アルゴリズム論(第13回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/ds/07/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2007.07.09

2.3. 最小費用フロー

2.3.1. 最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

[プライマル-デュアル法]

最小費用フロー問題に対する別のアルゴリズムとして, プライマル-デュアル法を紹介する. プライマル法は, アルゴリズムの各繰り返しにおいて与えられた流量 $\hat{v}$ をもつフローを維持し, 補助ネットワークに負の長さの有向閉路が存在しなくなったときに終了する. プライマル-デュアル法は, 流量が 0 のフローから出発して, フローの流量が $\hat{v}$ と等しくなるまでフローの流量を増加する反復を行なう. 後で証明するが, プライマル-デュアル法の各繰返しにおけるフローは, そのフローに関する補助ネットワークには負の長さの有向閉路が存在しないという性質を満たしている.

このアルゴリズムの動きは最大フロー問題に対するフォード-ファルカーソンのアルゴリズムと同様に補助グラフの中で s^+ から s^- への有向道を見付けて, その有向道に沿ってフローを増加 (減少) するものであるが, 有向道は枝の費用 γ_φ に関して最短のものが選ばれる. (最短路を選ぶということが, 負の長さの有向閉路が決して現れないことを保証する.)

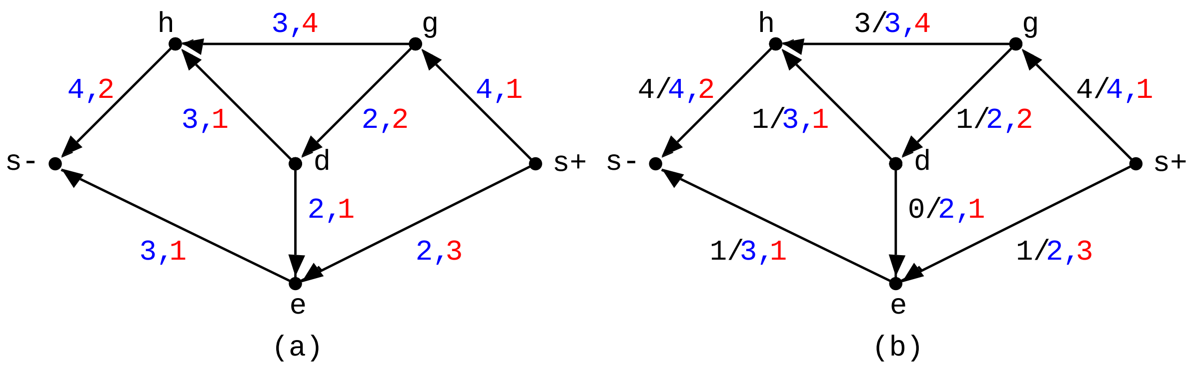


図 2.1: (a) 最小費用流問題で考えるネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$. 各枝 $a \in A$ に付された数値は $c(a), \gamma(a)$ を表す; (b) $\mathcal{N}$ 中のフロー φ. 各枝 $a \in A$ に付された数値は $\varphi(a), c(a), \gamma(a)$ を表す. φ の費用は, $1\times4+3\times1+4\times3+2\times1+1\times1+2\times4+1\times1+1\times0 = 31$.

$\varphi(a) \leftarrow 0 \ (a \in A)$.
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作る.
while $v^*(\varphi) < \hat{v}$ かつ $\mathcal{N}_\varphi$ 上に s^+ から s^- までの有向道 P が存在する **do**
  P をそのような有向道のうちで, γ_φ に関して最短のものとする.
  $d \leftarrow \min\{\min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}, \hat{v} - v^*(\varphi)\}$.
  for P の各枝 a について **do**
    if a が A_φ^+ の枝 **then**
      $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
    else if a が A_φ^- の枝 **then**
      $\varphi(\bar{a}) \leftarrow \varphi(\bar{a}) - d$.
    end if
  end for
  補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作り直す.
end while

