離散最適化(第15回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/do/12/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2013.01.31

2.3. 最小費用フロー

2.3.1. 最小費用フロー問題 (復習)

最大フロー問題のときのように，特別な 2 点 s^+ と s^- が指定されている有向グラフ $G = (V, A)$ を考える．ここでは，各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ の他に，枝 a に 1 単位のフローを流すのにかかる**費用** $\gamma(a)$ が与えられている．このネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と書く．

例 2.1: 図 2.1 に，ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ の例を示した．ここで，$V = \{s^+, g, d, e, h, s^-\}$, $A = \{(s^+, g), (s^+, e), (g, h), (g, d), (d, h), (d, e), (h, s^-), (e, s^-)\}$，かつ，$c(a)$ $(a \in E)$ と $\gamma(a)$ $(a \in A)$ は以下の表で与えられるものとする．

a	(s^+, g)	(s^+, e)	(g, h)	(g, d)	(d, h)	(d, e)	(h, s^-)	(e, s^-)
$c(a)$	4	2	3	2	3	2	4	3
$\gamma(a)$	1	3	4	2	1	1	2	1

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられたとき，流量が $\hat{v}$ であ

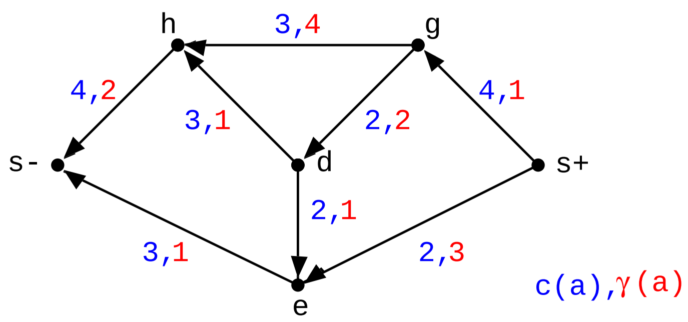

図 2.1: 最小費用流問題で考えるネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$．各枝 $a \in A$ に付された数値は $c(a), \gamma(a)$ を表す

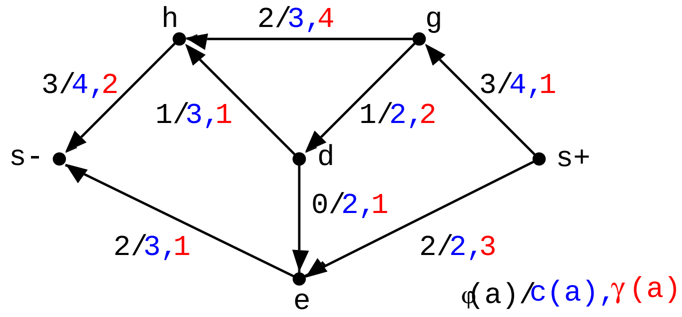

図 2.2: 図 2.1 のネットワーク $\mathcal{N}$ 中のフロー φ. φ の費用は 28.

るようなフロー φ の中で, フローの費用

$$\sum_{a\in A}\gamma(a)\varphi(a)$$

が最小になるものを **最小費用フロー** (minimum cost flow) と呼び, 最大費用フローを求める問題を **最小費用フロー問題** (minimum-cost flow problem) と呼ぶ.

例 2.2: 例 2.1 のネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c,\gamma)$ と $\hat{v}=5$ が与えられたとしよう. 図 2.2 に示したものは, 流量 $\hat{v}=5$ のフロー φ である. このフロー φ の費用は,

$$1\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 2=28$$

である. (後で見るようにこれは費用が最小のフローではない. つまり, 28 より小さい費用をもつ流量が $\hat{v}=5$ のフローがある.) □

2.3.2. 最適性の条件 (復習)

ネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c,\gamma)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi=(G=(V,A_\varphi),s^+,s^-,c_\varphi,\gamma_\varphi)$ を定義した. 最小費用フロー問題の補助ネットワークは, 費用関数 γ_φ を持つということを除けば, 最大フロー問題の補助ネットワークと同じである. 費用関数 $\gamma_\varphi\colon A_\varphi\to\mathbb{R}$ は以下で定義される.

$$\gamma_\varphi(a)=\begin{cases}\gamma(a) & \text{if } a\in A_\varphi^+ \text{ のとき,}\\ -\gamma(a) & \text{if } \bar{a}\in A_\varphi^- \text{ のとき.}\end{cases} \tag{2.1}$$

最小費用フローは補助ネットワークを用いて, 以下のように特徴付けられる.

定理 2.12: *2* 端子ネットワーク $\mathcal{N}=(G=(V,A),s^+,s^-,c,\gamma)$ 中のフロー φ がそれと同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のすべてのフローのうちで費用最小であるための必要十分条件は, φ に関する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ 中に負の長さの有向閉路が存在しないことである.

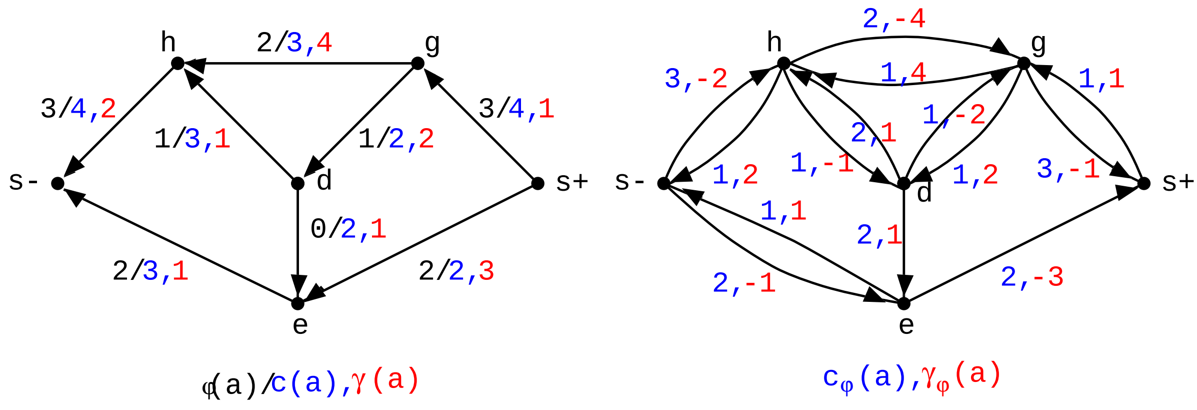

図 2.3: 最適性の条件. 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ に負の長さの有向閉路があるので, φ の費用は最小ではない.

