離散システム論 (第 {13,14} 回)

安藤 和敏

2012.07.{12,19}

1. 最小費用フロー問題

最小費用フロー問題で考える**ネットワーク** $(G = (V,E), u, c)$ は, 最大フロー問題のときと同じ入口 r と出口 s をもつ有向グラフ $G = (V,E)$ と容量関数 $u\colon E \to \mathbb{R}$ に加えて, 各枝に流れるフロー 1 単位あたりの**費用**を与える費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$ からなる.

例 1.1: $V = \{r,a,b,p,q,s\}$, $E = \{rp, rq, pa, pb, ba, bq, as, qs\}$, かつ, u_{vw} $(vw \in E)$ と c_{vw} $(vw \in E)$ は以下の表で与えられるものとする.

vw	rp	rq	pa	pb	ba	bq	as	qs
u_{vw}	4	2	3	2	3	2	4	3
c_{vw}	1	3	4	2	1	1	2	1

このようなネットワーク $(G = (V,E), u, c)$ を今後は図 1.1 のように示す. □

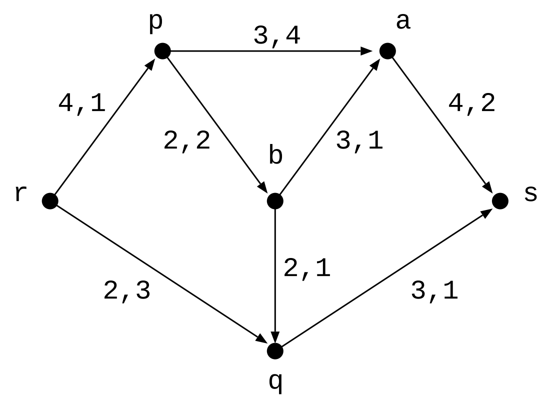

図 1.1: ネットワーク $(G = (V,E), u, c)$ の例. 枝 vw の横の数は u_{vw}, c_{vw} を表す.

ネットワーク $(G = (V,E), u, c)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられたとき, **最小費用フロー問題**は, 以下で定義される線形計画問題である.

$$\left|\begin{array}{llll} \min & \sum_{vw\in E} c_{vw}x_{vw} & & \\ \text{s.t.} & f_x(r) & = \hat{v} & \\ & f_x(s) & = -\hat{v} & \\ & f_x(v) & = 0 & (v \in V - \{r,s\}) \\ & x_{vw} & \le u_{vw} & (vw \in E) \\ & x_{vw} & \ge 0 & (vw \in E) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

言い換えると, 最小費用フロー問題とは与えられた流量 $\hat{v}$ をもつフロー x の中で, その費用 $\sum_{vw\in E} c_{vw}x_{vw}$ を最小にするもの (最小費用フロー) を求める問題である.

例 1.2: 例 1.1 のネットワーク $(G=(V,E),u,c)$ と $\hat{v}=5$ が与えられたとしよう．図 1.2 に示したものは，流量 $\hat{v}=5$ のフロー x である．このフロー x の費用は，

