

離散システム論 2003 年度試験問題

静岡大学大学院理工学研究科

安藤 和敏

2003 年 9 月 18 日

注意事項

- 教科書, プリント, ノート, 他人のノートのコピー等の 持ち込みは許可する. ただし, 持ち込んだものの貸し借りは禁止する.
- 試験の時間は 12:45-14:15 である.
- 13:30 以降, 退室を許可する. 他の人の迷惑にならないように退室すること.
- 携帯電話, パソコン, 電卓等の使用を禁ずる.
- 問題用紙は持ち帰ってよい.
- 解答には日本語を用いよ.
- 解答は, Web ページ (<http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/ds/>) で近日中に公開する.

問題 1. 図 1 で示されるグラフ $G = (V, E)$ と各枝 $e \in E$ の横に書かれたコスト c_e に対する最小全域木問題を, 2 種類のアプローチを用いて解いてみよう.

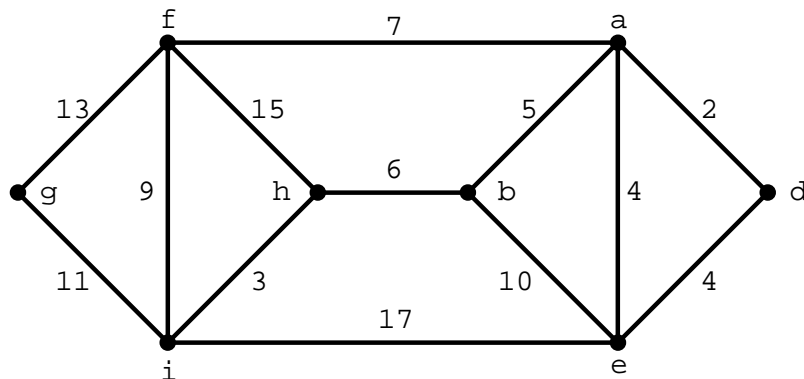


図 1: グラフ G とコスト c_e ($e \in E$)

設問 (1) Kruskal のアルゴリズムの実行したときの各繰返して, 全域森 H に枝が加えられた時点での H を解答欄の図中に鉛筆を用いて実線で記入せよ.

設問 (2) $r = g$ として Prim のアルゴリズムを実行したときの各繰返して, 木 H に枝が加えられた時点での H を解答欄の図中に鉛筆を用いて実線で記入せよ.

問題 2. 無向グラフ $G = (V, E)$ と枝のコスト c_e ($e \in E$) が与えられているとする. 以下の各設問に答えよ.

設問 (1) G のカットとは何か?

設問 (2) G の全域木 (spanning tree) とは何か?

設問 (3) G の最小全域木 (minimum spanning tree, MST) とは何か?

設問 (4) $A \subseteq E$ が, 最小全域木に拡張可能 (extendible) であるとはどういうことか?

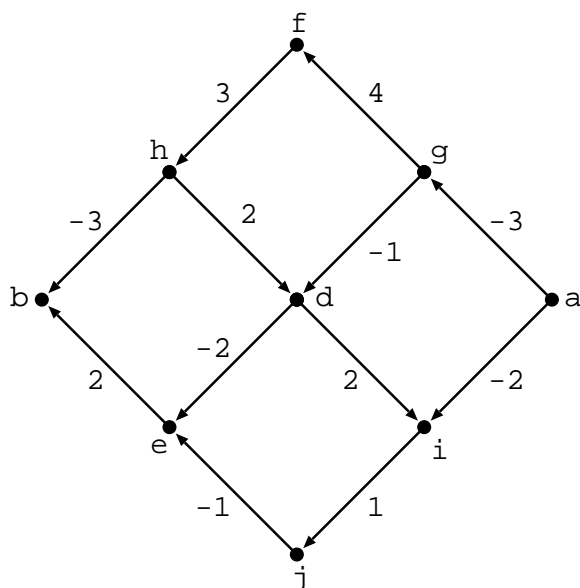
設問 (5) 次の定理を証明せよ. 直訳にならないように, 行間を補いながら自分の言葉で書きなさい. 証明のために必要ならば, 他の定理や補題を用いても良い.

