離散最適化 (第 14 回)

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/do/12/

安藤和敏 (静岡大学工学部)

2013.01.24

2.3. 最小費用フロー

2.3.1. 最小費用フロー問題

最大フロー問題のときのように，特別な 2 点 s^+ と s^- が指定されている有向グラフ $G = (V, A)$ を考える．ここでは，各枝 $a \in A$ に対して容量 $c(a)$ の他に，枝 a に 1 単位のフローを流すのにかかる**費用** $\gamma(a)$ が与えられている．このネットワークを $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と書く．

例 2.1: 図 2.1 に，ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ の例を示した．ここで，$V = \{s^+, g, d, e, h, s^-\}$, $A = \{(s^+, g), (s^+, e), (g, h), (g, d), (d, h), (d, e), (h, s^-), (e, s^-)\}$, かつ, $c(a)$ $(a \in E)$ と $\gamma(a)$ $(a \in A)$ は以下の表で与えられるものとする．

a	(s^+, g)	(s^+, e)	(g, h)	(g, d)	(d, h)	(d, e)	(h, s^-)	(e, s^-)
$c(a)$	4	2	3	2	3	2	4	3
$\gamma(a)$	1	3	4	2	1	1	2	1

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と実数 $\hat{v}$ が与えられたとき，流量が $\hat{v}$ であ

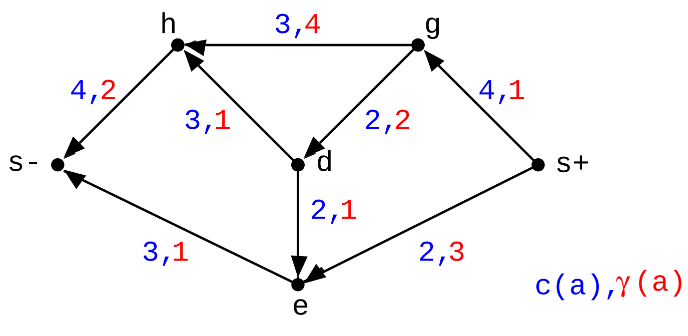

図 2.1: 最小費用流問題で考えるネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$. 各枝 $a \in A$ に付された数値は $c(a), \gamma(a)$ を表す

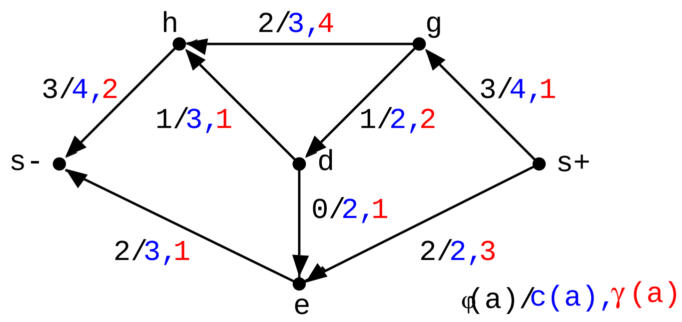

図 2.2: 図 2.1 のネットワーク $\mathcal{N}$ 中のフロー φ. φ の費用は 28.

るようなフロー φ の中で, フローの費用

$$\sum_{a \in A} \gamma(a)\varphi(a)$$

が最小になるものを **最小費用フロー** (minimum cost flow) と呼び, 最大費用フローを求める問題を **最小費用フロー問題** (minimum-cost flow problem) と呼ぶ.

例 2.2: 例 2.3 のネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ と $\hat{v} = 5$ が与えられたとしよう. 図 2.2 に示したものは, 流量 $\hat{v} = 5$ のフロー φ である. このフロー φ の費用は,

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 28$$

である. (後で見るようにこれは費用が最小のフローではない. つまり, 28 より小さい費用をもつ流量が $\hat{v} = 5$ のフローがある.) □

2.3.2. 補助ネットワークと最適性の条件

最小費用フロー問題を解くためのアルゴリズムには, プライマル法, ネットワークシンプレックス法, などがあるが, ここでは**プライマル法**について学ぶ.

これらのアルゴリズムでは, 以下に説明する補助ネットワークを用いる.

ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ 上のフロー φ に対して, 補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi, \gamma_\varphi)$ は以下のように構成される. 枝集合 A_φ は, 最大フロー問題の補助ネットワークと同様に,

$$A_\varphi = A_\varphi^+ \cup A_\varphi^-, \tag{2.33}$$

$$A_\varphi^+ = \{a | a \in A, \varphi(a) < c(a)\} \tag{2.34}$$

$$A_\varphi^- = \{\bar{a} | a \in A, 0 < \varphi(a)\} \quad (\bar{a}\text{: } a \text{ の逆向き枝}) \tag{2.35}$$

で与えられ, 容量関数 $c_\varphi\colon A_\varphi \to \mathbb{R}$ も最大フロー問題の補助ネットワークと同様に,

$$c_\varphi(a) = \begin{cases} c(a) - \varphi(a) & \text{if } a \in A_\varphi^+ \text{ のとき}, \\ \varphi(a) & \text{if } \bar{a} \in A_\varphi^- \text{ のとき}. \end{cases} \tag{2.36}$$

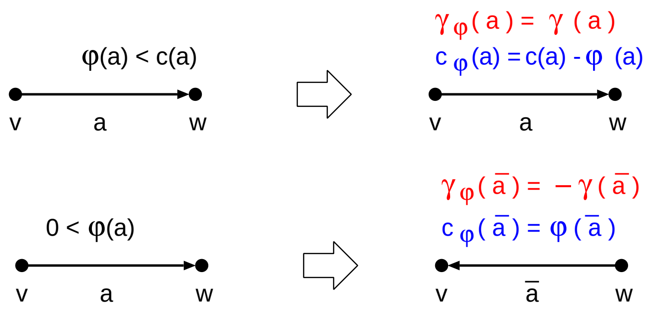

図 2.3: 補助ネットワークの作り方

で定義される．ここでは，新たに費用関数 $\gamma_\varphi\colon A_\varphi \to \mathbb{R}$ を

$$\gamma_\varphi(a) = \begin{cases} \gamma(a) & \text{if } a \in A_\varphi^+ \text{ のとき}, \\ -\gamma(a) & \text{if } \bar{a} \in A_\varphi^- \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.37}$$

で定義する．

例 2.3: 図 2.4(右) に，図 2.2 のフロー φ に対する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi = (G_\varphi = (V, A_\varphi), s^+, s^-, c_\varphi, \gamma_\varphi)$ を示した．

最小費用フローは補助ネットワークを用いて，以下のように特徴付けられる．

定理 2.12: *2* 端子ネットワーク $\mathcal{N} = (G = (V, A), s^+, s^-, c, \gamma)$ 中のフロー φ がそれと同じ流量をもつ $\mathcal{N}$ 中のすべてのフローのうちで費用最小であるための必要十分条件は，φ に関する補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ 中に負の長さの有向閉路が存在しないことである．

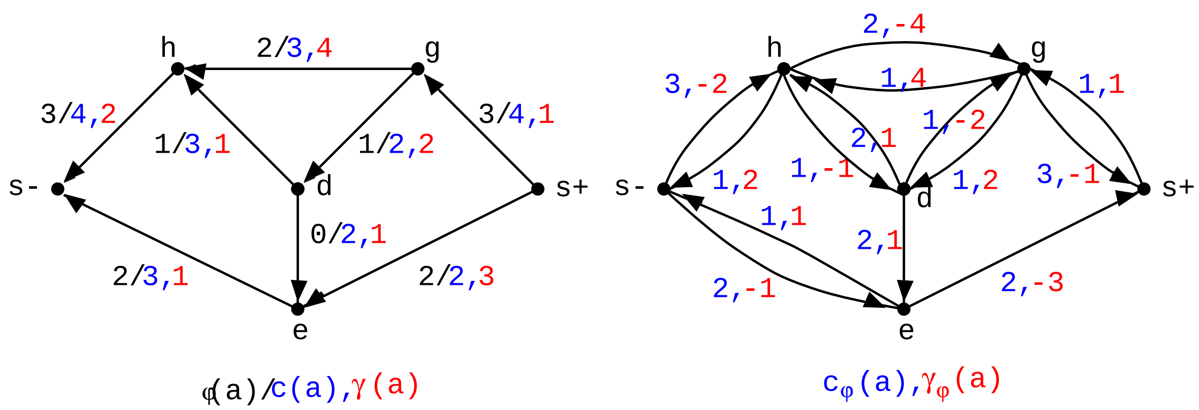

図 2.4: 補助ネットワークの例

2.3.3. 最小費用フロー問題に対するアルゴリズム

[プライマル法]

