データ解析

http://coconut.sys.eng.shizuoka.ac.jp/data/

静岡大学工学部
安藤和敏

2006.01.18

第4章 Excelで学ぶ因子分析

4-2　1因子モデルから学ぶ主因子分析

因子分析の基本方程式 （3変数の場合） ⇒p. 78

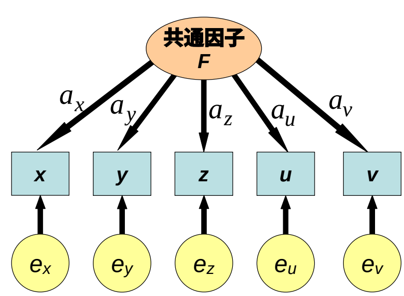
$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & a_x^2 + s_{e_x}^2 \\ 1 & = & a_y^2 + s_{e_y}^2 \\ 1 & = & a_z^2 + s_{e_z}^2 \\ r_{xy} & = & a_x a_y \\ r_{yz} & = & a_y a_z \\ r_{zx} & = & a_z a_x \end{array}\right\} \cdots\cdots (8), (9)$$

未知変数が
a_x, a_y, a_z, e_x, e_y, e_z
の6個で方程式が6
本なので解けた．

因子分析のデータ （変数が5個の場合）

No	変数 x	変数 y	変数 z	変数 u	変数 v
1	x_1	y_1	z_1	u_1	v_1
2	x_2	y_2	z_2	u_2	v_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	x_i	y_i	z_i	u_i	v_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n	z_n	u_n	v_n

因子分析法のパス図



因子分析のモデル（5変数の場合）

$$
\begin{aligned}
x &= a_x F + e_x \\
y &= a_y F + e_y \\
z &= a_z F + e_z \\
u &= a_u F + e_u \\
v &= a_v F + e_v
\end{aligned}
$$

仮定1

3変数のときの同様に，「共通因子と独自因子は，互いに無相関（⇒p. 19）である」と仮定する．

$$
\begin{aligned}
&s_{Fe_x} = s_{Fe_y} = s_{Fe_z} = s_{Fe_u} = s_{Fe_v} = 0, \\
&s_{e_x e_y} = s_{e_x e_z} = s_{e_x e_u} = s_{e_x e_v} = 0, \\
&s_{e_y e_z} = s_{e_y e_u} = s_{e_y e_v} = 0, \\
&s_{e_z e_u} = s_{e_z e_v} = 0 \\
&s_{e_u e_v} = 0
\end{aligned}
$$

仮定2

3変数のときの同様に，*x, y, z, u, v, F* は標準化されていると仮定する．

$$
\begin{aligned}
&s_F^2 = s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = s_u^2 = s_v^2 = 1, \\
&s_{xy} = r_{xy}, s_{xz} = r_{xz}, s_{xu} = r_{xu}, s_{xv} = r_{xv}, \\
&s_{yz} = r_{yz}, s_{yu} = r_{yu}, s_{yv} = r_{yv}, \\
&s_{zu} = r_{zu}, s_{zv} = r_{zv}, \\
&s_{uv} = r_{uv}
\end{aligned}
$$

因子分析の基本方程式（5変数の場合）

$$
\begin{aligned}
1 &= a_x^2 + s_{e_x}^2, \\
1 &= a_y^2 + s_{e_y}^2, \\
1 &= a_z^2 + s_{e_z}^2, \\
1 &= a_u^2 + s_{e_u}^2, \\
1 &= a_v^2 + s_{e_v}^2,
\end{aligned}
$$

因子分析の基本方程式（続き）（5変数の場合）

$$
\begin{aligned}
r_{xy} &= a_x a_y, & r_{yu} &= a_y a_u, \\
r_{xz} &= a_x a_z, & r_{yv} &= a_y a_v, \\
r_{xu} &= a_x a_u, & r_{zu} &= a_z a_u, \\
r_{xv} &= a_x a_v, & r_{zv} &= a_z a_v, \\
r_{yz} &= a_y a_z, & r_{uv} &= a_u a_v.
\end{aligned}
$$

