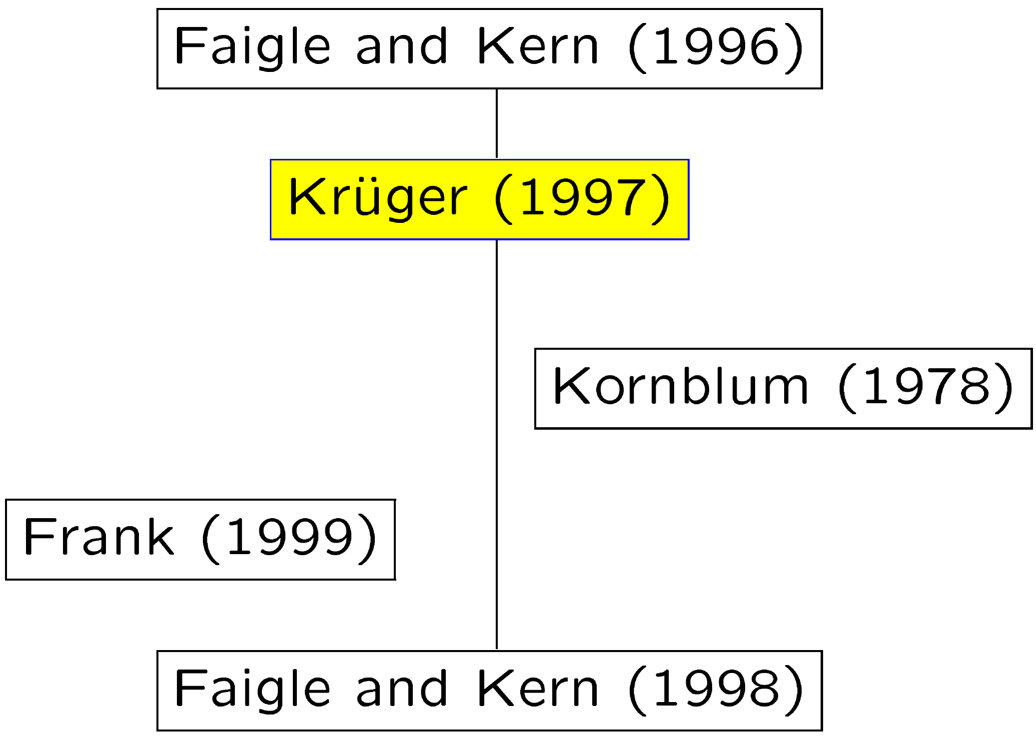
Faigle-Kern の双対貪欲算法とその帰結

筑波大学社会工学系
安藤 和敏

Coma Seminar
1999.11.08

はじめに − 双対貪欲算法と関連する研究 −



1. U. Faigle and W. Kern: Submodular linear programs on forests. *Mathematical Programming* **72** (1996) 195–206.

2. U. Faigle and W. Kern: An algorithmic framework for the greedy algorithm with applications to the core and Weber set of cooperative games. Technical report, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, October 1998.

3. A. Frank: Increasing the rooted-connectivity of a digraph by one. *Mathematical Programming* **84** (1999) 565–576.

4. S. Fujishige: A note on Faigle and Kern's dual greedy polyhedra. In: *The Proceedings of the 1st Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications*, 1999, pp. 205–207.

5. D. Kornblum: Greedy algorithms for some optimization problem on a lattice polyhedron. PhD thesis, Graduate Center of the City University of New York, 1978.

6. U. Krüger: Structural aspects of ordered polymatroids. Reports on Optimization and Stochastics 97-44, Fachbereich Mathematik und Imformatik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Germany, 1997. (to appear in *Discrete Applied Mathematics*).

Monge 型輸送問題

♠ 輸送問題

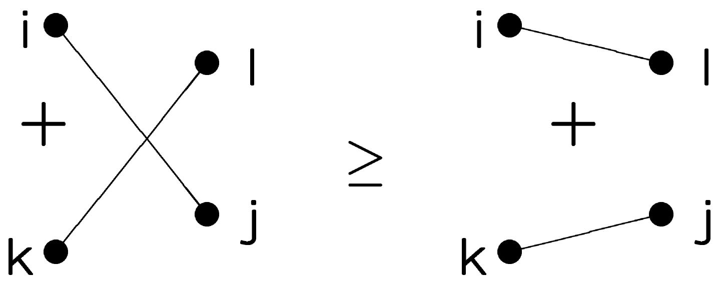
$$
\left|
\begin{array}{lll}
\text{min} & \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} y_{ij} & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i & (i = 1, \cdots, n), \\
 & \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = b_j & (j = 1, \cdots, n), \\
 & y_{ij} \geq 0 & (i, j = 1, \cdots, n)
\end{array}
\right.
$$