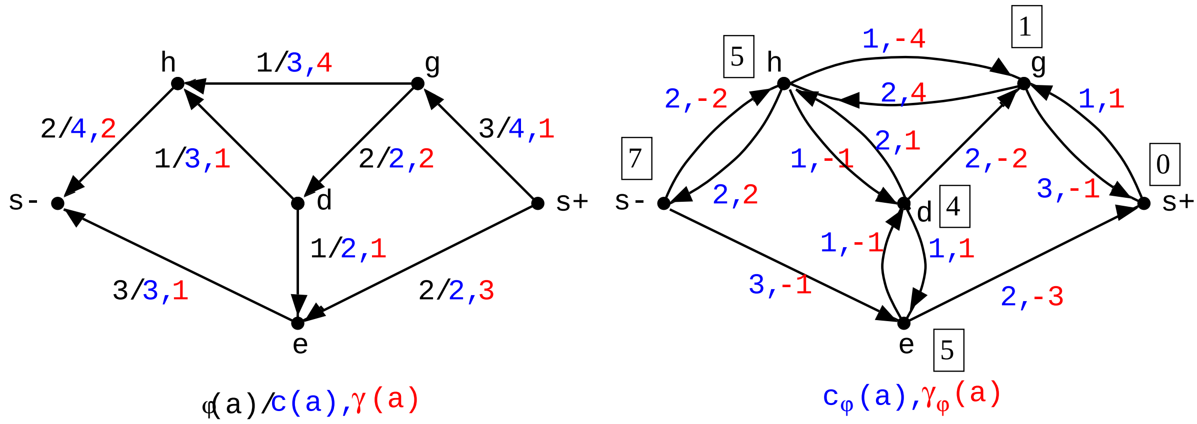

図 2.4: 最適性の条件. 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ には負の長さの有向閉路は存在しないので, φ の費用は最小である.

2.3.3. 最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

[プライマル-デュアル法]

最小費用フロー問題に対する別のアルゴリズムとして, プライマル-デュアル法を紹介する. このアルゴリズムの動きは最大フロー問題に対するフォード-ファルカーソンのアルゴリズムと同様に補助グラフの中で s^+ から s^- への有向道を見付けて, その有向道に沿ってフローを増加 (減少) するものであるが, 有向道は枝の費用 γ_φ に関して最短のものが選ばれる.

もし現在のフロー φ が φ と同じ流量をもつフローの中で費用最小であるとすると, この $\mathcal{N}_\varphi$ の最短路に沿ってフローを増加して得られたフロー φ' もまた, φ' と同じ流量をもつフローの中で費用が最小であるということを証明できる. この証明は省略するが, 以下で示す例題ではアルゴリズムの繰り返しに現れる各フローが費用最小であるということが別の観点から納得することができる. 即ち, 各フローに対する補助ネットワーク中には負の長さの有向閉路は存在しないということは,

$$p(v) + \gamma_\varphi(v, w) \geq p(w) \quad ((v, w) \in A_\varphi)$$

によって確認できる. したがって, 定理 2.12 により各繰返しで得られるフローはそれと同じ流量を持つフローの中で費用最小である.

$\varphi(a) \leftarrow 0 \ (a \in A)$.
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作る.
while $v^*(\varphi) < \hat{v}$ かつ $\mathcal{N}_\varphi$ 上に s^+ から s^- までの有向道 P が存在する **do**
  P をそのような有向道のうちで, γ_φ に関して最短のものとする.
  $d \leftarrow \min\{\min\{c_\varphi(a) \mid a \in P\}, \hat{v} - v(\varphi)\}$.
  for P の各枝 a について **do**
    if a が A^+_φ の枝 **then**
      $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
    else if a が A^-_φ の枝 **then**
      $\varphi(\bar{a}) \leftarrow \varphi(\bar{a}) - d$.
    end if
  end for
  補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作り直す.
end while