$$1\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 2=28$$

である．(後で見るようにこれは費用が最小のフローではない．つまり，28 より小さい費用をもつ流量が $\hat{v}=5$ のフローがある．) □

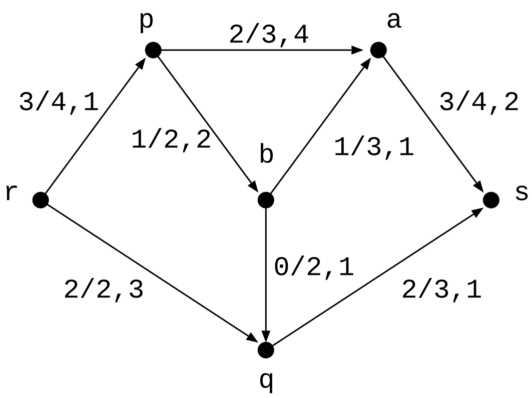

図 1.2: 例 1.1 のネットワーク中のフロー x．各枝の横の分数は $x_{vw}/u_{vw}, c_{vw}$ を表す．

2. プライマル・アルゴリズム

最小費用フロー問題を解くためのアルゴリズムには，プライマル法，ネットワークシンプレックス法，などがあるが，ここでは，**プライマル法**についてのみ学ぶ．

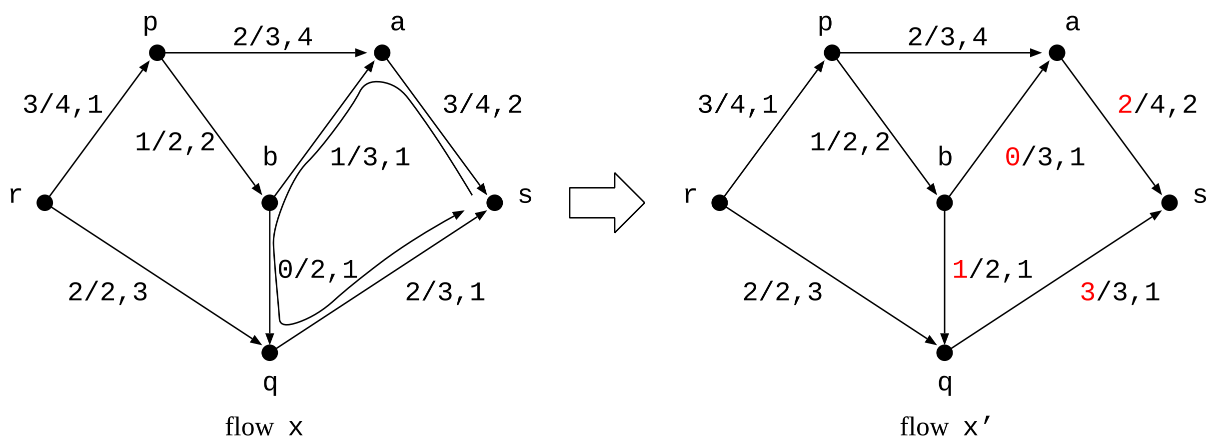

図 2.1: 負の費用をもつ増加閉路に沿ったフローの更新

図 1.2 に示したフロー x を考えてみよう．ネットワークを，$\underline{sa}, \underline{ab}, bq, qs$ という閉路をこの順番にたどって，順向きの枝についてはフローを 1 だけ増加して，逆向きにたどる枝についてはフローを 1 だけ減らせば，x と同じ流量 $\hat{v}=5$ をもつフロー x' が得られる．さらに，

$$x' \text{ の費用} = x \text{ の費用} + (-c_{sa} - c_{ab} + c_{bq} + c_{qs}) = x \text{ の費用} - 1$$

が成り立つ．つまり，x より費用の小さいフローが得られた．

フロー x からフロー x' を得るために用いた閉路は，フロー x に対する**増加閉路**と呼ばれる．フロー x に対する増加閉路 C とは，

(i) C 上のすべての順向きの枝 vw に対して $x_{vw} < u_{vw}$，かつ，

(ii) C 上のすべての逆向きの枝 vw に対して $0 < x_{vw}$

が成り立つような閉路である. 増加閉路 C の**費用**は,

$$\sum\{c_{vw} \mid vw \in C, vw \text{ は順向き }\} - \sum\{c_{wv} \mid vw \in C, vw \text{ は逆向き }\}$$

である. 例で示したように, 負の費用をもつ増加閉路に沿ってフローをだけ一巡させれば, 元のフローより少ない費用をもつフローが得られる.