♠ Monge性

$$f_{ij} + f_{kl} \geq f_{i \vee k, j \vee l} + f_{i \wedge k, j \wedge l},$$

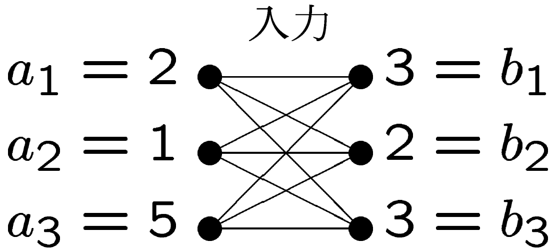
ここで、

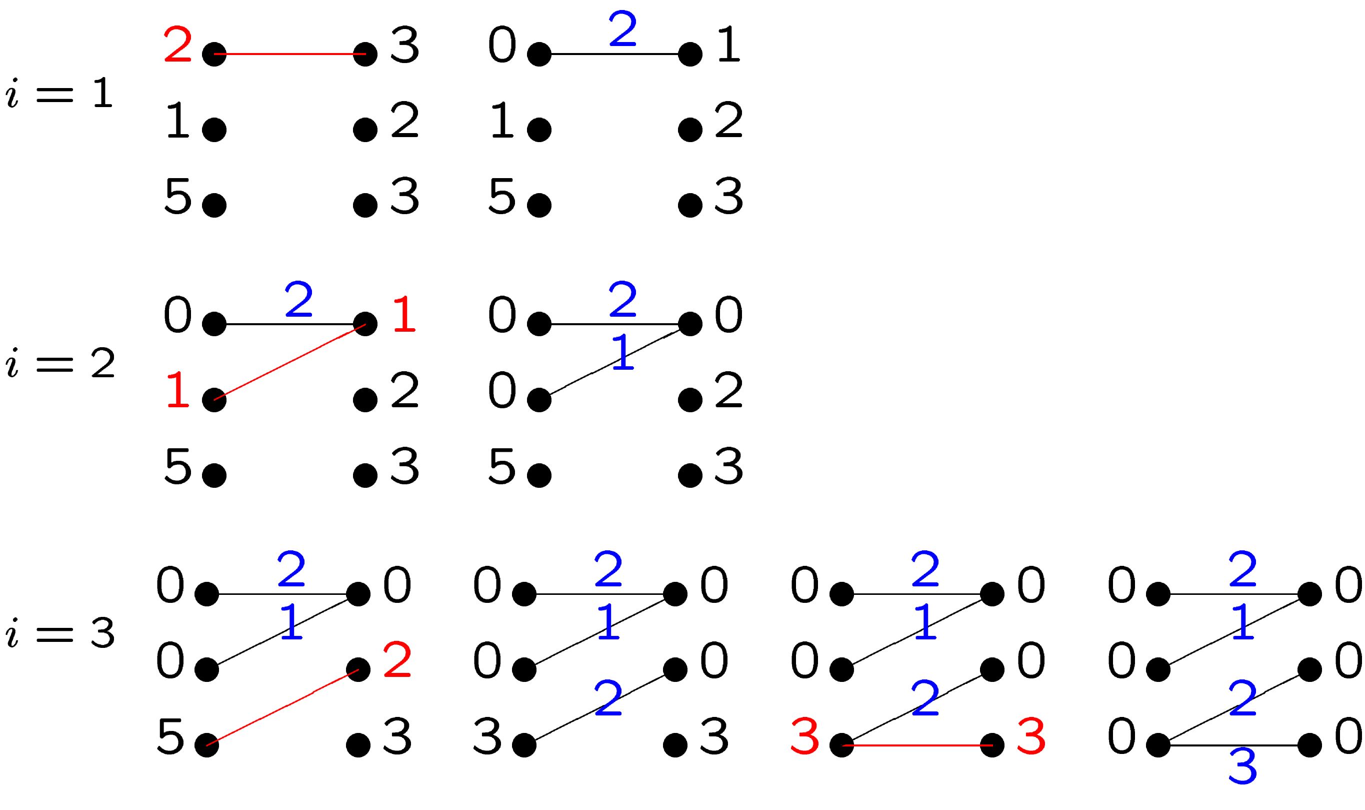
$$i \vee j = \max\{i, j\}, \quad i \wedge j = \min\{i, j\}.$$