図 2.2: プライマル-デュアル法

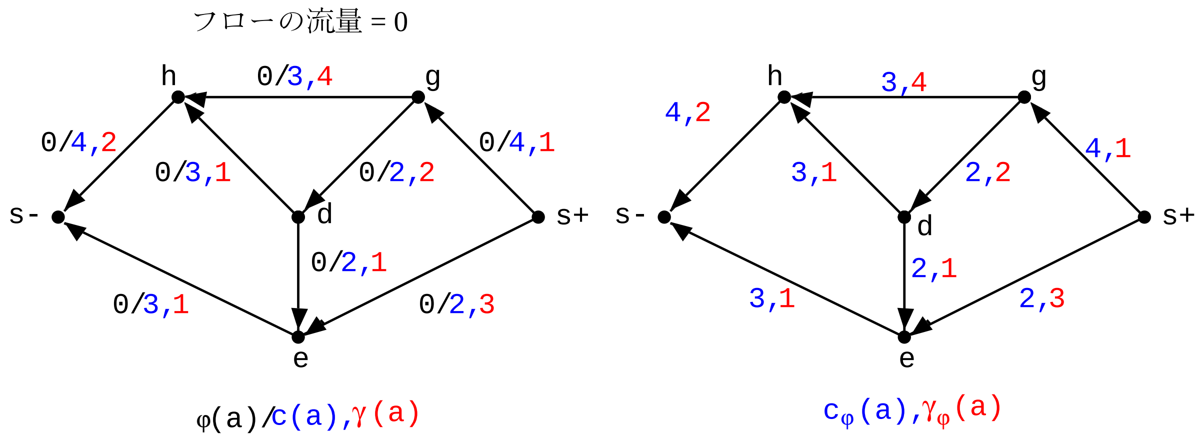


図 2.3: プライマル-デュアル法の動き (最初のフロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