流量が $\hat{v}$ であるような適当なフローを φ とする.
補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作る.
while $\mathcal{N}_\varphi$ 中に負の長さの有向閉路 Q が存在する **do**
  $d \leftarrow \min\{c_\varphi(a) \mid a \in Q\}$.
  for Q の各枝 a について **do**
    if a が A_φ^+ の枝 **then**
      $\varphi(a) \leftarrow \varphi(a) + d$.
    else if a が A_φ^- の枝 **then**
      $\varphi(\bar{a}) \leftarrow \varphi(\bar{a}) - d$.
    end if
  end for
  補助ネットワーク $\mathcal{N}_\varphi$ を作り直す.
end while

図 2.5: プライマル法

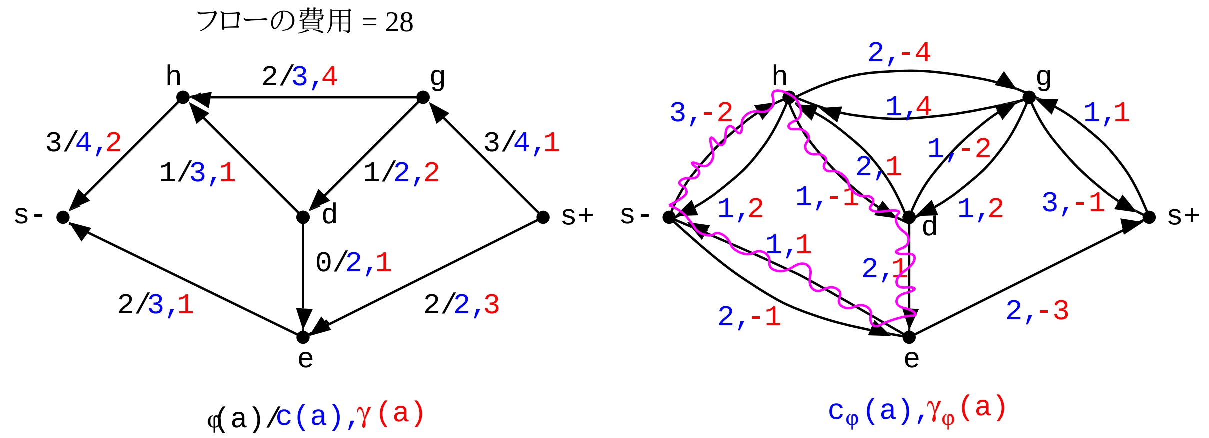

図 2.6: プライマル法の動き (フロー φ と, $\mathcal{N}_\varphi$ の負の長さの有向閉路)

プライマル法は, 定理 2.12 に基づいており, 適当な初期フロー φ から出発して, $\mathcal{N}_\varphi$ の中に負の長さの有向閉路が存在する限り, その有向閉路にそってフロー φ を更新してゆくというアルゴリズムである. 図 2.6～図 2.8 にプライマル法の動きを示した.

プライマル法の各繰り返しにおいて, 負の長さの有向閉路を見付けなければならない. 補助ネットワークの枝には長さが負のものもあるので, 負の長さの有向閉路を見付けるためには, ベルマン-フォード法を用いればよい. (もちろん, 紙の上で解くときには, 試行錯誤によって負の長さの有向閉路を見付けてもよい.)

最後に得られたフロー φ'' に対しては, $\mathcal{N}_{\varphi''}$ 中に負の長さの有向閉路は存在しない. 負の長さの有向閉路が存在しないということの保証は以下のようにして得ることができる.

