

学籍 番号	氏 名
----------	--------

問題 1(1) の解答欄 (配点 10)

$$\begin{array}{rcl}
 \max & & x_{gs} + x_{ms} & (A0) \\
 \text{s.t.} & x_{rb} & -x_{bf} & -x_{bp} & = & 0, & (A1) \\
 & & & x_{rk} & -x_{kp} & -x_{kj} & = & 0, & (A2) \\
 & & x_{bf} & & & & & & = & 0, & (A3) \\
 & & & x_{bp} & & +x_{kp} & & & & & = & 0, & (A4) \\
 & & & & & & x_{kj} & & & & & & = & 0, & (A5) \\
 & & & & & -x_{fq} & -x_{fg} & & & & & & & & = & 0, & (A6) \\
 & & & & & & & -x_{pq} & -x_{pj} & & & & & & & = & 0, & (A7) \\
 & & & & & & & & +x_{pj} & -x_{jm} & & & & & & = & 0, & (A8) \\
 & & & & & x_{fq} & & +x_{pq} & & & -x_{qg} & -x_{qm} & & & & = & 0, & (A9) \\
 & & & & & & x_{fg} & & & & +x_{qg} & & -x_{gs} & & & = & 0, & (A10) \\
 & & & & & & & & & x_{jm} & & +x_{qm} & & -x_{ms} & & = & 0, & (A11) \\
 0 \leq & x_{rb} & & & & & & & & & & & & & & \leq & 4, & (A12) \\
 0 \leq & & x_{bf} & & & & & & & & & & & & & \leq & 10, & (A13) \\
 0 \leq & & & x_{bp} & & & & & & & & & & & & \leq & 8, & (A14) \\
 0 \leq & & & & x_{rk} & & & & & & & & & & & \leq & 10, & (A15) \\
 0 \leq & & & & & x_{kp} & & & & & & & & & & \leq & 5, & (A16) \\
 0 \leq & & & & & & x_{kj} & & & & & & & & & \leq & 5, & (A17) \\
 0 \leq & & & & & & & x_{fq} & & & & & & & & \leq & 1, & (A18) \\
 0 \leq & & & & & & & & x_{fg} & & & & & & & \leq & 1, & (A19) \\
 0 \leq & & & & & & & & & x_{pq} & & & & & & \leq & 7, & (A20) \\
 0 \leq & & & & & & & & & & x_{pj} & & & & & \leq & 2, & (A21) \\
 0 \leq & & & & & & & & & & & x_{jm} & & & & \leq & 6, & (A22) \\
 0 \leq & & & & & & & & & & & & x_{qg} & & & \leq & 1, & (A23) \\
 0 \leq & & & & & & & & & & & & & x_{qm} & & \leq & 2, & (A24) \\
 0 \leq & & & & & & & & & & & & & & x_{gs} & \leq & 9, & (A25) \\
 0 \leq & & & & & & & & & & & & & & & x_{ms} & \leq & 9. & (A26)
 \end{array}$$

学籍 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

問題 1(2) の解答欄 (配点 5)

式 (A1)~(A8) を満足するベクトル  $x$ .

問題 1(3) の解答欄 (配点 5)

式 (A1)~(A23) を満足するベクトル  $x$ .

問題 1(4) の解答欄 (配点 9)

$$\begin{aligned}
 f_x(s) &= x_{gs} + x_{ms} \\
 &= x_{gs} + x_{ms} \\
 &\quad + x_{rb} - x_{bf} - x_{bp} \\
 &\quad + x_{bf} - x_{fg} - x_{fq} \\
 &\quad + x_{fq} + x_{pq} - x_{qg} - x_{qm} \\
 &\quad + x_{fg} + x_{qg} - x_{gs} \\
 &= x_{ms} + x_{rb} - x_{bp} - x_{qm} \\
 &= x(\delta(R)) - x(\delta(\bar{R})).
 \end{aligned}$$

学籍 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

問題 1(5) の解答欄 (配点 8)

$$\begin{aligned} f_x(s) &= x(\delta(R)) - x(\delta(\bar{R})) \quad (\text{命題 3.3 より}) \\ &= \sum_{e \in \delta(R)} x_e - \sum_{e \in \delta(\bar{R})} x_e \\ &\leq \sum_{e \in \delta(R)} u_e - \sum_{e \in \delta(\bar{R})} 0 \quad (0 \leq x_e \leq u_e \text{ より}) \\ &= \sum_{e \in \delta(R)} u_e \\ &= u(\delta(R)). \end{aligned}$$

学籍 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

問題 1(6)~1(7) の解答欄 (配点 16)