Theorem 2.4 : Suppose that $B \subseteq E$, that B is extendible to an MST, and that e is a minimum-cost edge of some cut D satisfying $D \cap B = \emptyset$. Then, $B \cup \{e\}$ is extendible to an MST.

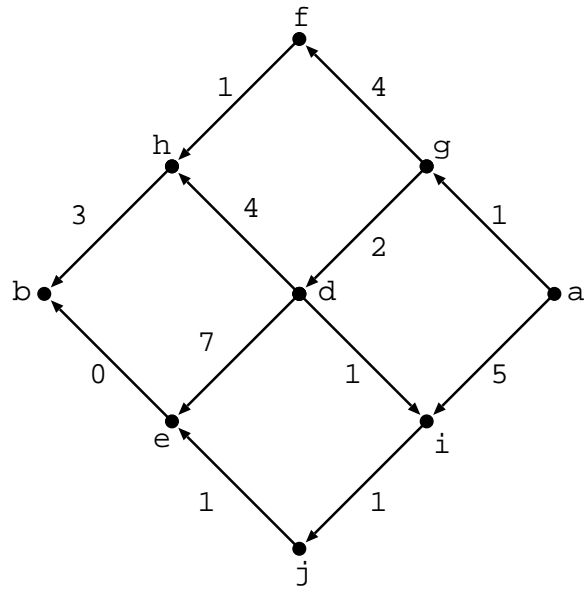
問題 3. 以下の設問 (1) ~ (3) において示されるネットワーク (G, c) のついて, a から a 以外の全ての点への最短路を求めることを考える. 各設問 (1) ~ (3) で示されるネットワーク (G, c) について, 以下の (a) ~ (b) に答えよ.

- (a) (G, c) に対する最短路問題を解くために最も効率的なアルゴリズム (及びそのアルゴリズムの実装時における工夫) を, 理由とともに述べよ.
- (b) そのアルゴリズムで最短路問題を解け. アルゴリズムの実行中にポテンシャルが変更された各時点でのポテンシャル y と $p(v)$ ($v \in V$) を表に記入することによって, アルゴリズムの進行状況を記述せよ.

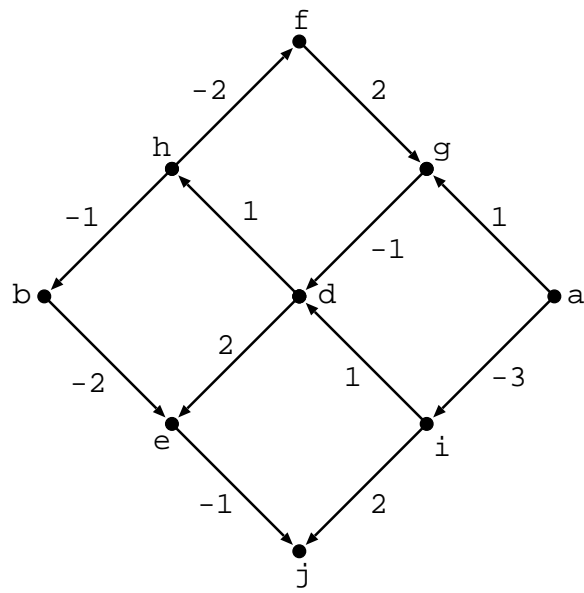
設問 (1)



設問 (2)



設問 (3)



問題 4. (G, c) をネットワークとする. つまり, $G = (V, E)$ は有向グラフであり, c_e は G の枝 e のコストである. さらに, 始点 $r \in V$ が指定されているとしよう. 以下の各設問に答えよ.

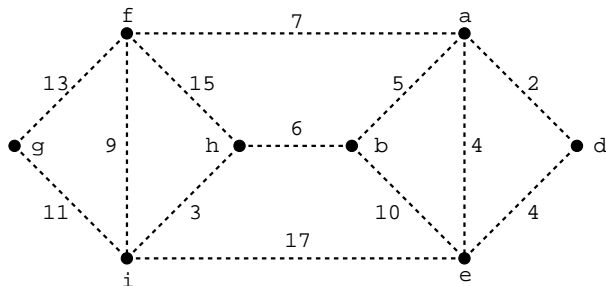
設問 (1) y_v ($v \in V$) が (G, c) の実行可能ポテンシャルであるとはどういうことが説明せよ.

