5.2 の証明で用いたポテンシャルを使えば, プライマル-デュアル法の中で最短路を求める際にベルマン-フォード法の代わりにより高速なダイクストラ法を使うことができる．定理 5.2 の証明で示したことは, 例えば図 5.8 に示されるように, その前の反復で得られた可能ポテンシャル y が, 現在の反復の最初においても可能ポテンシャルになっているということである．したがって, $(G(x'), c')$ に対して最短路問題を解くよりも, 枝の長さを

$$\tilde{c}_{vw} = c'_{vw} + y_v - y_w \quad (vw \in E(x'))$$

に変更すれば, $\tilde{c}_{vw} \geq 0$ $(vw \in E(x'))$ となるから Dijkstra 法によって最短路を求めることができる．図 6.1(a) に, $(G(x'), \tilde{c})$ を示した．さらに, $(G(x'), \tilde{c})$ に対して r から s への最短路 P' を求めることによって得られる最短距離 ($(G(x'), \tilde{c})$ の可能ポテンシャル) $\tilde{y}$ を図 6.1(b) に示した．最短距離の性質によって,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{vw} + \tilde{y}_v &\geq \tilde{y}_w \quad (vw \in E(x')), && (6.1)\\ \tilde{c}_{vw} + \tilde{y}_v &= \tilde{y}_w \quad (vw \in P') && (6.2) \end{aligned}$$

が成り立つが, $\tilde{c}$ の定義によってこれらの式は,

$$\begin{aligned} c'_{vw} + y_v + \tilde{y}_v &\geq y_w + \tilde{y}_w \quad (vw \in E(x')), && (6.3)\\ c'_{vw} + y_v + \tilde{y}_v &= y_w + \tilde{y}_w \quad (vw \in P') && (6.4) \end{aligned}$$

となる．したがって, $y_v + \tilde{y}_v$ $(v \in V)$ は, P' は $(G(x'), c')$ の r から s への最短路であることを示す可能ポテンシャルとなっている．したがって, 次の反復では, この $y_v + \tilde{y}_v$ $(v \in V)$ を使用して枝の長さを変更すれば

良い．つまり，

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_{vw} &:= c'_{vw} + (y_v + \tilde{y}_v) - (y_w + \tilde{y}_w) & (6.5)\\
&= \tilde{c}_{vw} + \tilde{y}_v - \tilde{y}_w & (6.6)
\end{aligned}
$$