負の費用を持つ増加閉路を見付けるために, 以下に説明する補助ネットワークを用いると便利である. ネットワーク $(G = (V, E), u, c)$ 中のフロー x に対して, 補助ネットワーク $(G(x) = (V, E(x)), c')$ は以下のように構成される. 有向グラフ $G(x)$ の枝集合 $E(x)$ は,

$$E(x) = \{vw \mid vw \in E, x_{vw} < u_{vw}\} \cup \{wv \mid vw \in E, 0 < x_{vw}\} \tag{2.33}$$

である. $vw \in E, x_{vw} < u_{vw}$ なる $E(x)$ の枝 vw の費用は $c'_{vw} = c_{vw}$ によって, $vw \in E, x_{vw} < u_{vw}$ なる $E(x)$ の枝 wv の費用は $c'_{wv} = -c_{vw}$ によって定義される. 図 1.2 のフローに対応する補助ネットワークを図 2.2 に示した.

補助ネットワークの定義から明らかなように, x に対する増加閉路と補助ネットワーク $(G(x), c')$ 中の有向閉路は 1 対 1 に対応し, 対応する増加閉路の費用と有向閉路の長さは等しい.

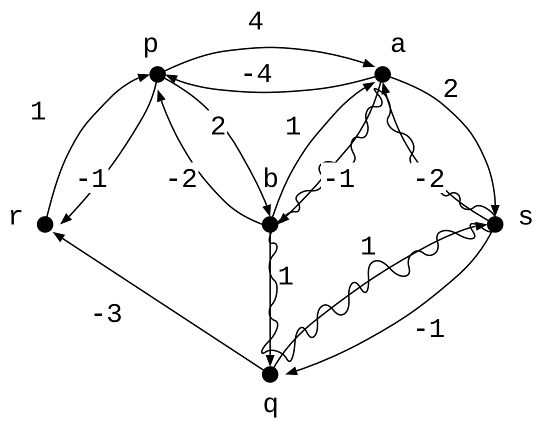

図 2.2: 補助ネットワーク $(G(x) = (V, E(x)), c')$ の例

[プライマル法] プライマル法は, 適当な初期フロー x から出発して, $(G(x), c')$ 中に負の長さの有向閉路が存在する限り, その有向閉路にそってフローを一巡させて, フロー x を更新してゆくというアルゴリズムである. 図 2.3〜図 2.5 にプライマル法の動きを示した. 最後に得られたフロー x'' に対しては, $(G(x''), c')$ 中に負の長さの有向閉路は存在しない. このフローが最適であるということは, 後ほど証明する.

プライマル法の各繰り返しにおいて, 負の長さの有向閉路を見付けなければならない. 補助ネットワークの枝には長さが負のものもあるので, 負の長さの有向閉路を見付けるためには, フォードのアルゴリズム (あるいは, ベルマン-フォード法) を用いればよい. (もちろん, 紙の上で解くときには, 試行錯誤によって負の長さの有向閉路を見付けてもよい.) 負の長さの有向閉路が存在しないということの保証を得るためには, やはりフォードのアルゴリズムによって可能ポテンシャルを見付けなければならない.

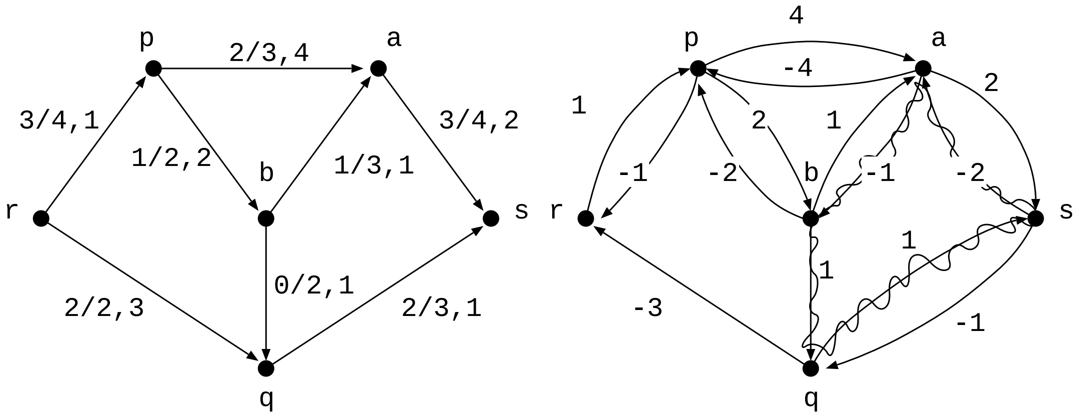

図 2.3: プライマル法の動き (最初のフロー x と補助ネットワーク $(G(x), c')$)