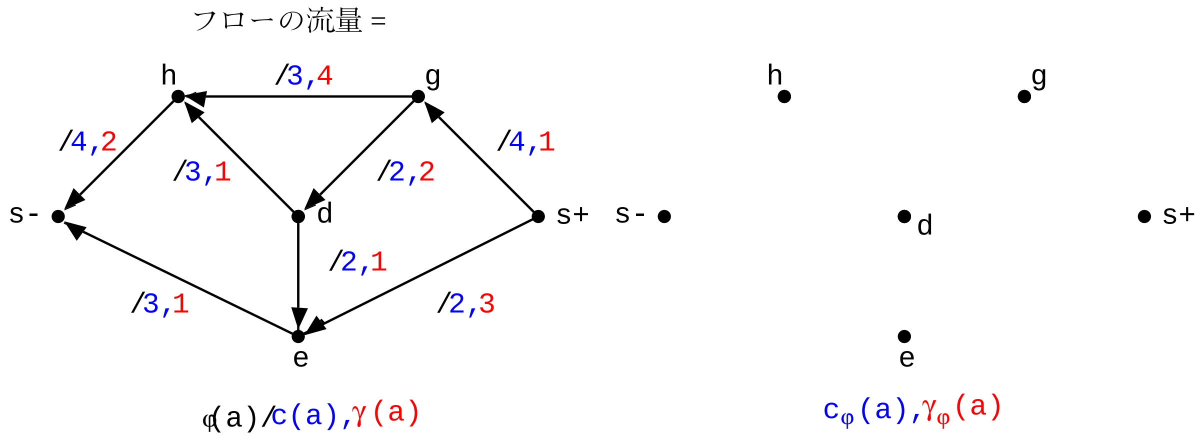


図 2.4: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

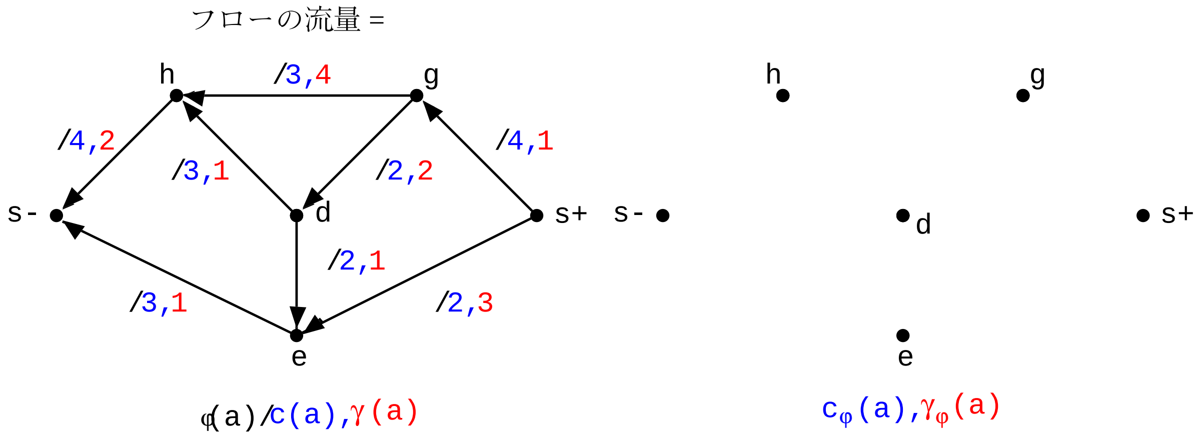


図 2.5: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

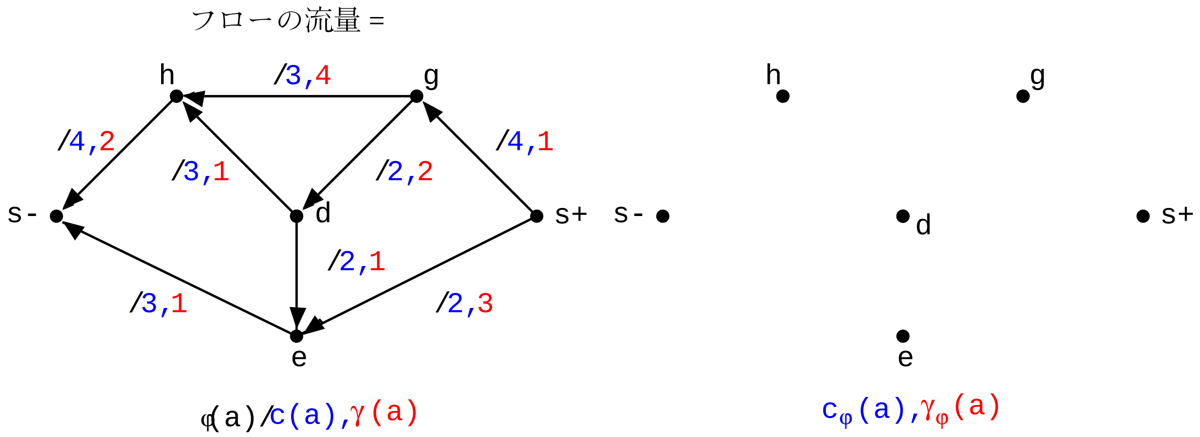


図 2.6: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

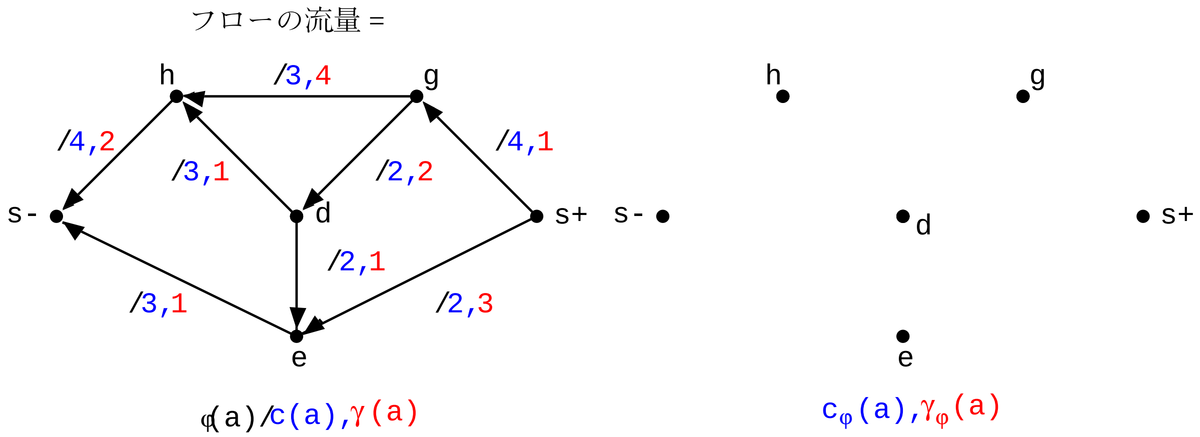


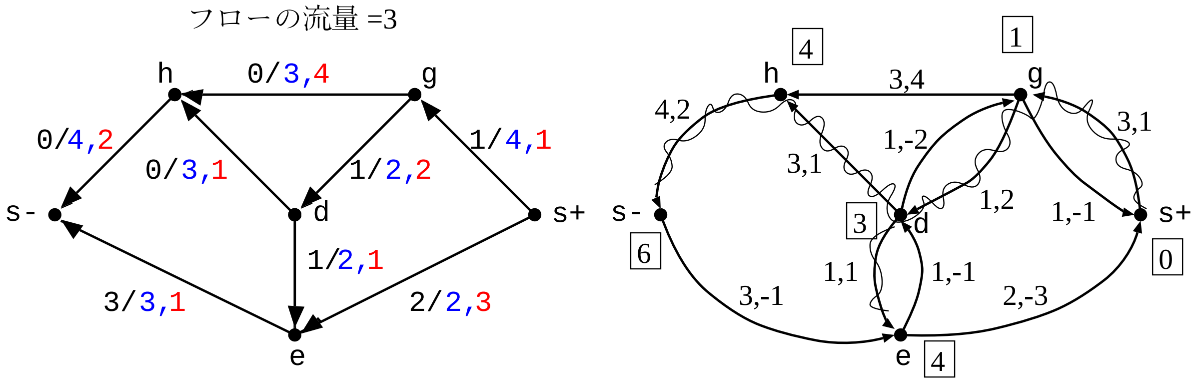
図 2.7: プライマル-デュアル法の動き (流量 $\hat{v}$ をもつフロー φ)

定理 2.14: プライマル-デュアル法では, 途中で得られる各フロー φ は, φ と同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のフローのうちで費用が最小なものになっている.

