離散システム論(第8回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/ds/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2006.06.05

2.1. 木と道

2.1.1. 最短路問題 (ダイクストラ法)

有向グラフ $G = (V, A)$ 上の各枝 $a \in A$ に対して，その長さ $l(a)$ を指定する枝長関数 $l\colon A \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．このようなネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), l)$ と書くことにする．

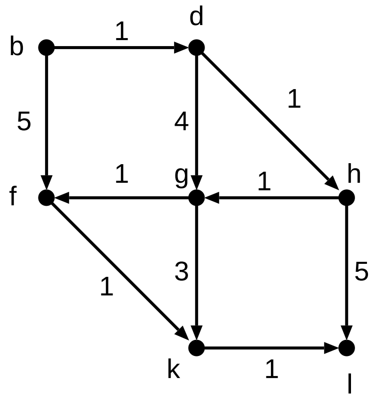
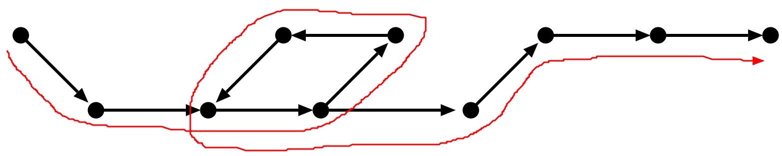


図 2.1: G と l



G の中の有向道

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \cdots, a_k, v_k)$$

に対して，$\sum_{i=1}^{k} l(a_i)$ を P の**長さ**と呼ぶ．**最短路問題** (shortest path problem) とは，与えられた 2 点 $u, v \in V$ に対して，u から v への長さが最小の有向道を見出す問題である．

点集合上で定義される関数 $p\colon V \to \mathbb{R}$ を**ポテンシャル** (potential) と呼ぶ．

補題 2.1: 任意なポテンシャル $p: V \to \mathbb{R}$ に対し, 関数 $l_p: A \to \mathbb{R}$ を

$$l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a) \tag{2.11}$$

によって定義する. $\mathcal{N}$ の中の点 u から v への任意な有向道 P に対して, 関数 l と l_p に関する P の長さをそれぞれ $l(P)$ と $l_p(P)$ とすると,

$$l_p(P) = l(P) + p(u) - p(v) \tag{2.12}$$

が成り立つ. □

補題 2.2: P を点 u から点 v への有向道とする. もし, あるポテンシャル $p: V \to \mathbb{R}$ が存在して, (2.1) で定義される l_p が非負関数であり, かつ, P 上の各枝 a に対して $l_p(a) = 0$ であるとすると, P は点 u から点 v への最短路である.

(証明) $l_p(P) = 0$ である. その一方で l_p は非負関数, すなわち, $l_p(a) \geq 0$ $(a \in A)$ であるから u から v への任意の有向道 P' に対して $l_p(P') \geq 0$ である. 補題 2.1 より,

$$\begin{aligned} l(P) &= l_p(P) - p(u) + p(v) \\ &= 0 - p(u) + p(v) \\ &\leq l_p(P') - p(u) + p(v) \\ &= l(P'). \end{aligned}$$

したがって, P は u から v への最短路である. □

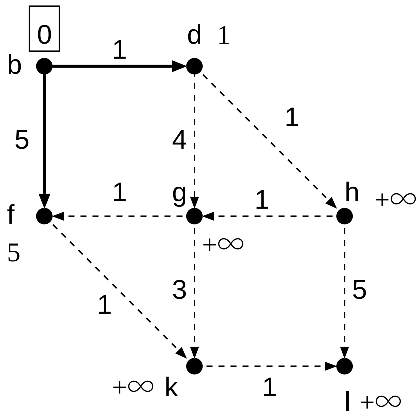
すべての枝の長さが非負, すなわち, $l(a) \geq 0$ $(a \in A)$, であるときに使える解法として **ダイクストラ法** が有名である. これは, 与えられた 1 点から残りのすべての点への最短路を求める.