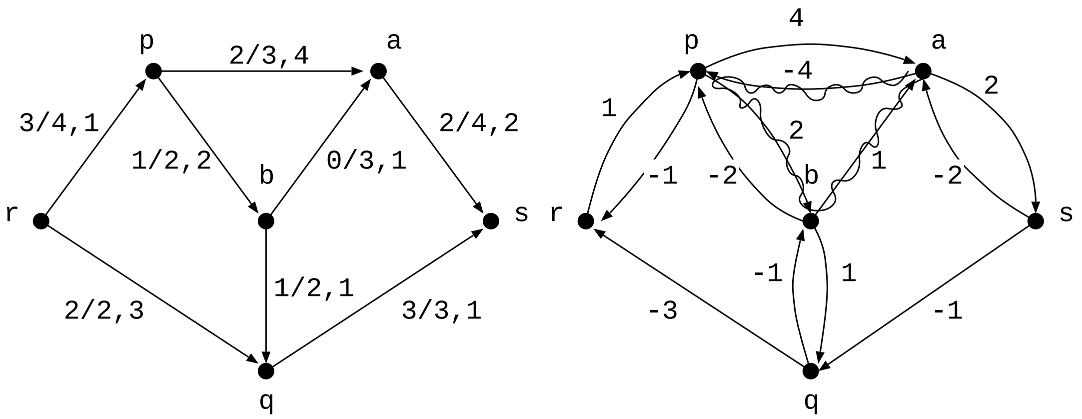

図 2.4: プライマル法の動き (更新されたフロー x' と補助ネットワーク $(G(x'), c')$)

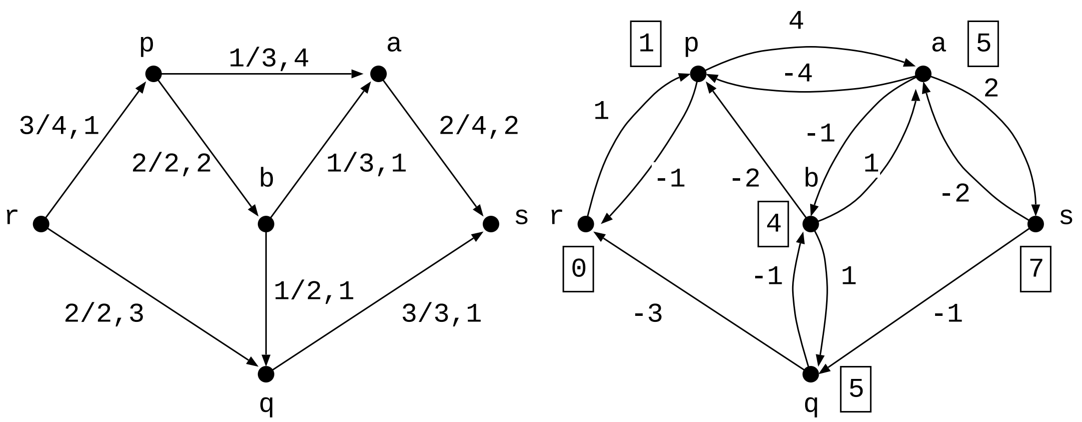

図 2.5: プライマル法の動き (更新されたフロー x'' と補助ネットワーク $(G(x''), c')$). $G(x'')$ の各点の横の四角に可能ポテンシャルを示した.