図 2.5: プライマル-デュアル法

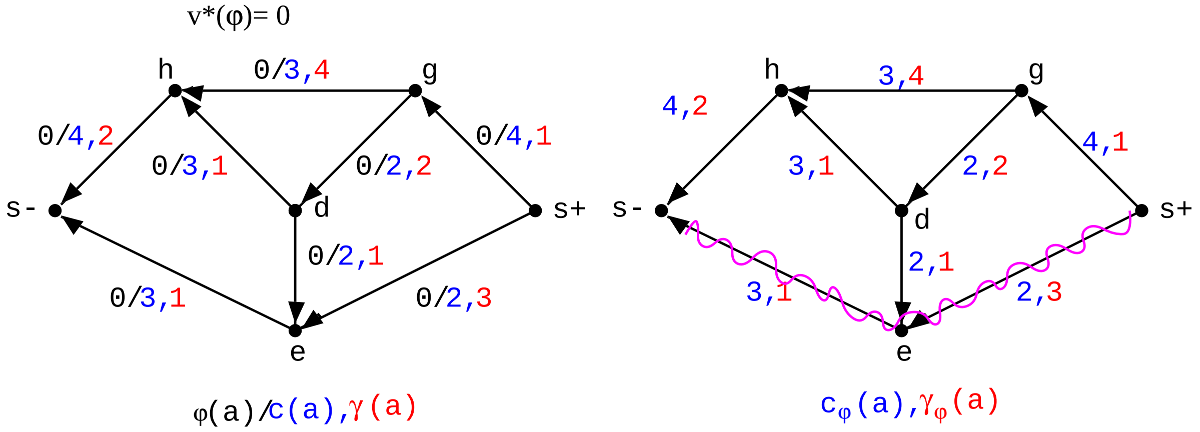

図 2.6: プライマル-デュアル法の動き (最初のフロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