Algorithm 1 ダイクストラ法 (始点を v_0 とする)

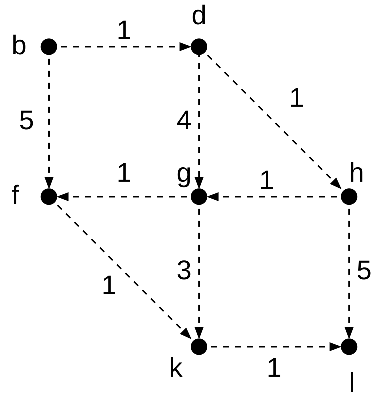
Require: 単純な有向グラフ $G = (V, A)$, 枝長関数 $l: A \to \mathbb{R}_+$.
Ensure: v_0 からその他の各点 v への最短路, 及び, 最短路長.

1: $U \leftarrow \{v_0\},\ W \leftarrow \emptyset,\ p(v_0) \leftarrow 0,\ p(u) \leftarrow +\infty\ (u \in V \setminus \{v_0\})$.
2: $U = \emptyset$ ならば停止.
そうでなければ, U の点のなかで p の値が最小であるものを 1 つ選び, それを w とする. 点 w から出る枝 $a = (w, x)$ で $x \notin W$ であるような各枝に対して, 以下の (*) を実行する.
  (*) $p(x) > p(w) + l(w, x)$ ならば
    $q(x) \leftarrow w,\ p(x) \leftarrow p(w) + l(w, x)$,
    $U \leftarrow U \cup \{x\}$.
3: $W \leftarrow W \cup \{w\},\ U \leftarrow U \setminus \{w\}$ として Step 2 に行く.

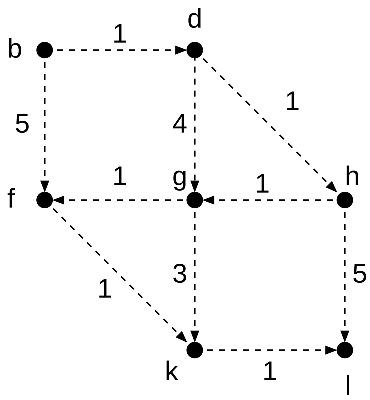
図 2.1 で示されるグラフ G と枝長関数 l を例題として, アルゴリズムの動作を見てみよう.



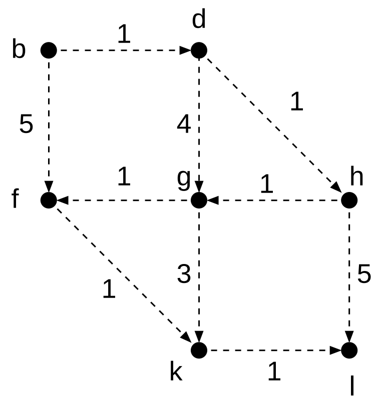
第 1 回目の Step 3 終了時



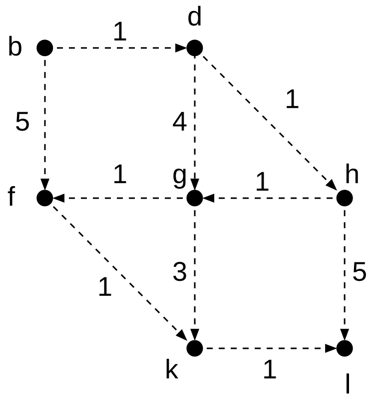
第 2 回目の Step 3 終了時



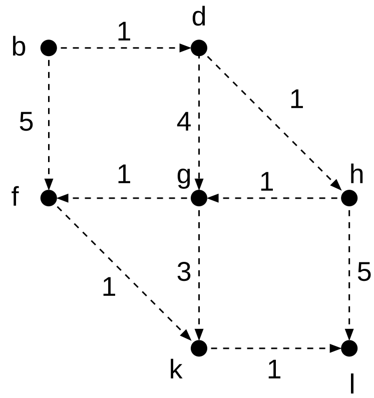
第 3 回目の Step 3 終了時



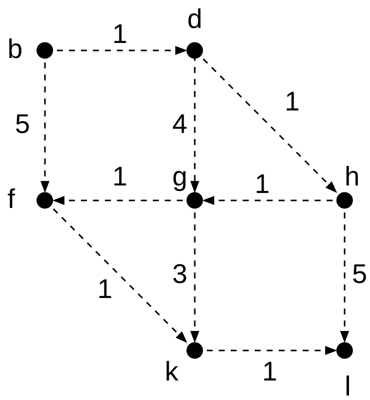
第 4 回目の Step 3 終了時



第 5 回目の Step 3 終了時



第 6 回目の Step 3 終了時



第 7 回目の Step 3 終了時