離散最適化 (第6回)

安藤和敏
静岡大学工学部

2012.11.08

1. 半順序集合

1.1. 定義と例

例 1.1: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$として, $\leq$ を数の大小関係を表わす記号とする. つまり, $a \leq b$ とは「 a は b 以下である」ことを表す. すると, 以下が成り立つ.

(1) S のすべての要素 a に対して, $a \leq a$.

(2) $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$.

(3) $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.

例 1.2: $X = \{1, 2, 3\}$ とする. X のすべての部分集合からなる集合を 2^X とする.

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

このとき, 集合の包含関係 $\subseteq$ は以下の性質を満足する.

(1) 2^X のすべての要素 A に対して, $A \subseteq A$.

(2) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ ならば $A = B$.

(3) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$.

例 1.1のときは, 任意の 2つの数 $a, b \in S$ に対して, $a \leq b$ または $b \leq a$ が成り立った. この集合の包含関係では, 例えば $A = \{1, 3\}, B = \{1, 2\}$ のときのように, $A \subseteq B$ と $B \subseteq A$ のどちらも成り立たない場合があることに注意せよ.

上の例 1.1と例 1.2を一般化して「半順序」という概念を導入する.
集合 S の上で定義されている関係 $\preceq$ が以下を満たすときに, $\preceq$ を S 上の**半順序** (partial order)と呼ぶ.

(i) S のすべての要素 a に対して, $a \preceq a$.

(ii) $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ ならば $a = b$.

(iii) $a \preceq b$ かつ $b \preceq c$ ならば $a \preceq c$.

このとき, 集合 S のことを **半順序集合** (partially ordered set) と呼んで, $(S, \preceq)$ と表す. もしすべての $a, b \in S$ に対して,$a \preceq b$ または $b \preceq a$ が成り立つならば, $(S, \preceq)$ は**全順序集合** (totally ordered set) と呼ばれ, $\preceq$ は全順序 (total order) と呼ばれる.

上で見たように例 1.1 の $(S, \leq)$ と例 1.2 の $(2^X, \subseteq)$ は半順序集合である. 特に例 1.1 の $(S, \leq)$ は全順序集合である. もう一つの半順序集合の例を挙げよう.

例 1.3: D_{24} で, 24 のすべての約数からなる集合とする. すなわち,

$$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

D_{24} の任意の *2*つの要素 a, b に対して, a が b の約数であるときに $a \preceq b$ と定義する. 例えば, $3 \preceq 12$ であり, $4 \not\preceq 6$ である. このときに, $(D_{24}, \preceq)$ は半順序集合である. このことは, 任意の D_m に一般化できる.

1.2. 半順序集合のハッセ図

$(S, \preceq)$ を半順序集合とする. もし, $a \preceq b$ かつ $a \neq b$ であるときに, $a \prec b$ と書く. さらに,

$$a \prec b \text{ かつ } a \prec c \prec b \text{ となる } c \text{ が存在しない}$$

ときに, $a \ll b$ と書く.

例 1.4: 例 *1.1* の半順序集合 $(S, \leq)$ を考える. このときに, $\ll$ の関係が成り立つのは,

$$1 \ll 2, 2 \ll 3, 3 \ll 4, 4 \ll 5$$

だけである.

例 1.5: 例 *1.2* の半順序集合 $(2^X, \subseteq)$ を考える. このときに, $\ll$ の関係が成り立つのは,

$$\begin{gathered}
\emptyset \ll \{1\}, \emptyset \ll \{2\}, \emptyset \ll \{3\}, \\
\{1\} \ll \{1,2\}, \{2\} \ll \{1,2\}, \{1\} \ll \{1,3\}, \\
\{3\} \ll \{1,3\}, \{2\} \ll \{2,3\}, \{3\} \ll \{2,3\}, \\
\{1,2\} \ll \{1,2,3\}, \{1,3\} \ll \{1,2,3\}, \{2,3\} \ll \{1,2,3\}
\end{gathered}$$

だけである.

半順序集合 $(S, \preceq)$ の**ハッセ図** (Hasse diagram) とは, 点集合が S で枝集合が (b, a) $(a \ll b)$ であるような有向グラフを全ての枝の始点が終点より上にあるように描いたものである. この「 始点が終点より上に」という約束があれば, あえて枝を有向枝として描く必要はないので, 枝は無向枝のように描く.

例 1.6: 図 *1.1* は, 左から例 *1.1*, 例 *1.2*, 例 *1.3* で示した半順序集合のハッセ図である.

