

離散システム論 (第3回)

<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/ds/>

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2006.04.24

2.2. フローとカット

2.2.1. 2端子フロー

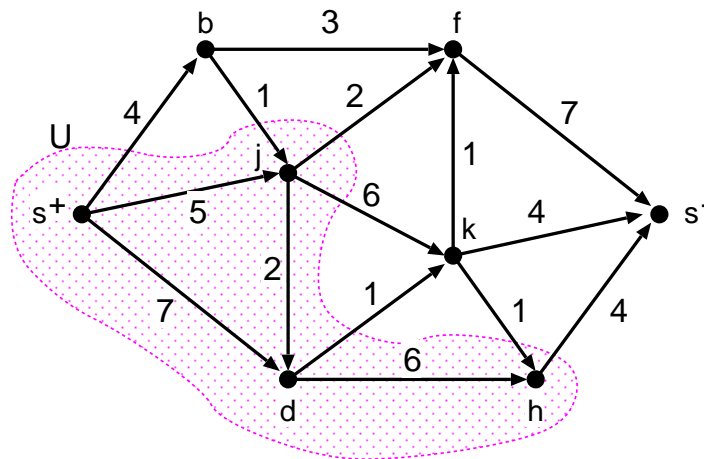
[アルゴリズムの正当性]

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ のカット (cut) とは, $s^+ \in U, s^- \notin U$ であるような点集合 $U \subseteq V$ のことである. カット U の容量 $\kappa_c(U)$ は, 以下で定義される.

$$\kappa_c(U) = \sum_{a \in \Delta^+(U)} c(a). \quad (2.29)$$

ここで, Δ^+U は U に始点を持ち $V \setminus U$ に終点を持つ枝の全体である.

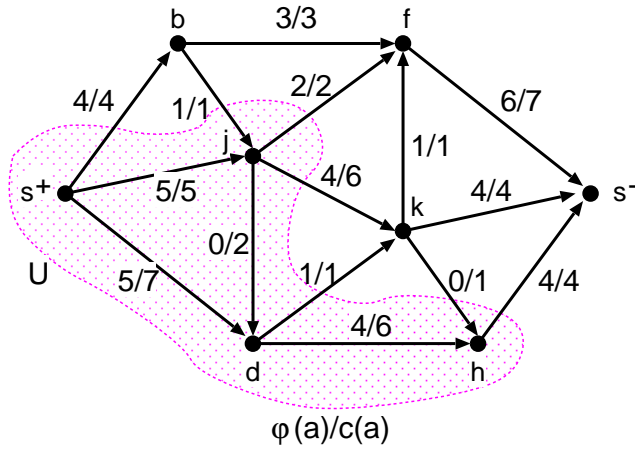
例 2.1: 図 2.1 のようにカット $U = \{s^+, d, j, h\}$ をとると, その容量は 17 である.



補題 2.7: ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c)$ 中の任意なフロー φ と任意なカット U に対して,

$$v^*(\varphi) \leq \kappa_c(U) \quad (2.30)$$

が成り立つ.



$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \partial\varphi(s^+) \\
&= \partial\varphi(s^+) + \partial\varphi(d) + \partial\varphi(j) + \partial\varphi(h) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(s^+, j) + \varphi(s^+, d)) \\
&\quad + (\varphi(d, h) + \varphi(d, k) - \varphi(s^+, d) - \varphi(j, d)) \\
&\quad + (\varphi(j, f) + \varphi(j, k) + \varphi(j, d) - \varphi(b, j) - \varphi(s^+, j)) \\
&\quad + (\varphi(h, s^-) - \varphi(k, h) - \varphi(d, h)) \\
&= (\varphi(s^+, b) + \varphi(d, k) + \varphi(h, s^-) + \varphi(j, k) + \varphi(j, f)) \\
&\quad - (\varphi(b, j) + \varphi(k, h)) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) \\
&= 17
\end{aligned}$$

図 2.2: 式 (2.31) の説明

(証明)

$$\begin{aligned}
v^*(\varphi) &= \sum_{v \in U} \partial\varphi(v) \\
&= \sum_{a \in \Delta^+ U} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} \varphi(a) \\
&\leq \sum_{a \in \Delta^+ U} c(a) - \sum_{a \in \Delta^- U} 0 \\
&= \kappa_c(U).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

□

補題 2.7 から,

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} \leq \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \tag{2.32}$$

を得る.

定理 2.a: フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ は最大フローである.

