データ解析 (第7回)

静岡大学システム工学科
安藤 和敏

2.3 検定と推定

(1) 1つの母平均 μ の検定と推定

母平均 μ の検定

1つの母平均の検定

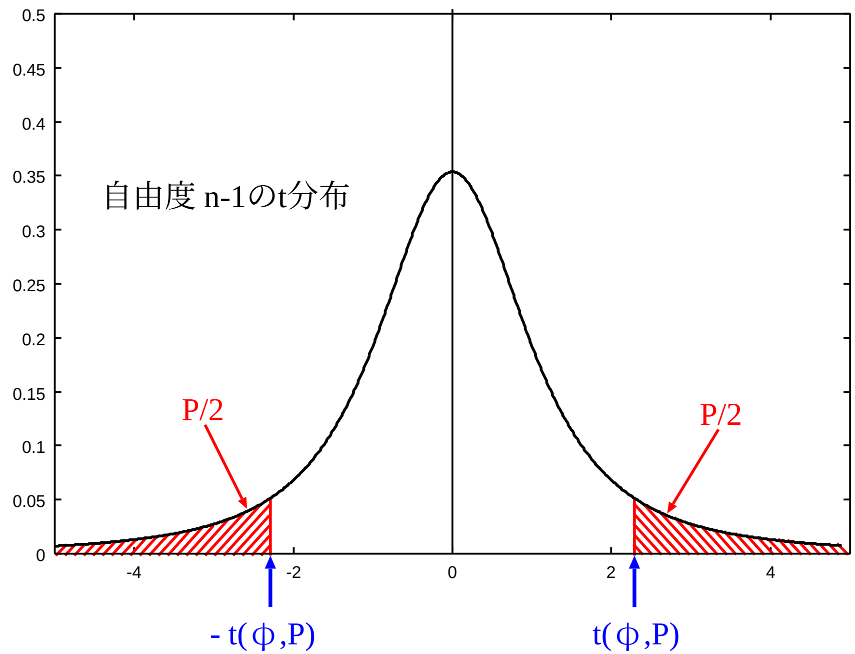
1つの母集団を想定し, その母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるとする. n 個のデータに基づいて, 母平均 μ が指定された値 μ_0 と異なるかどうかを判定する作業を1つの母平均の検定と呼ぶ.

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu = \mu_0, \ \text{対立仮説 } H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{2.65}$$