3. 最小費用フロー問題と線形計画法

例 1.2 で与えたネットワーク $(G=(V,E),u,c)$ に対する最大フロー問題は以下の線形計画問題である.

$$
\left|
\begin{array}{lrrrrrrrrcl}
\min & +c_{rp}x_{rp} & +c_{rq}x_{rq} & +c_{pa}x_{pa} & +c_{pb}x_{pb} & +c_{ba}x_{ba} & +c_{bq}x_{bq} & +c_{as}x_{as} & +c_{qs}x_{qs} & & \\
\text{s.t.} & +x_{rp} & +x_{rq} & & & & & & & = & \hat{v} \\
 & & & & & & & -x_{as} & -x_{qs} & = & -\hat{v} \\
 & -x_{rp} & & +x_{pa} & +x_{pb} & & & & & = & 0 \\
 & & -x_{rq} & & & & -x_{bq} & & +x_{qs} & = & 0 \\
 & & & -x_{pa} & & -x_{ba} & & +x_{as} & & = & 0 \\
 & & & & -x_{pb} & +x_{ba} & +x_{bq} & & & = & 0 \\
 & x_{rp} & & & & & & & & \leq & u_{rp} \\
 & & x_{rq} & & & & & & & \leq & u_{rq} \\
 & & & x_{pa} & & & & & & \leq & u_{pa} \\
 & & & & x_{pb} & & & & & \leq & u_{pb} \\
 & & & & & x_{ba} & & & & \leq & u_{ba} \\
 & & & & & & x_{bq} & & & \leq & u_{bq} \\
 & & & & & & & x_{as} & & \leq & u_{as} \\
 & & & & & & & & x_{qs} & \leq & u_{qs} \\
 & x_{rp}, & x_{rq}, & x_{pa}, & x_{pb}, & x_{ba}, & x_{bq}, & x_{as}, & x_{qs} & \geq & 0
\end{array}
\right.
\tag{3.1}
$$

問題 (3.1) の双対問題を考えてみよう. 最大フロー問題のときに同様に, 各 $f_x(v)=0,\pm\hat{v}$ という制約に y_v という双対変数を対応させ, $x_{vw}\leq u_{vw}$ という制約に z_{vw} という双対変数を対応させると, 双対問題は以下のようになる.

$$
\left|
\begin{array}{llllll}
\min & \multicolumn{5}{l}{\hat{v}y_r-\hat{v}y_s+u_{rp}z_{rp}+u_{rq}z_{rq}+u_{pa}z_{pa}+u_{pb}z_{pb}+u_{ba}z_{ba}+u_{bq}z_{bq}+u_{as}z_{as}+u_{qs}z_{qs}} \\
\text{s.t.} & +y_r & -y_p & +z_{rp} & \geq & -c_{rp} \\
 & +y_r & -y_q & +z_{rq} & \geq & -c_{rq} \\
 & +y_p & -y_a & +z_{pa} & \geq & -c_{pa} \\
 & +y_p & -y_b & +z_{pb} & \geq & -c_{pb} \\
 & +y_b & -y_a & +z_{ba} & \geq & -c_{ba} \\
 & +y_b & -y_q & +z_{bq} & \geq & -c_{bq} \\
 & +y_a & -y_s & +z_{as} & \geq & -c_{as} \\
 & +y_q & -y_s & +z_{qs} & \geq & -c_{qs} \\
 & \multicolumn{5}{l}{z_{rp},z_{pq},z_{pa},z_{pb},z_{ba},z_{bq},z_{as},z_{qs}\geq 0}
\end{array}
\right.
\tag{3.2}
$$

一般に, ネットワーク $(G=(V,E),u,c)$ と流量 $\hat{v}$ が与えられたときに, 最小費用フロー問題 (1.1) の双対問題は,

$$
\left|
\begin{array}{llllllr}
\min & \multicolumn{6}{l}{\hat{v}(y_r-y_s)+\sum_{vw\in E}u_{vw}z_{vw}} \\
\text{s.t.} & +y_v & -y_w & +z_{vw} & \geq & -c_{vw} & (vw\in E) \\
 & & & z_{vw} & \geq & 0 & (vw\in E)
\end{array}
\right.
\tag{3.3}
$$

である.