ベルマン-フォード法を, (出発点を s^+ として) $\mathcal{N}_{\varphi''}$ に対して適用する. $\mathcal{N}_{\varphi''}$ に負の長さの有向閉路が存在しなければ, s^+ から他のすべての点 v への最短路と最短距離 $p(v)$ が定まる. ベルマン-フォード法の終了条件より, この p に対して以下が成り立つ.

$$p(v) + \gamma_{\varphi''}(v, w) \geq p(w) \quad ((v, w) \in A_{\varphi''}). \tag{2.38}$$

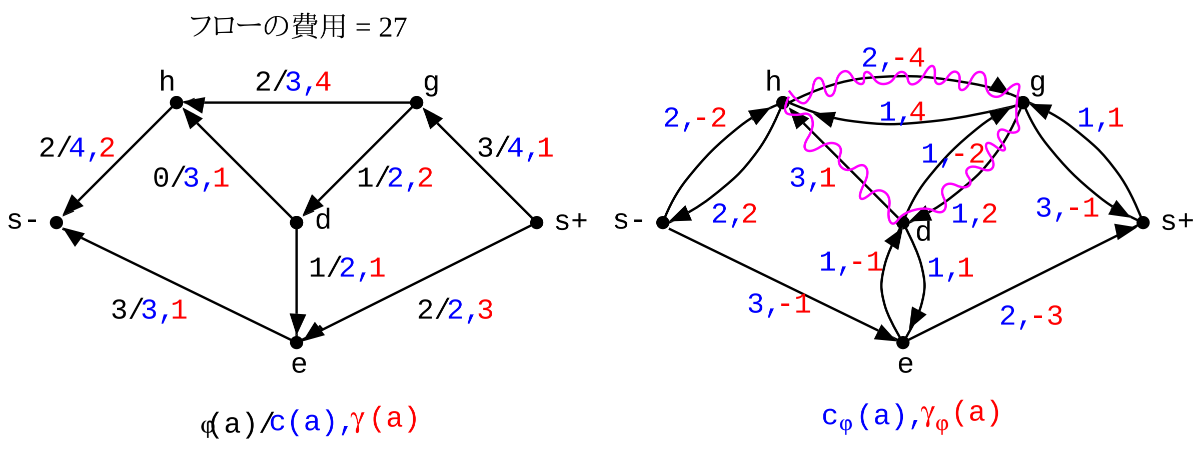

図 2.7: プライマル法の動き (フロー φ' と, $\mathcal{N}_{\varphi'}$ の負の長さの有向閉路)

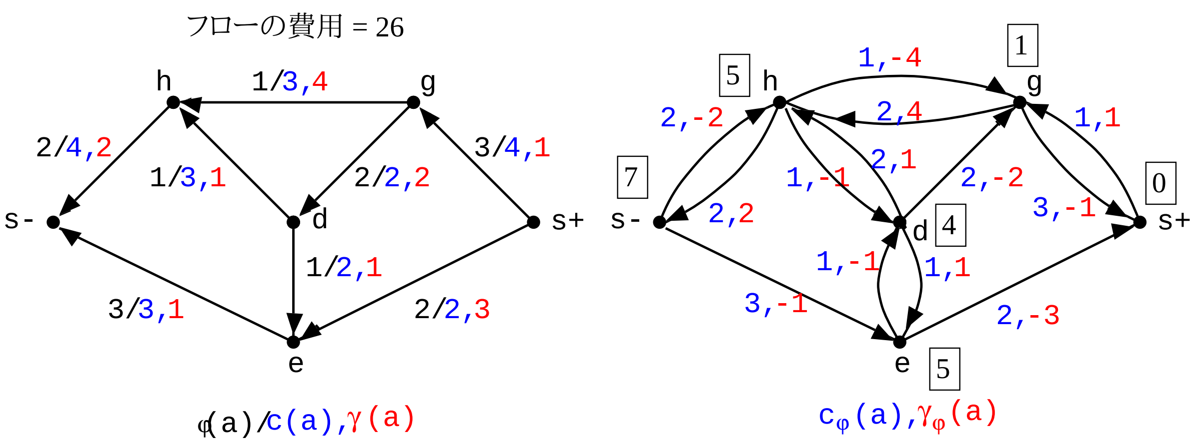

図 2.8: プライマル法の動き (フロー φ'' と, $\mathcal{N}_{\varphi''}$ のポテンシャル)

したがって, $\mathcal{N}_{\varphi''}$ の中の任意の有向閉路

$$C = (v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{l-1}, v_l = v_0)$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\varphi''}(C) &= \sum_{i=1}^{l} \gamma_{\varphi''}(v_{i-1}, v_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{l} (p(v_i) - p(v_{i-1})) \\
&= p(v_l) - p(v_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

C は任意であったので, $\mathcal{N}_{\varphi''}$ には負の長さの有向閉路は存在しない.