もし, 帰無仮説 $\mu = \mu_0$ が正しいとすると, (2.61) によって,

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{V_x/n}} \ \sim \ t(n-1)$$

であるから,



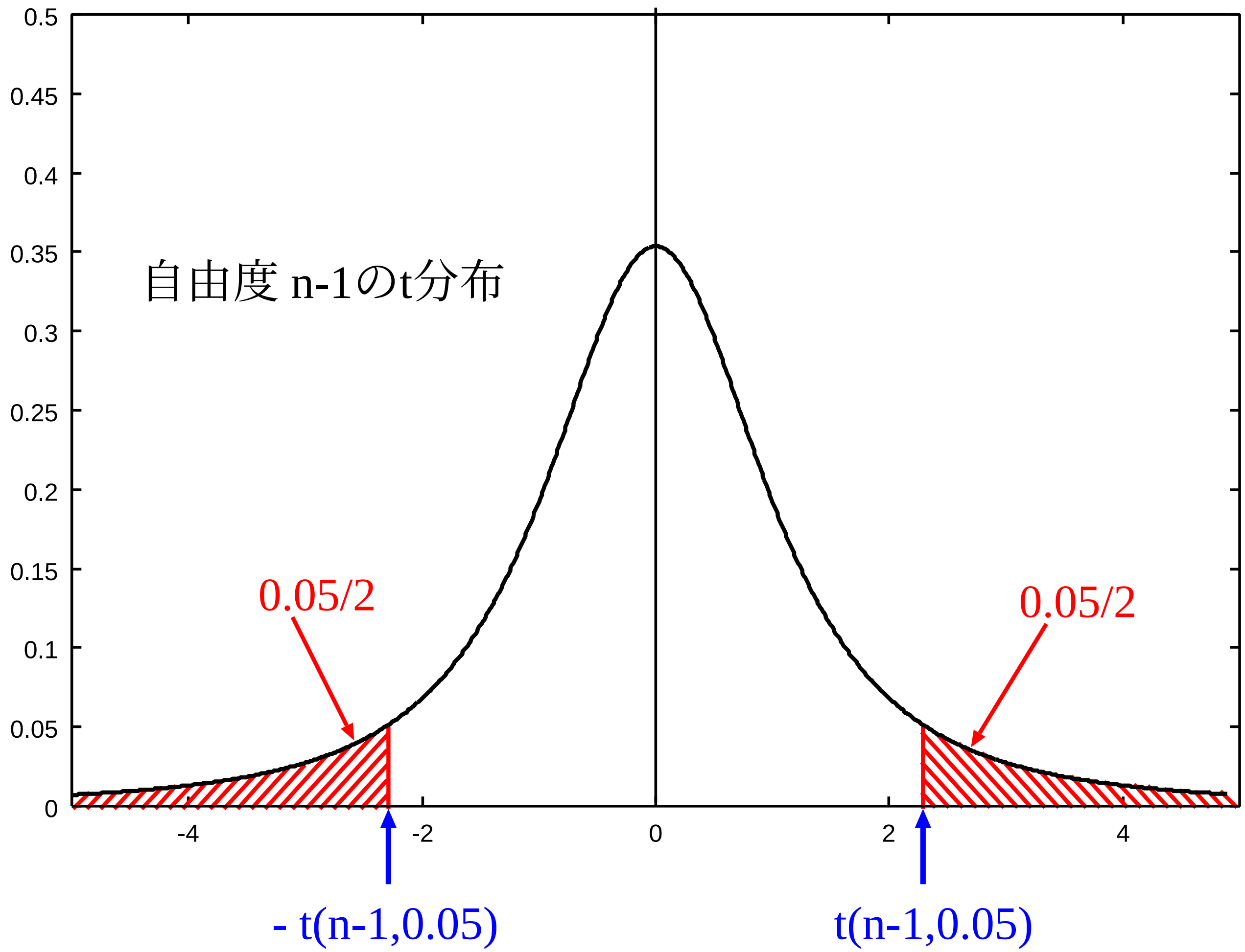
$|t_0| \geq t(n-1, 0.05)$ であるのなら, (それは5%の確率でしか起りえないから,) 有意水準5%で有意であると判定し, $H_0 : \mu = \mu_0$ を棄却して,「$\mu \neq \mu_0$」と判断する.

母平均 μ の点推定

母平均の点推定

$E(\bar{x}) = \mu$ となるから, μ の点推定量は, $\hat{\mu} = \bar{x}$.

母平均 μ の区間推定



$$Pr(|t| \geq t(n-1, 0.05)) = 0.05.$$

あるいは,

$$Pr(|t| \leq t(n-1, 0.05)) = 0.95.$$

一方,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{V_x/n}} \ \sim \ t(n-1)$$

であるから, 95%の確率で,

$$-t(n-1, 0.05) \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{V_x/n}} \leq t(n-1, 0.05).$$

書き直すと, 95%の確率で,

$$
\begin{aligned}
\bar{x} - t(n-1, 0.05)\sqrt{V_x/n} &\leq \mu \\
\leq\ & \bar{x} + t(n-1, 0.05)\sqrt{V_x/n}.
\end{aligned}
$$

$$
\bar{x} \pm t(n-1, 0.05)\sqrt{V_x/n} \tag{2.67}
$$

を μ の信頼率 95% の信頼区間という.