線形計画法の相補性定理を, 主問題 (1.1) と双対問題 (3.3) に適用すると, 以下の定理を得る.

定理 3.1: 問題 (1.1) の可能解 (フロー) x と問題 (3.3) の可能解 (y,z) がともに最適解であるための必要十分条件は, 各 $vw\in E$ に対して

$$
x_{vw}=0 \text{ または } +y_v-y_w+z_{vw}=-c_{vw} \tag{3.4}
$$

かつ, 各 $vw\in E$ に対して

$$
x_{vw}=u_{vw} \text{ または } z_{vw}=0 \tag{3.5}
$$

が成り 立つことである. □

定理 3.2: 問題 (1.1) の可能解 (フロー) x が最適解であるための必要十分条件は, 各 $vw \in E$ に対して

$$x_{vw} > 0 \text{ ならば } +y_v - y_w + c_{vw} \leq 0 \tag{3.6}$$

かつ, 各 $vw \in E$ に対して

$$x_{vw} < u_{vw} \text{ ならば } +y_v - y_w + c_{vw} \geq 0 \tag{3.7}$$

であるような y_v $(v \in V)$ が存在することである.

(証明) (必要性) もし x が問題 (1.1) の最適解であるならば, (y,z) を双対問題 (3.3) の最適解とすれば, 定理 3.1 によって, 式 (3.4),(3.5) が成り 立つ. したがって, もし $x_{vw} > 0$ ならば (3.4) より $z_{vw} = -(c_{vw}+y_v-y_w)$ であるが, $z_{vw} \geq 0$ だから $c_{vw}+y_v-y_w \leq 0$ となる. また, もし $x_{vw} < u_{vw}$ ならば (3.5) より $z_{vw} = 0$ であるが, (y,z) は双対問題 (3.3) の制約式 $+y_v-y_w+z_{vw} \geq -c_{vw}$ を満足しているので, $c_{vw}+y_v-y_w = c_{vw}+y_v-y_w+z_{vw} \geq 0$ が成り 立つ.

(十分性) 逆に, 問題 (1.1) の可能解 x に対して, (3.6) と (3.7) が成り 立つような y_v $(v \in V)$ が存在すると仮定しよう. z_{vw} $(vw \in E)$ を

$$z_{vw} = \begin{cases} 0 & \text{if } c_{vw} + y_v - y_w \geq 0 \\ -(c_{vw} + y_v - y_w) & \text{if } c_{vw} + y_v - y_w < 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

と定義すると, この定義からただちに (y,z) は双対問題 (3.3) の可能解であることがわかる. 次に, x と (y,z) に対して, (3.4) と (3.5) が成り 立つことを示す.

もし $x_{vw} > 0$ ならば, (3.6) によって $+y_v - y_w + c_{vw} \leq 0$ である. このとき, $+y_v - y_w + c_{vw} < 0$ であるならば, z_{vw} の定義より $z_{vw} = -(c_{vw} + y_v - y_w)$ である. もし, $+y_v - y_w + c_{vw} = 0$ ならば, $z_{vw} = 0$ であるから, やはり, $z_{vw} = -(c_{vw} + y_v - y_w)$ が成り 立つ.

もし $x_{vw} < u_{vw}$ ならば, (3.7) によって, $+y_v - y_w + c_{vw} \geq 0$ であるから, z_{vw} の定義より, $z_{vw} = 0$.

x と (y,z) に対して, 条件 (3.4) と (3.5) が成り 立つので, 定理 3.1 によって, フロー x は問題 (1.1) の最適解である. □

4. プライマル・アルゴリズムの正当性

以上で, プライマルアルゴリズムの正当性を与える準備が整った.