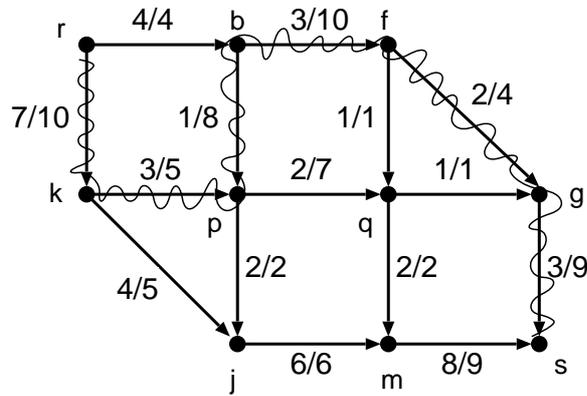


図 1: フロー  $x$  と増加道

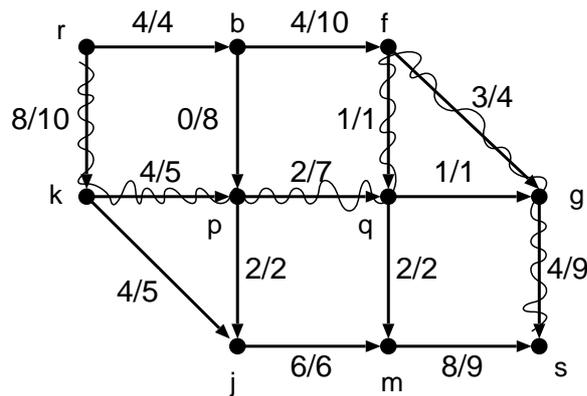


図 2: フロー  $x'$  と増加道

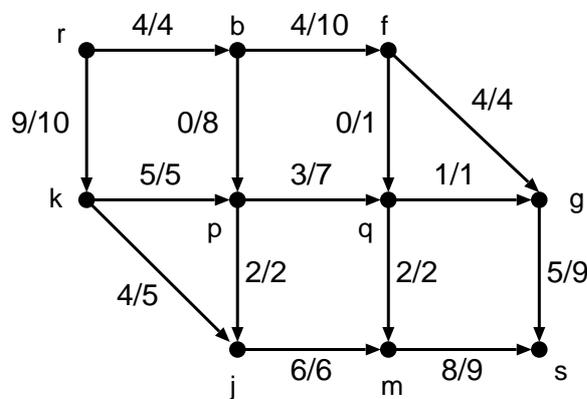


図 3: フロー  $x''$  と増加道

学籍 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

問題 1(8) の解答欄 (配点 7)

$$R^* = \{r, k, p, q, j\}.$$

問題 1(9) の解答欄 (配点 10)

(3) によって

$$\begin{aligned} & \max\{f_x(s) \mid x \text{ is a feasible } (r, s)\text{-flow}\} \\ & \geq f_{x''}(s) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & = u(\delta(R^*)) \\ & \geq \min\{u(\delta(R)) \mid \delta(R) \text{ is an } (r, s)\text{-cut}\}. \end{aligned} \tag{2}$$

である. その一方で系 3.4 より,

$$\max\{f_x(s) \mid x \text{ is a feasible } (r, s)\text{-flow}\} \leq \min\{u(\delta(R)) \mid \delta(R) \text{ is an } (r, s)\text{-cut}\}.$$

であるから, (6) と (7) は両方とも等式で成り立たなければならない. したがって, (4) 式が成り立ち, また,  $x''$  は最大フローであり,  $R^*$  は最小カットである.

学籍 番号		氏 名	
----------	--	--------	--

問題 2(1) の解答欄 (配点 7)

$$\tilde{E}(x) = \{rk, kp, pq, pj, qg, qm, jm, gs, ms\}.$$

問題 2(2) の解答欄 (配点 6)

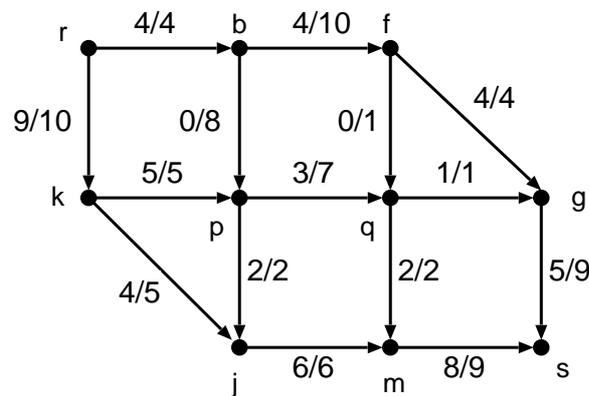


図 4: フロー  $x'$

問題 2(3) の解答欄 (配点 7)

$$\tilde{E}(x') = \{rk, kp, pq, pj, gm, jm, ms\}.$$

問題 2(4) の解答欄 (配点 10)

補題 3.12 によって, アルゴリズムの各繰り返しにおいて,  $d_x(r, s)$  は減少することはない. 補題 3.13 によって,  $d_x(r, s)$  を増加させないフローの増加は高々  $m$  回である. したがって, 高々  $m$  回のフローの増加の後,  $d_x(r, s)$  は増加する.

$d_x(r, s) \leq n - 1$  であるから,  $d_x(r, s)$  は  $n - 1$  にまでしか増加しない.

したがって, 全体で高々  $mn$  回の増加がある.