(2) 1つの母分散 σ^2 の検定と推定

母分散 σ^2 の検定

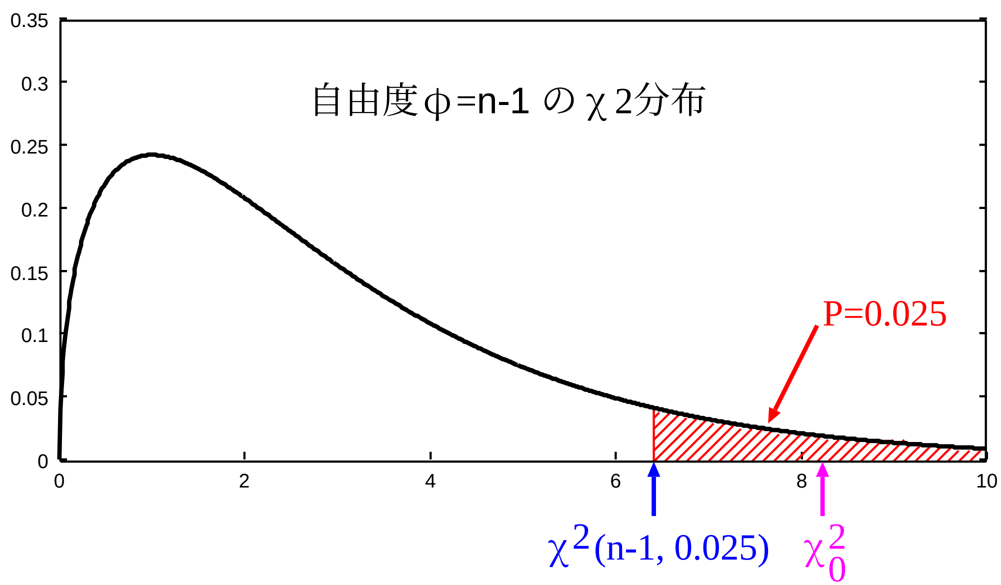
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ から採取した n 個のデータに基づいて, 母分散 σ^2 が指定された値 σ_0^2 と異なるかどうかを判定する.

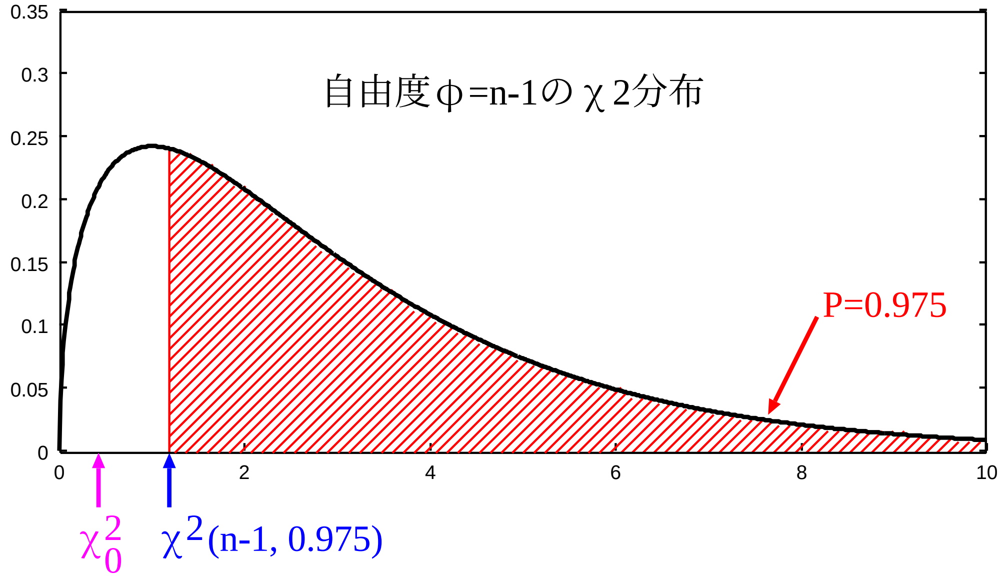
$$\text{帰無仮説 } H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \text{ 対立仮説 } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \tag{2.68}$$