定理 4.1: $(G = (V,E), u, c)$ 中のフロー x がそれと同じ流量をもつすべてのフローのうちで費用最小であるための必要十分条件は, x に関する補助ネットワーク $(G(x), c')$ 中に負の長さの有向閉路が存在しないことである.

(証明) $(G(x), c')$ 中に負の長さの有向閉路が存在すれば, x は費用が最小のフローではないことは既に見た.

逆に, $(G(x), c')$ 中に負の長さの有向閉路が存在しないならば, $(G(x), c')$ に対する可能ポテンシャル y_v $(v \in V)$ が存在する. 可能ポテンシャルの定義によって, $G(x)$ の全ての枝 vw に対して, $c'_{vw} + y_v - y_w \geq 0$ である. ということは,

(i) $vw \in E, x_{vw} < u_{vw}$ なる全ての vw に対して, $c'_{vw} + y_v - y_w = c_{vw} + y_v - y_w \geq 0$, かつ,

(ii) $vw \in E, 0 < x_{vw}$ なる全ての vw に対して, $c'_{wv} + y_w - y_v = -c_{vw} + y_w - y_v \geq 0$

が成り 立つということである. つまり, 条件 (3.6) と条件 (3.7) が成り 立っている. 定理 3.2 によって, x は費用が最小のフローである. □

例 4.2: 図 2.5 の左で示されるフロー x'' を考える. $(G(x''), c')$ には負の長さの有向閉路は存在しないので, 定理 4.1 によって x'' は費用が最小である. つまり, x'' は問題 (3.1) の最適解である.

x'' は問題 (3.1) の最適解であるということを , 双対問題 (3.2) との関係からも見てみよう . まず, $(G(x''), c')$ の可能ポテンシャルを y とする .

$$\begin{array}{rcccccc} & (y_r, & y_p, & y_q, & y_a, & y_b, & y_s) \\ = & (0, & 1, & 5, & 5, & 4, & 7). \end{array}$$

定理 4.1 の証明で見たように, この y に対して (3.6) と (3.7) が成り立つ. つぎに定理 3.2 の十分性の証明で行ったように, この y から式 (3.8) によって z_{vw} $(vw \in E)$ を定める. すなわち,

$$\begin{array}{rcccccccc} & (z_{rp}, & z_{rq}, & z_{pa}, & z_{pb}, & z_{ba}, & z_{bq}, & z_{as}, & z_{qs}) \\ = & (0, & -(-2), & 0, & -(-1), & 0, & 0, & 0, & -(-1)) \end{array}$$

とする .

$$\begin{array}{rcccccc} +y_r - y_p + z_{rp} & = & 0-1+0 & = & -1 & = & -c_{rp}, \\ +y_r - y_q + z_{rp} & = & 0-5+2 & = & -3 & = & -c_{rq}, \\ +y_p - y_a + z_{pa} & = & 1-5-0 & = & -4 & = & -c_{pa}, \\ +y_p - y_b + z_{pb} & = & 1-4+1 & = & -2 & = & -c_{pb}, \\ +y_b - y_a + z_{ba} & = & 4-5+0 & = & -1 & = & -c_{ba}, \\ +y_b - y_q + z_{bq} & = & 4-5-0 & = & -1 & = & -c_{bq}, \\ +y_a - y_s + z_{as} & = & 5-7+0 & = & -2 & = & -c_{as}, \\ +y_q - y_s + z_{qs} & = & 5-7+1 & = & -1 & = & -c_{qs} \end{array}$$

であるから , (y, z) は双対問題 (3.2) の可能解であり , 式 (3.4) が成り立っている. $z_{vw} > 0$ であるような枝は $vw = rq, pb, qs$ であり , これらの枝 vw については $x_{vw} = u_{vw}$ であるから , 式 (3.5) が成り立っている. したがって, 相補性定理 3.2 によって, x は主問題 (3.1) の最適解であり , (y, z) は双対問題 (3.2) の最適解である . □