とすれば良い．

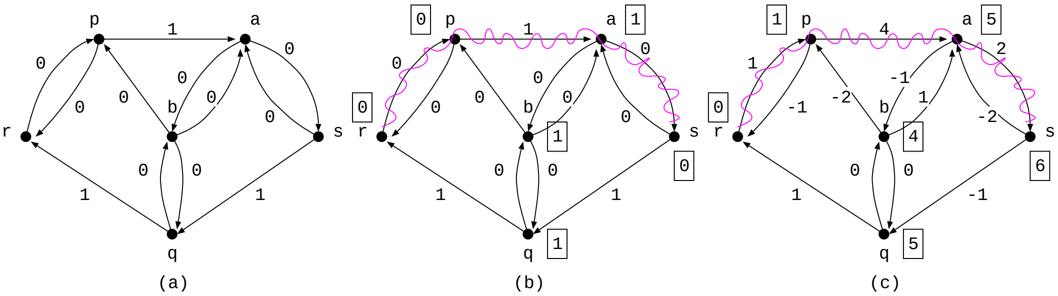

図 6.1: 可能ポテンシャルの更新. (a) $\tilde{c}$; (b) $\tilde{y}$; (c) 更新された y

上で述べたことを行いながら，最初から最後まで通してアルゴリズムを動かしたものが図 6.2〜図 6.6 である．

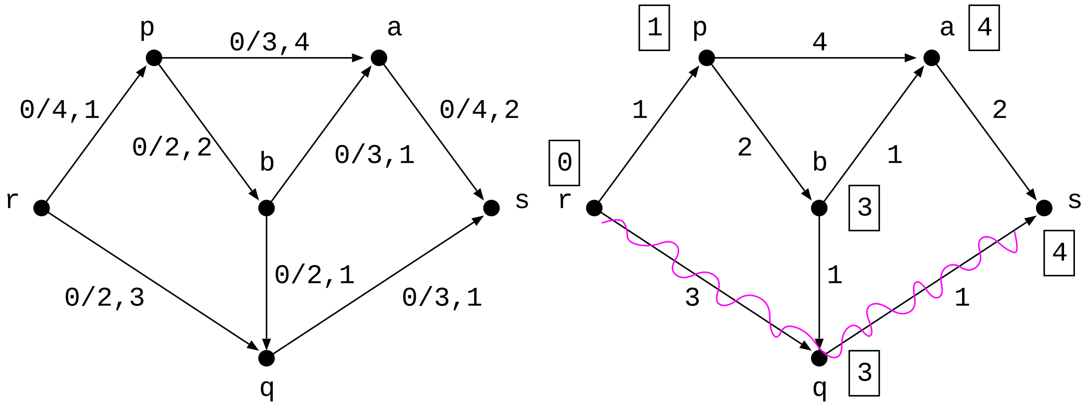

図 6.2: プライマル-デュアル法の動き (最初のフロー x と補助ネットワーク $(G(x), \tilde{c})$)

高速版のプライマル-デュアル法を形式的に表したものが，図 6.7 である．

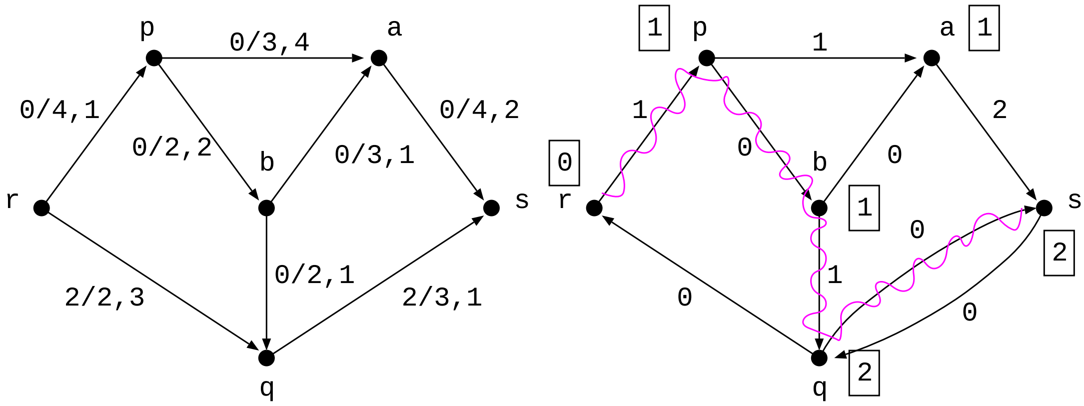

図 6.3: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x' と補助ネットワーク $(G(x'), \tilde{c})$)

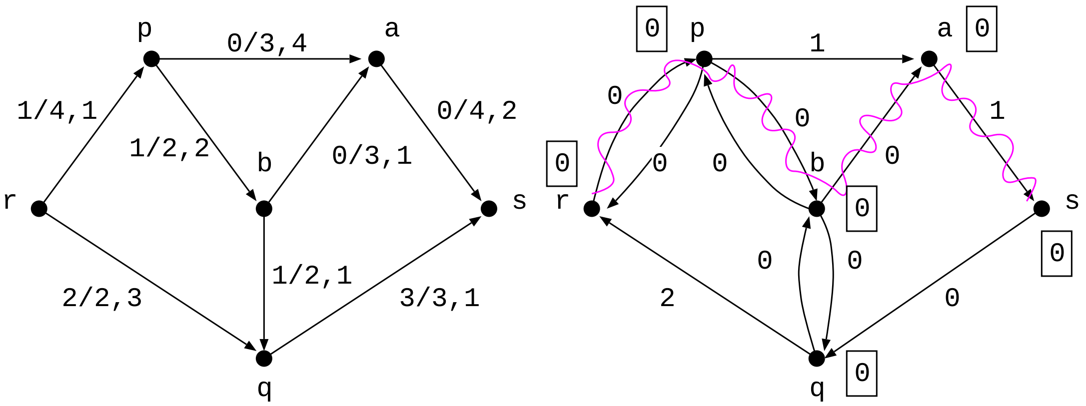

図 6.4: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x'' と補助ネットワーク $(G(x''), \tilde{c})$)