因子分析の基本方程式

未知変数の数が10であるのに対して，方程式の数は15個である．

3変数のときにように，代入によって解くことはできない．

因子分析の基本方程式

基本方程式(1)は行列を用いて，以下のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} & r_{xu} & r_{xv} \\ r_{xy} & 1 & r_{yz} & r_{yu} & r_{yv} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1 & r_{zu} & r_{zv} \\ r_{xu} & r_{yu} & r_{zu} & 1 & r_{uv} \\ r_{xv} & r_{yv} & r_{zv} & r_{uv} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^2+s_{e_x}^2 & a_x a_y & a_x a_z & a_x a_u & a_x a_v \\ a_x a_y & a_y^2+s_{e_y}^2 & a_y a_z & a_y a_u & a_y a_v \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2+s_{e_z}^2 & a_z a_u & a_z a_v \\ a_x a_u & a_y a_u & a_z a_u & a_u^2+s_{e_u}^2 & a_u a_v \\ a_x a_v & a_y a_v & a_z a_v & a_u a_v & a_v^2+s_{e_v}^2 \end{bmatrix} \cdots\cdots(2)$$

（ちなみに，左辺はx,y,z,u,vの相関行列（⇒p. 21）．）

共通性の推定

$$\begin{bmatrix} 1-s_{e_x}^2 & r_{xy} & r_{xz} & r_{xu} & r_{xv} \\ r_{xy} & 1-s_{e_y}^2 & r_{yz} & r_{yu} & r_{yv} \\ r_{xz} & r_{yz} & 1-s_{e_z}^2 & r_{zu} & r_{zv} \\ r_{xu} & r_{yu} & r_{zu} & 1-s_{e_u}^2 & r_{uv} \\ r_{xv} & r_{yv} & r_{zv} & r_{uv} & 1-s_{e_v}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z & a_x a_u & a_x a_v \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z & a_y a_u & a_y a_v \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 & a_z a_u & a_z a_v \\ a_x a_u & a_y a_u & a_z a_u & a_u^2 & a_u a_v \\ a_x a_v & a_y a_v & a_z a_v & a_u a_v & a_v^2 \end{bmatrix}$$

左辺の対角成分を，適当な数

$$0 \le h_x^2, h_y^2, h_z^2, h_u^2, h_v^2 \le 1$$

で推定する．

$$1-s_{e_x}^2 = h_x^2, 1-s_{e_y}^2 = h_y^2, 1-s_{e_z}^2 = h_z^2, 1-s_{e_u}^2 = h_u^2, 1-s_{e_v}^2 = h_v^2$$

共通性の推定

$$\begin{bmatrix} h_x^2 & r_{xy} & r_{xz} & r_{xu} & r_{xv} \\ r_{xy} & h_y^2 & r_{yz} & r_{yu} & r_{yv} \\ r_{xz} & r_{yz} & h_z^2 & r_{zu} & r_{zv} \\ r_{xu} & r_{yu} & r_{zu} & h_u^2 & r_{uv} \\ r_{xv} & r_{yv} & r_{zv} & r_{uv} & h_v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z & a_x a_u & a_x a_v \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z & a_y a_u & a_y a_v \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 & a_z a_u & a_z a_v \\ a_x a_u & a_y a_u & a_z a_u & a_u^2 & a_u a_v \\ a_x a_v & a_y a_v & a_z a_v & a_u a_v & a_v^2 \end{bmatrix} \cdots\cdots(5)$$

因子決定行列

$$R_F = \begin{bmatrix} h_x^2 & r_{xy} & r_{xz} & r_{xu} & r_{xv} \\ r_{xy} & h_y^2 & r_{yz} & r_{yu} & r_{yv} \\ r_{xz} & r_{yz} & h_z^2 & r_{zu} & r_{zv} \\ r_{xu} & r_{yu} & r_{zu} & h_u^2 & r_{uv} \\ r_{xv} & r_{yv} & r_{zv} & r_{uv} & h_v^2 \end{bmatrix}$$

を因子決定行列と呼ぶ．

対称行列のスペクトル分解

R_Fの固有値をλ$_1$＞λ$_2$＞λ$_3$＞λ$_4$＞λ$_5$とし，***w***$_1$, ***w***$_2$, ***w***$_3$, ***w***$_4$, ***w***$_5$をそれぞれの固有値に属する固有ベクトルとする．すると，R_Fは以下のように書ける．（⇒付録Hを見よ．）

$$R_F = \lambda_1 w_1 {}^t w_1 + \lambda_2 w_2 {}^t w_2 + \lambda_3 w_3 {}^t w_3 + \lambda_4 w_4 {}^t w_4 + \lambda_5 w_5 {}^t w_5 \cdots\cdots(6)$$