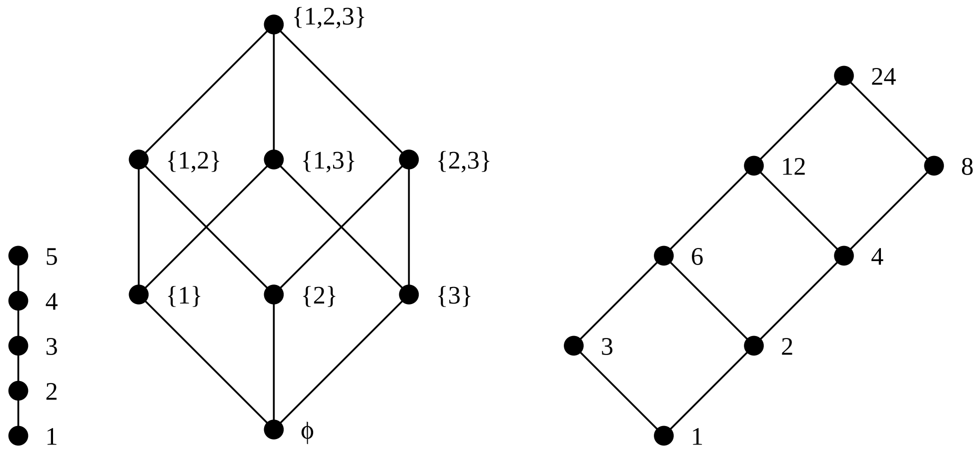

図 1.1: 例 1.1, 例 1.2, 例 1.3 の半順序集合のハッセ図

2. 強連結成分

(有向) グラフ $G = (V, A)$ において, 任意な点から任意な点への有向道が存在するとき, G は**強連結** (strongly connected) という .

例 2.1: 図 *2.1* の *(a)* は強連結なグラフであるが, *(b)* は強連結ではない. □

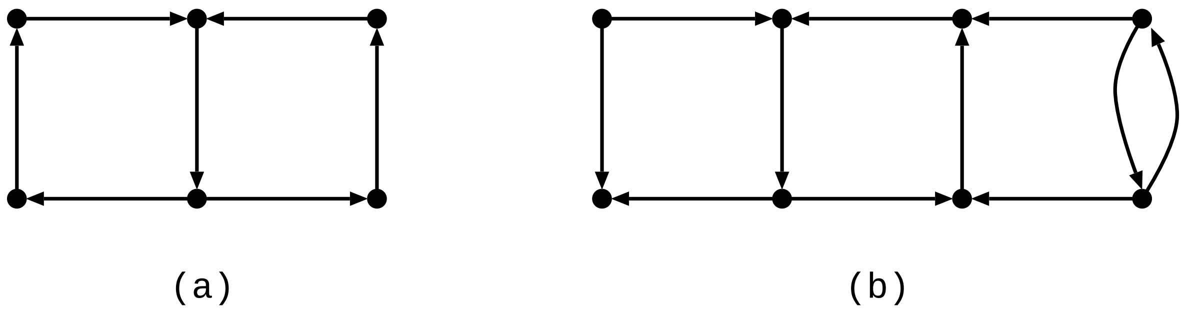

図 2.1: (a) 強連結なグラフ; (b) そうでないグラフ

(強連結でないかも知れない) グラフ G に対して, G の極大な強連結部分グラフを G の**強連結成分** (strongly connected component) という .

例 2.2: 図 *2.1* の *(b)*で表されるグラフの強連結成分は, 点線で囲まれた部分グラフ H_1, H_2, H_3, H_4 である . □

直前の例から分かるように, グラフ $G = (V, A)$ の強連結成分を $H_i = (W_i, B_i)$ $(i \in I)$ としたとき, $\{W_i \mid i \in I\}$ は V の分割になっている. (つまり , $V = \bigcup_{i \in I} W_i$, かつ, 相異なる i, j に対して $W_i \cap W_j = \emptyset$.) 一方で, 枝集合に対しては, 相異なる i, j に対して, $B_i \cap B_j = \emptyset$ であるが, $A \neq \bigcup_{i \in I} B_i$ である.

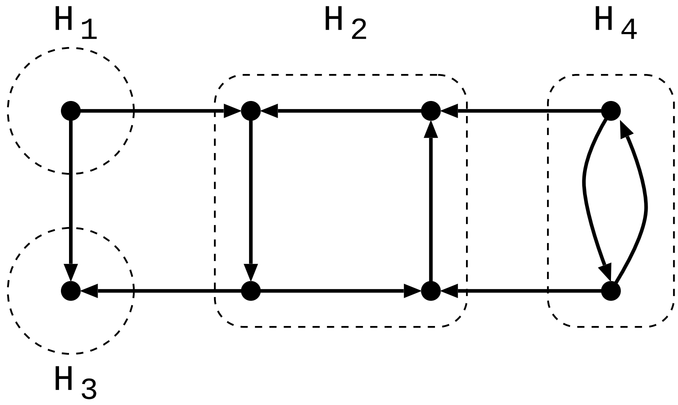

図 2.2: 強連結成分 H_1, H_2, H_3, H_4

2つの (等しいかもしれない) 強連結成分 H_i と H_j に対して, H_j の点から H_i の点へ有向道が存在するときに

$$H_i \preceq H_j$$

という記号を使って表現しよう. すると, $\preceq$ には以下の性質がある.

(i) $H_i \preceq H_i \quad (i \in I)$,

(ii) $H_i \preceq H_j$ かつ $H_j \preceq H_i$ ならば $H_i = H_j$,

(iii) $H_i \preceq H_j$ かつ $H_j \preceq H_k$ ならば $H_i \preceq H_k$.

したがって, $(\{H_i \mid i \in I\}, \preceq)$ は半順序集合となる.

例 2.3: 図 *2.3* に, 図 *2.1* の *(b)* で表されるグラフの強連結成分の半順序を示す.

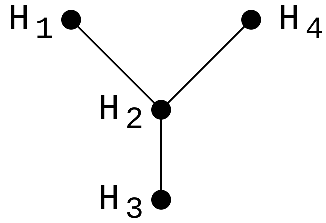

図 2.3: 強連結成分の半順序を示すハッセ図