もし帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ が正しいとすると, (2.58) より

$$\chi_0^2 = \frac{S_{xx}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

であるから,





$\chi_0^2 \geq \chi^2(n-1, 0.025)$ あるいは, $\chi_0^2 \leq \chi^2(n-1, 0.97$

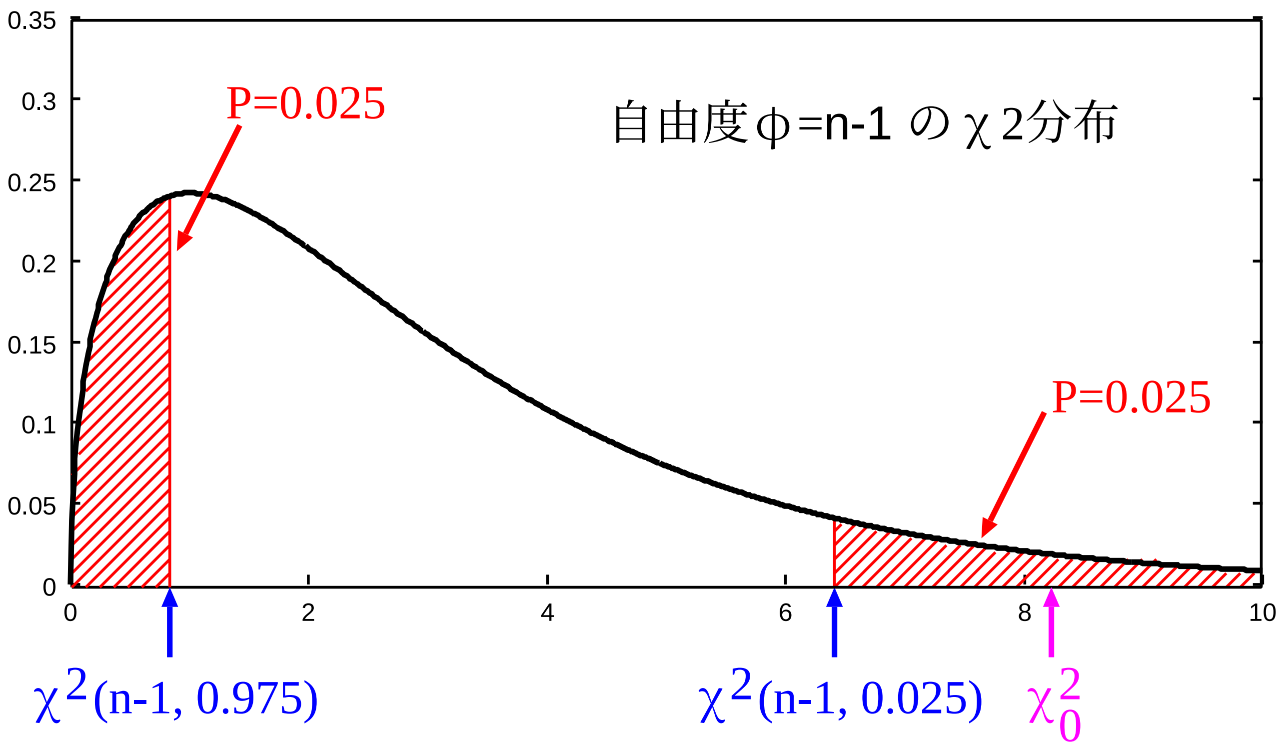
という状況は 5%の確率でしか起こり得ない. このとき, 有意水準 5%で有意であると判定し, 仮説 H_0 を棄却して「$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$」と判断する.

母分散 σ^2 の点推定

母分散 σ^2 の点推定

$E(V_x) = \sigma^2$ となるから，σ^2 の点推定量は，
$\hat{\sigma}^2 = V_x$.

母分散σ^2の区間推定



$$\Pr(\chi^2 \le \chi^2(n-1, 0.975) \text{ または} \chi^2(n-1, 0.025) \le \chi^2)$$
$$= 0.05.$$

あるいは,

$$\Pr(\chi^2(n-1, 0.975) \le \chi^2 \le \chi^2(n-1, 0.025)) \\ = 0.95.$$

一方,

$$\chi^2 = \frac{S_{xx}}{\sigma^2} \ \sim \ \chi^2(n-1)$$

であるから, 95%の確率で,

$$\chi^2(n-1, 0.975) \le \frac{S_{xx}}{\sigma^2} \le \chi^2(n-1, 0.025).$$

書き直すと, 95%の確率で,

$$\frac{S_{xx}}{\chi^2(n-1, 0.025)} \leq \sigma^2 \leq \frac{S_{xx}}{\chi^2(n-1, 0.975)}.$$

したがって, σ^2 の信頼率 95% の信頼区間は,

$$\left(\frac{S_{xx}}{\chi^2(n-1, 0.025)}, \frac{S_{xx}}{\chi^2(n-1, 0.975)} \right) \quad (2.70).$$