(証明) φ をフォード-ファルカーソンのアルゴリズムが停止したときのフローとする. もし, \mathcal{N} のあるカット W に対して

$$v^*(\varphi) = \kappa_c(W) \tag{*}$$

が成り立つのならば,

$$\min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\} \leq \kappa_c(W) = v^*(\varphi) \leq \max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\}$$

であるが, 式 (2.32) より, この不等式は全て等号で成立する. ゆえに, φ は最大流であり, W は最小カットである.

φ に対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ を考えよう (図 2.3 を見よ). このとき, 入口 s^+ から出口 s^- までの有向道は存在しない.

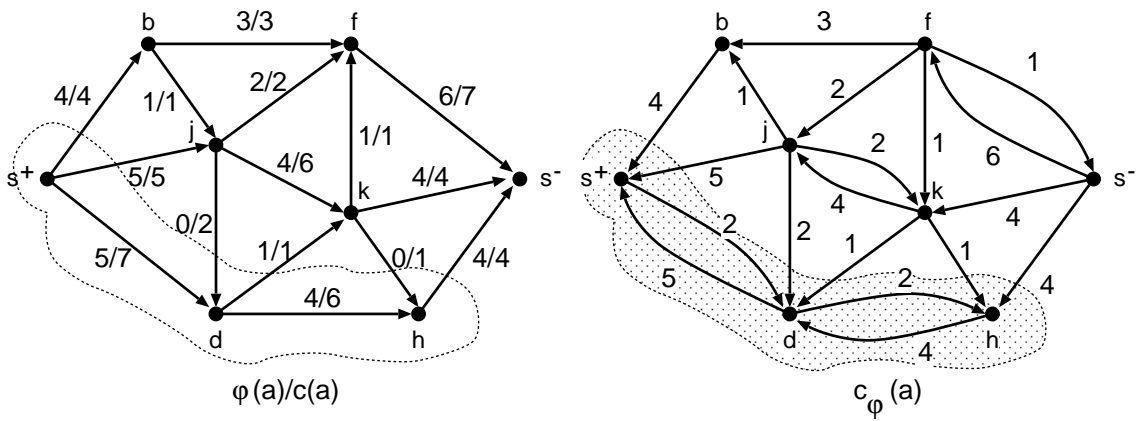


図 2.3: (a) アルゴリズムが終了したときの φ と (b) それに対応する補助ネットワーク \mathcal{N}_φ

\mathcal{N}_φ において、入口 s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W と置く (図 2.3 を見よ). このとき、 $s^+ \in W$ であり、また、 s^- は s^+ から到達可能ではないから $s^- \notin W$ である. したがって、 W はカットである. このカット W に対して、(*) が成り立つことを示そう.

次の (ア), (イ) が成り立つ.

(ア) ネットワーク \mathcal{N} において W から出る枝 a は、補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから、 $\varphi(a) = c(a)$.

(イ) ネットワーク \mathcal{N} において W に入る枝 a' に対して、その逆向き枝 \bar{a}' は補助ネットワーク \mathcal{N}_φ の中には存在しないから、 $\varphi(a') = 0$.

したがって、式 (2.31) と同じ計算をカット W と最大フロー φ に対して行くと、

$$\begin{aligned}
 v^*(\varphi) &= \sum_{v \in W} \partial\varphi(v) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+W} \varphi(a) - \sum_{a \in \Delta^-W} \varphi(a) \\
 &= \sum_{a \in \Delta^+W} c(a) - \sum_{a \in \Delta^-W} 0 \\
 &= \kappa_c(W)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

を得る. \square

フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの正当性の証明は、つぎのことを示したことにもなっている.

定理 2.5 (最大フロー・最小カット定理):

$$\max\{v^*(\varphi) \mid \varphi : \mathcal{N} \text{ 中のフロー}\} = \min\{\kappa_c(U) \mid U : \mathcal{N} \text{ のカット}\}. \tag{2.40}$$

\square

注意 2.b: 全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには、フォード-ファルカーソンのアルゴリズムの各反復においてフローの流量は少くとも 1 ずつ増加する. したがって、有限回で最大流に到達する. \square

全ての枝の容量 $c(a)$ が整数であるときには, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムは整数値のフローしか生みださない. したがって, 以下を得る.

定理 2.6: 容量関数 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ が整数値関数であるとき, 整数値 (各枝のフローの値が整数) の最大フローが存在する. \square

定理 2.5 の証明から, フォード-ファルカーソンのアルゴリズムが終了したときのフロー φ の補助ネットワーク \mathcal{N}_φ において, s^+ から有向道によって到達可能な点の全体を W とすると, W は最小カットになる.