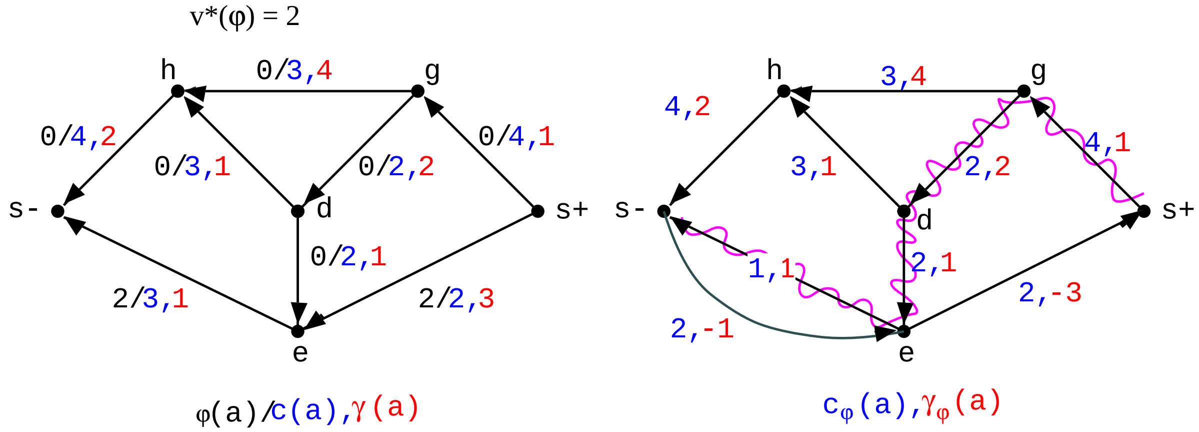

図 2.7: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

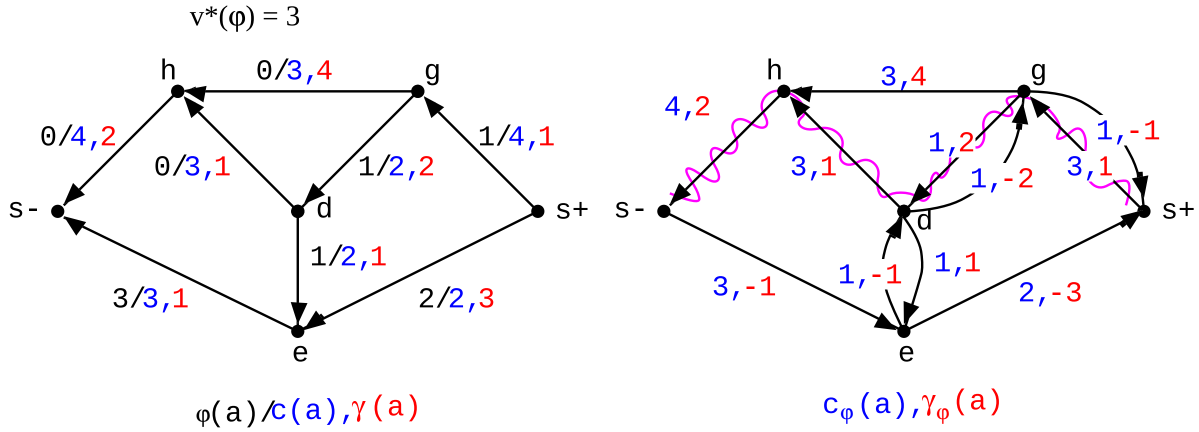

図 2.8: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

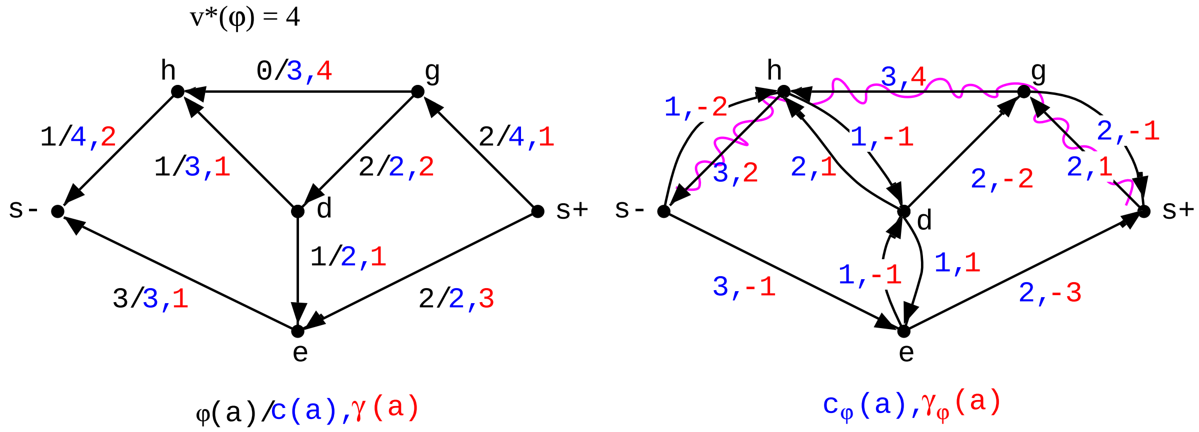

図 2.9: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)

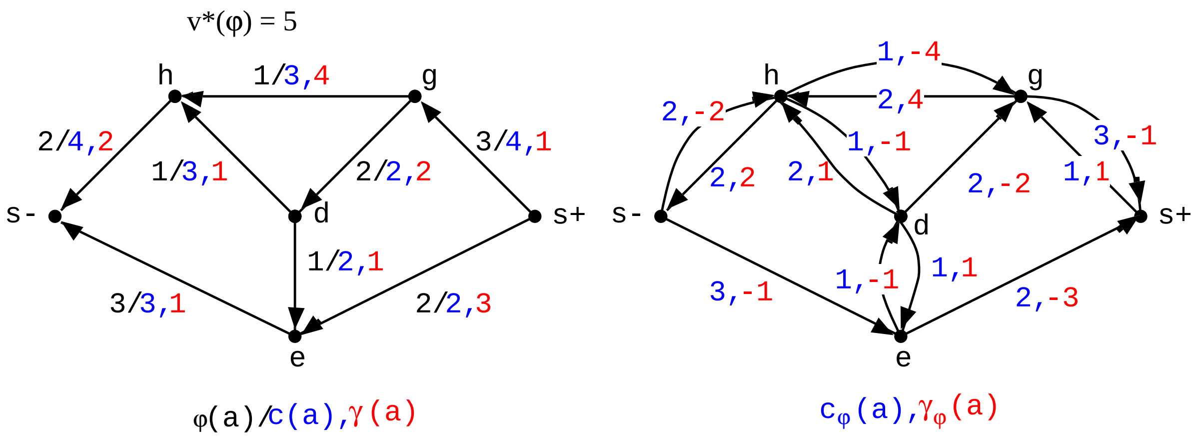

図 2.10: プライマル-デュアル法の動き (フロー φ と $\mathcal{N}_\varphi$ の s^+ から s^- への最短路)