(証明) まず Step 1 のフロー $\varphi = \mathbf{0}$ について考えると, このフローは流量が 0 であるフローのうちで費用が最小 (= 0) であるから, 定理の主張は成り立っている.

何回目かの Step 2 の実行の直前に得られているフローを φ とする. φ に対して定理の主張が成り立っていると仮定する. つまり, φ は, φ と同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のフローのうちで費用が最小であるとする. すると定理 2.12 より, $\mathcal{N}_\varphi$ には γ_φ に関して負の長さの有向閉路は存在しない. 定理 2.4 によって, あるポテンシャル $p\colon V \to \mathbb{R}$ が存在して, すべての補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ の枝 (v,w) に対して $p(v) + \gamma_\varphi(v,w) \geq p(w)$ となる.

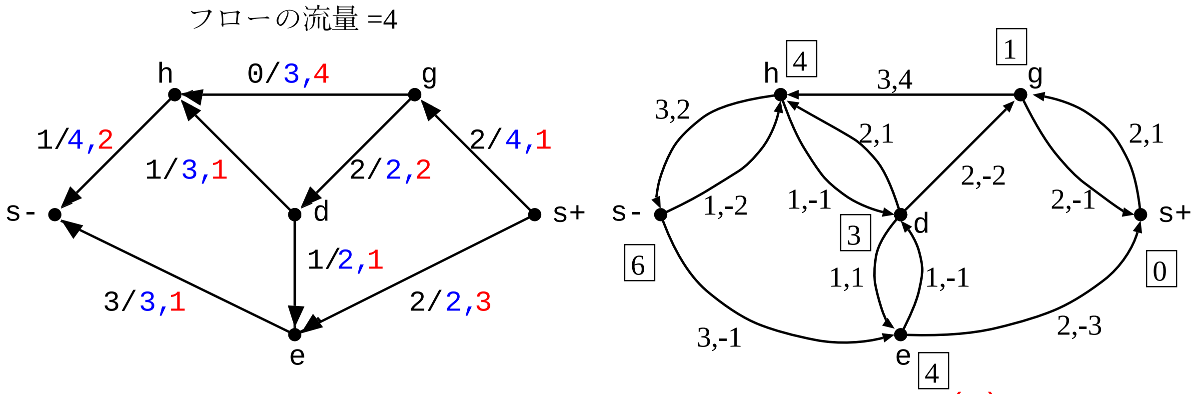
フローの流量 =3



φ(a)/c(a),γ(a) $\quad$ c_φ(a),γ_φ(a)

Step 2 を実行した直後のフローを φ' とする. 我々は, 上で用いたのと同じポテンシャル p に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_{\varphi'}$ のすべての枝 (v,w) に対して $p(v) + \gamma_{\varphi'}(v,w) \geq p(w)$ となるということを示したい.

フローの流量 =4



φ(a)/c(a),γ(a) $\quad$ c_φ(a),γ_φ(a)

$\mathcal{N}_{\varphi'}$ の枝任意の枝 (v,w) を考える. (v,w) が $\mathcal{N}_\varphi$ に元からあったならば, 当然 $p(v) + \gamma_{\varphi'}(v,w) \geq p(w)$ が成り立つ. (v,w) が $\mathcal{N}_\varphi$ に無くて, $\mathcal{N}_{\varphi'}$ に新たに出現した枝であるならば, この枝は Step 2 の最短路 P 上の枝 (w,v) を逆向きにした枝 (v,w) である. (w,v) が P 上の枝ならば, $p(w) + \gamma_\varphi(w,v) = p(v)$ である. また, $\gamma_{\varphi'}(v,w) = -\gamma_\varphi(w,v)$ であるから, $p(v) + \gamma_{\varphi'}(v,w) = p(v) - \gamma_\varphi(w,v) = p(w)$ である.

補助ネットワーク $\mathcal{N}_{\varphi'}$ のすべての枝 (v,w) に対して $p(v) + \gamma_{\varphi'}(v,w) \geq p(w)$ となるということが言えた. 再び定理 2.4 を用いると, $\mathcal{N}_{\varphi'}$ には $\gamma_{\varphi'}$ に関して負の長さの有向閉路は存在しない. したがって, 定理 2.12 によって, φ' は φ と同じ流量をもつフローのうちで, 費

用が最小である. □

注意 2.15: 定理 2.14 の証明で用いたポテンシャルを使えば, プライマル-デュアル法の Step 2 で最短路を求める際にベルマン-フォード法の代わりにより高速なダイクストラ法を使うことができる. (教科書の p.95 の注意を見よ.)