設問 (2) (G, c) が実行可能ポテンシャルを持てば, (G, c) には負の閉路が存在しないことを証明せよ. 直訳にならないように, 行間を補いながら自分の言葉で書きなさい. 証明のために必要ならば, 他の定理や補題を用いても良い.

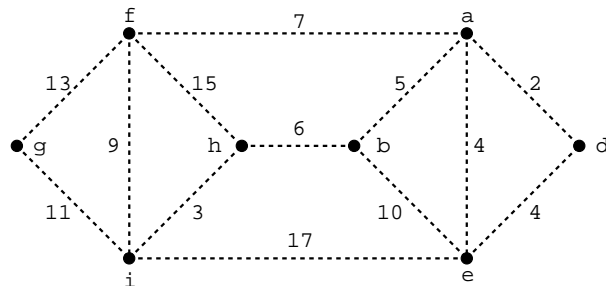
設問 (3) (G, c) が負の閉路を持たなければ, (G, c) が実行可能ポテンシャルを持つことを証明せよ. 直訳にならないように, 行間を補いながら自分の言葉で書きなさい. 証明のために必要ならば, 他の定理や補題を用いても良い.

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

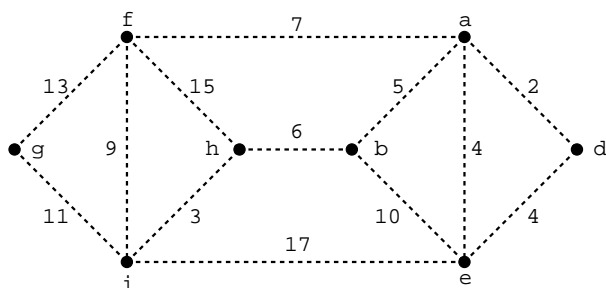
問題 1(1) の解答欄



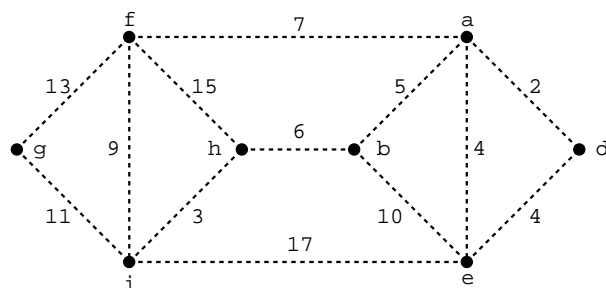
1 本目の枝が入った時点



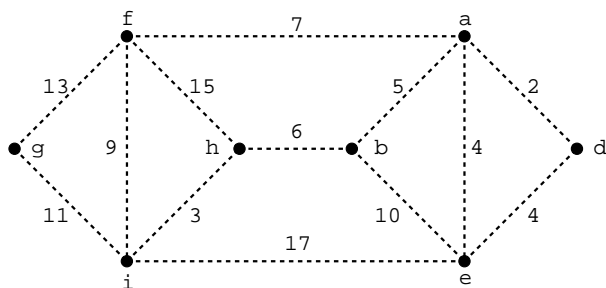
2 本目の枝が入った時点



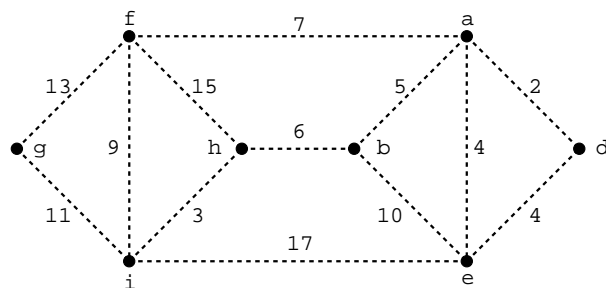
3 本目の枝が入った時点



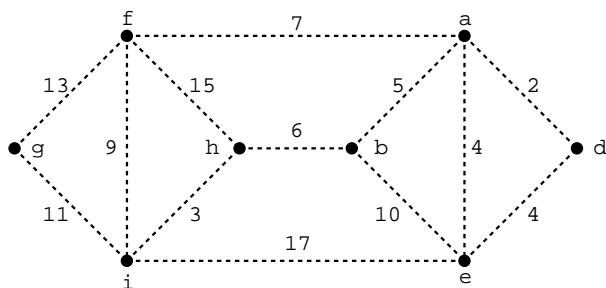
4 本目の枝が入った時点



5 本目の枝が入った時点



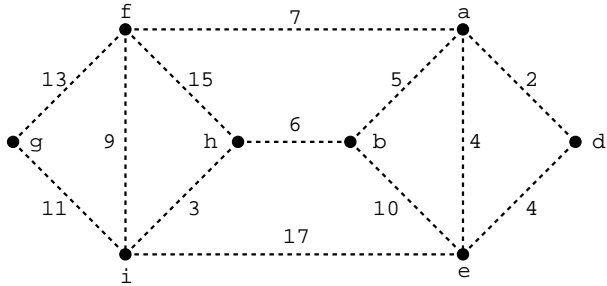
6 本目の枝が入った時点



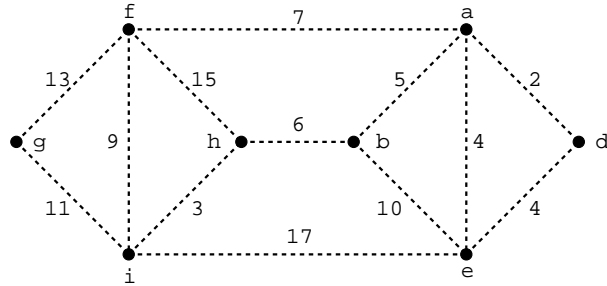
7 本目の枝が入った時点

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

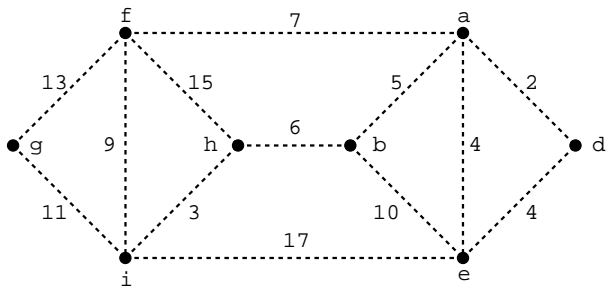
問題 1(2) の解答欄



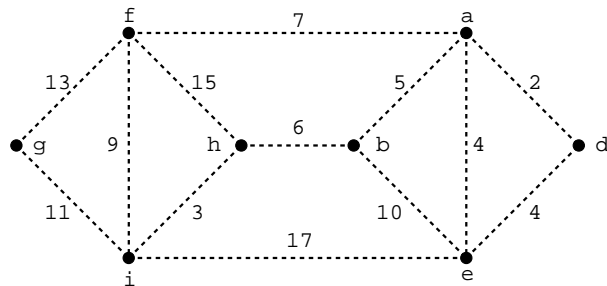
1 本目の枝が入った時点



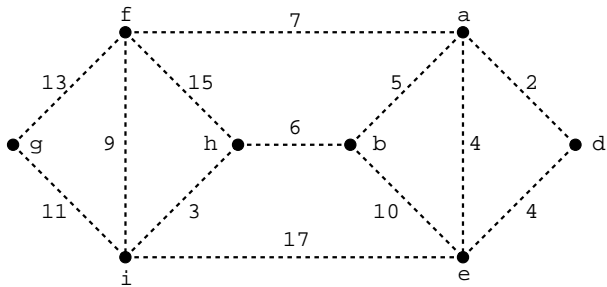
2 本目の枝が入った時点



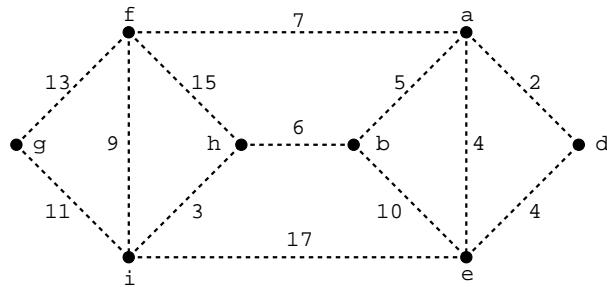
3 本目の枝が入った時点



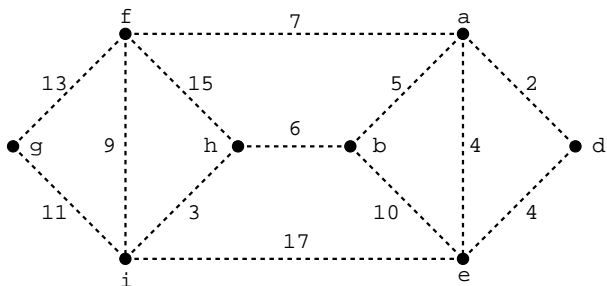
4 本目の枝が入った時点



5 本目の枝が入った時点



6 本目の枝が入った時点



7 本目の枝が入った時点

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

問題 2(1) の解答欄

問題 2(2) の解答欄

問題 2(3) の解答欄

問題 2(4) の解答欄

問題 2(5) の解答欄

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

問題 3(1) の解答欄

(a) _____

(b)

表 1: アルゴリズムの進行状況

| | Start | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | |
|---|----------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|
| | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p |
| a | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| b | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| d | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| e | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| f | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| g | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| h | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| i | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| j | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |

