Cook, et al.: Combinatorial Optimization
Chap. 1: Problems and Algorithms

安藤 和敏

May 12, 2003

2. Optimal Trees and Paths

2.1. Minimum spanning Trees

ある会社は, いくつかの営業所をもっていて, それらの営業所を継ぐ通信網を構築しようとしている. 特定の 2 つの営業所 vw の間を直通の通信ケーブル回線で結ぶことができ, その通信ケーブルの敷設費用は c_{vw} であるとする. この会社は, 全ての営業所間で通信が (たぶん間接的に) 可能になるように, 直通の通信回線を敷設したい. しかもこの制約のもとで, ケーブル敷設のための総コストを最小にしたい.

このような状況は, 図 2.1 のように表現される. ここで, 各点は事業所を表し, 2 つの事業所間を結ぶ線は, そこに通信ケーブルを敷設する可能性があることを示している. 全ての 2 点の間にケーブルを敷設する必要はないこと, 及び, c_{vw} は, 必ずしも事業所間の距離である必要はないことに注意する.

(無向) グラフ (graph) G は, **点集合** (nodes) とよばれる有限集合 $V(G)$, **枝集合** (edges) とよばれる有限集合 $E(G)$, 及び, 各枝 $e \in E(G)$ に対してその**終点** (ends) を指定する関数 ∂ から成る.

例 2.1: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$,

$\partial(e_1) = v_1v_4$, $\partial(e_2) = v_1v_2$, $\partial(e_3) = v_1v_2$, $\partial(e_4) = v_1v_5$, $\partial(e_5) = v_4v_5$, $\partial(e_6) = v_2v_5$, $\partial(e_7) = v_2v_3$, $\partial(e_8) = v_3v_4$, $\partial(e_9) = v_3v_5$, $\partial(e_{10}) = v_4v_4$.

$\partial(e) = vw$ のとき, e は v (と w) に**接続する**という.

グラフ G が上のように与えられたときに, 二次元平面上に, グラフ点を平面上の点として適当に描き, さらに, ∂ で指定されるように, 二つの点を線で結んだものを, G の**幾何学的表現** *(geometric representation)* と呼ぶ.

G の幾何学的表現は一意ではない, 例えば一つの幾何学的表現は, 図 *2.2* のように与えられる.

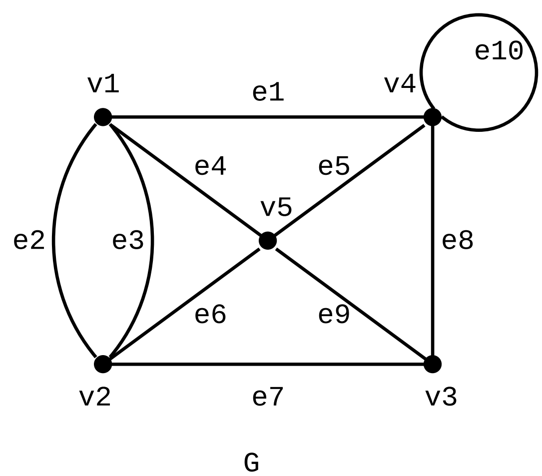

Figure 2.1: グラフの幾何学的表現

例 2.1 のグラフにおける e_2 と e_3 のように, 終点が同じ二つの枝は, **並列** (parallel) と呼ばれる. さらに, $e_1 0$ のように終点が一つのとき, その枝は**自己閉路** (loop) と呼ばれる.

並列枝も自己閉路もないグラフは, **単純** (simple) と呼ばれる. この本では, 主に単純なグラフを扱う. G が単純なグラフであるときには, $\partial(e) = vw$ と書くかわりに, $e = vw$ と書く.

どに 2 点間にも枝がある単純なグラフを**完全グラフ** (complete graph) と呼ぶ.

グラフ G の**部分グラフ** (subgraph) H とは, $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ かつ H の枝の終点が G における終点と一致するようなグラフの事.

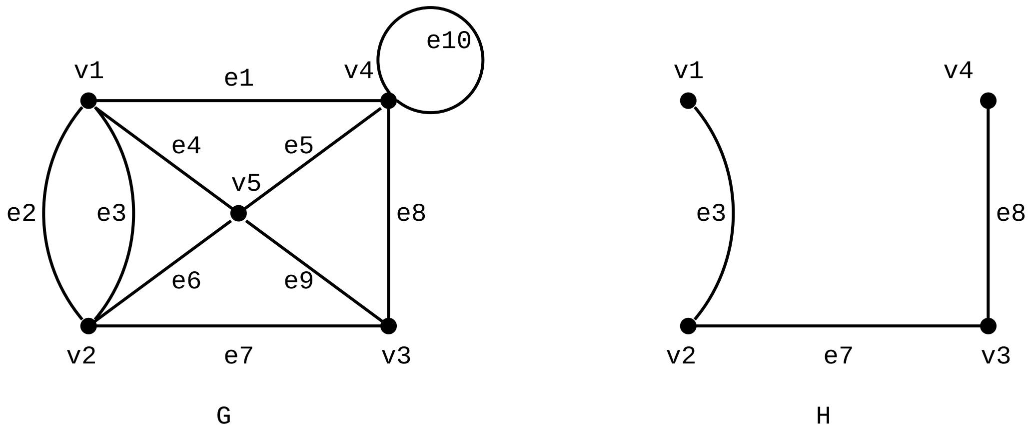

Figure 2.2: G の部分グラフ H

グラフ G と $A \subseteq E(G)$ に対して, $G \setminus A$ を G から枝たち A を**消去** (delete) した部分グラフを表す. 同様に, G から頂点たち $B \subseteq V(G)$ と B の中に接続する枝たちを消去したグラフを $G \setminus B$ または $G[V \setminus B]$ と書く.

例 2.2: テキストの図 *2.1* は, $V(G) = \{a, b, d, f, g, h, k\}$,
$E(G) = \{ab, ad, ag, af, bd, bh, dg, dh, fg, fk, gh, gk, hk\}$. で与えられるグラフ G の幾何学的表現である.