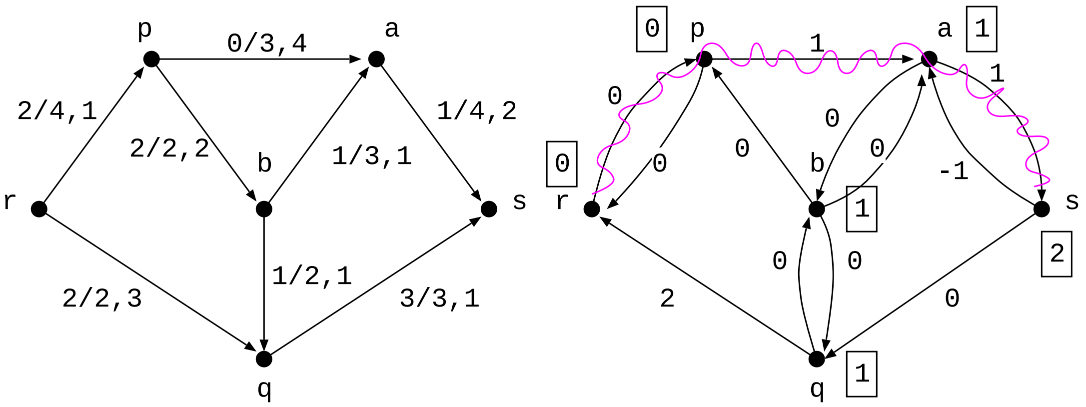

図 6.5: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x''' と補助ネットワーク $(G(x'''), \tilde{c})$)

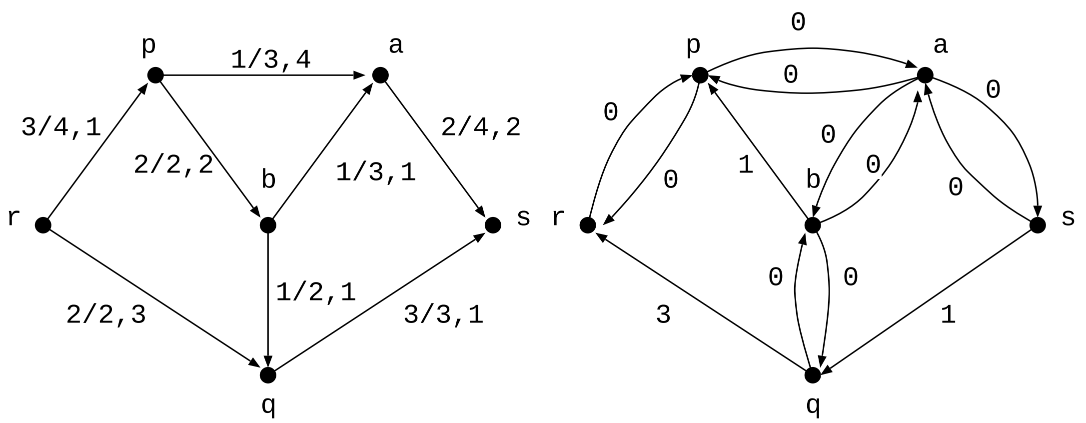

図 6.6: プライマル-デュアル法の動き (更新されたフロー x'''' と補助ネットワーク $(G(x''''), \tilde{c})$)

$x_{vw} \leftarrow 0$ $(vw \in E)$.
$y_v \leftarrow 0$ $(v \in V)$.
補助ネットワーク $(G(x), c')$ を作る.
$\tilde{c}_{vw} \leftarrow c'_{vw} + y_v - y_w$ $(vw \in E)$.
while $f_x(r) < \hat{v}$ **do**
    P を $(G(x), \tilde{c})$ 中の r から s への最短路とし, y_v を r から v への最短距離とする.
    P に沿ってフローをできる限り流す. (ただし, $f_x(r) \leq \hat{v}$ となるように.)
    補助グラフ $G(x)$ を作り直す.
    $\tilde{c}_{vw} \leftarrow \tilde{c}_{vw} + y_v - y_w$ $(vw \in E)$.
end while

図 6.7: プライマル-デュアル法 (高速版)