表 2: アルゴリズムの進行状況 (続き)

| | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | |
|---|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|
| | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p |
| a | | | | | | | | | | | | |
| b | | | | | | | | | | | | |
| d | | | | | | | | | | | | |
| e | | | | | | | | | | | | |
| f | | | | | | | | | | | | |
| g | | | | | | | | | | | | |
| h | | | | | | | | | | | | |
| i | | | | | | | | | | | | |
| j | | | | | | | | | | | | |

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

表 3: アルゴリズムの進行状況 (続き)

| | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | |
|---|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|
| | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p |
| a | | | | | | | | | | | | |
| b | | | | | | | | | | | | |
| d | | | | | | | | | | | | |
| e | | | | | | | | | | | | |
| f | | | | | | | | | | | | |
| g | | | | | | | | | | | | |
| h | | | | | | | | | | | | |
| i | | | | | | | | | | | | |
| j | | | | | | | | | | | | |

問題 3(2) の解答欄

(a) _____

(b)

表 4: アルゴリズムの進行状況

| | Start | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | | $vw =$ | |
|---|----------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|
| | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p | y | p |
| a | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| b | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| d | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| e | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| f | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| g | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| h | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| i | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |
| j | ∞ | -1 | | | | | | | | | | |

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

表 5: アルゴリズムの進行状況 (続き)

| | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | y | p | y | p | y | p |
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| d | | | | | | |
| e | | | | | | |
| f | | | | | | |
| g | | | | | | |
| h | | | | | | |
| i | | | | | | |
| j | | | | | | |

表 6: アルゴリズムの進行状況 (続き)

| | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | y | p | y | p | y | p |
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| d | | | | | | |
| e | | | | | | |
| f | | | | | | |
| g | | | | | | |
| h | | | | | | |
| i | | | | | | |
| j | | | | | | |

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

問題 3(3) の解答欄

(a) _____

(b)

表 7: アルゴリズムの進行状況

| | Start | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ |
|---|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | y p | y p | y p | y p | y p | y p |
| a | 0 0 | | | | | |
| b | ∞ -1 | | | | | |
| d | ∞ -1 | | | | | |
| e | ∞ -1 | | | | | |
| f | ∞ -1 | | | | | |
| g | ∞ -1 | | | | | |
| h | ∞ -1 | | | | | |
| i | ∞ -1 | | | | | |
| j | ∞ -1 | | | | | |

表 8: アルゴリズムの進行状況 (続き)

| | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | y p | y p | y p | y p | y p | y p |
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| d | | | | | | |
| e | | | | | | |
| f | | | | | | |
| g | | | | | | |
| h | | | | | | |
| i | | | | | | |
| j | | | | | | |

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

表 9: アルゴリズムの進行状況 (続き)

| | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ | $vw =$ |
|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | $y \quad p$ | $y \quad p$ | $y \quad p$ | $y \quad p$ | $y \quad p$ | $y \quad p$ |
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| d | | | | | | |
| e | | | | | | |
| f | | | | | | |
| g | | | | | | |
| h | | | | | | |
| i | | | | | | |
| j | | | | | | |

| | | | |
|----------|--|--------|--|
| 学籍 番号 | | 氏 名 | |
|----------|--|--------|--|

問題 4(1) の解答欄

問題 4(2) の解答欄

問題 4(3) の解答欄