（ここで，^{t}***w***$_1$は***w***$_1$はの転置を表す．）

因子決定行列の近似

$$R_F = \lambda_1 w_1 {}^t w_1 + \lambda_2 w_2 {}^t w_2 + \lambda_3 w_3 {}^t w_3 + \lambda_4 w_4 {}^t w_4 + \lambda_5 w_5 {}^t w_5 \cdots\cdots(6)$$

仮に，λ$_1$が他の固有値に比べて十分大きいとすれば，(6)式の第2項以降を無視して，

$$R_F \quad \lambda_1 w_1 {}^t w_1 \cdots\cdots(7)$$

と書ける．

因子決定行列の近似

$$w_1=\begin{bmatrix} w_{1x}\\ w_{1y}\\ w_{1z}\\ w_{1u}\\ w_{1v}\end{bmatrix}$$ のとき，(7)は以下の(8)のように書ける．

$$R_F \quad \lambda_1\begin{bmatrix} w_{1x}\\ w_{1y}\\ w_{1z}\\ w_{1u}\\ w_{1v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{1x} & w_{1y} & w_{1z} & w_{1u} & w_{1v}\end{bmatrix}\cdots\cdots(8)$$

(5)式の右辺

(5)式の右辺は，以下のよう書けることに注意しよう．

$$\begin{bmatrix} a_x^2 & a_xa_y & a_xa_z & a_xa_u & a_xa_v\\ a_xa_y & a_y^2 & a_ya_z & a_ya_u & a_ya_v\\ a_xa_z & a_ya_z & a_z^2 & a_za_u & a_za_v\\ a_xa_u & a_ya_u & a_za_u & a_u^2 & a_ua_v\\ a_xa_v & a_ya_v & a_za_v & a_ua_v & a_v^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z\\ a_u\\ a_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & a_u & a_v\end{bmatrix}$$

主因子法

$$\begin{bmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z\\ a_u\\ a_v\end{bmatrix}=\sqrt{\lambda_1}\begin{bmatrix} w_{1x}\\ w_{1y}\\ w_{1z}\\ w_{1u}\\ w_{1v}\end{bmatrix}$$ とすれば，

$$\begin{bmatrix} a_x\\ a_y\\ a_z\\ a_u\\ a_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & a_u & a_v\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix} w_{1x}\\ w_{1y}\\ w_{1z}\\ w_{1u}\\ w_{1v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{1x} & w_{1y} & w_{1z} & w_{1u} & w_{1v}\end{bmatrix} \quad R_F$$

を得る．以上が主因子法と呼ばれる手法である．

Excelで学ぼう

ファイル：第4章/4_2

4-3 SMC法で共通性を推定

共通性の推定

前節では，共通性 $h_x^2, h_y^2, h_z^2, h_u^2, h_v^2$ の推定に適当な値を用いていた．

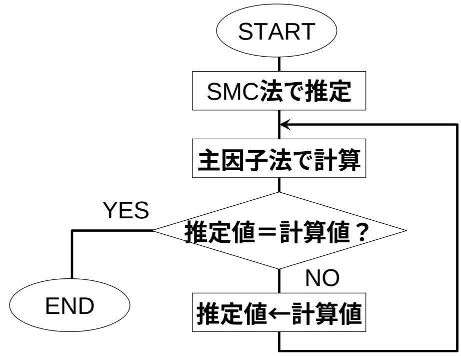
SMC法は，h_x^2 の推定値として，xを目的変数，x以外の変数を説明変数として重回帰分析を行ったときの，決定係数（重相関係数）を用いる．

h_y^2の推定値として，yを目的変数，y以外の変数を説明変数として重回帰分析を行ったときの，決定係数（重相関係数）を用いる．

h_z^2, h_u^2, h_v^2 についても同様．

4-4　1因子モデルから学ぶ反復主因子法

反復主因子法



Excelで学ぼう

ファイル：第4章/4_3, 4_4

本日のまとめ

- 主因子法によって，因子負荷量を求める手法を理解した．
- 主因子法による因子負荷量を，Excelを用いて，計算する方法を理解した．