Algorithm 1 北西隅法

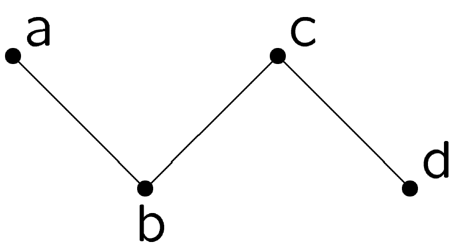
```
for i = 1 to n do
    for j = 1 to n do
        y_ij ← μ = min{a_i, b_j}.
        a_i ← a_i − μ.
        b_j ← b_j − μ.
    end for
end for
```


入力
$a_1 = 2$
$a_2 = 1$
$a_3 = 5$
$3 = b_1$
$2 = b_2$
$3 = b_3$


$i = 1$
$i = 2$
$i = 3$

イデアルと反鎖

♠ $P = (E, \preceq)$: 有限半順序集合. ($n = |E|$.)



♠ $I \subseteq E$ は P のイデアル $\Leftrightarrow$ $(y \preceq x \in I \Rightarrow y \in I)$.
$\mathcal{I}(P) = P$ のイデアル全体.

♠ $A \subseteq E$ は P の反鎖 $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in A$: $a \preceq b \Rightarrow a = b$.
$\mathcal{A}(P) = P$ の反鎖全体.

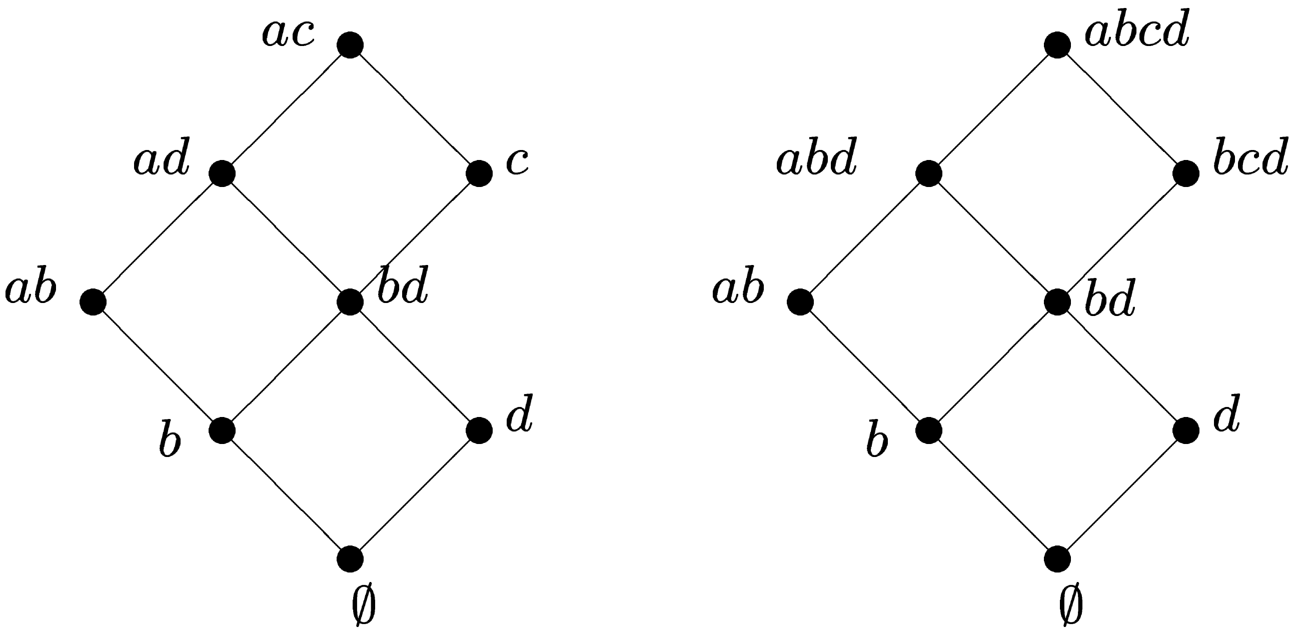
♠ $A \in \mathcal{A}(P)$ で生成されるイデアル

$$\mathrm{id}(A) = \{y \mid y \in E, \exists x \in A\colon y \preceq x\}.$$

♠ $I \in \mathcal{I}(P)$ に対して,

$$\max(I) = \{x \mid x \in I, \nexists y \in I\colon x \prec y\}.$$

命題: $\mathrm{id}\colon \mathcal{A}(P) \to \mathcal{I}(P)$ と $\max\colon \mathcal{I}(P) \to \mathcal{A}(P)$ は *1* 対 *1* 対応で, 互いに逆写像の関係にある. □



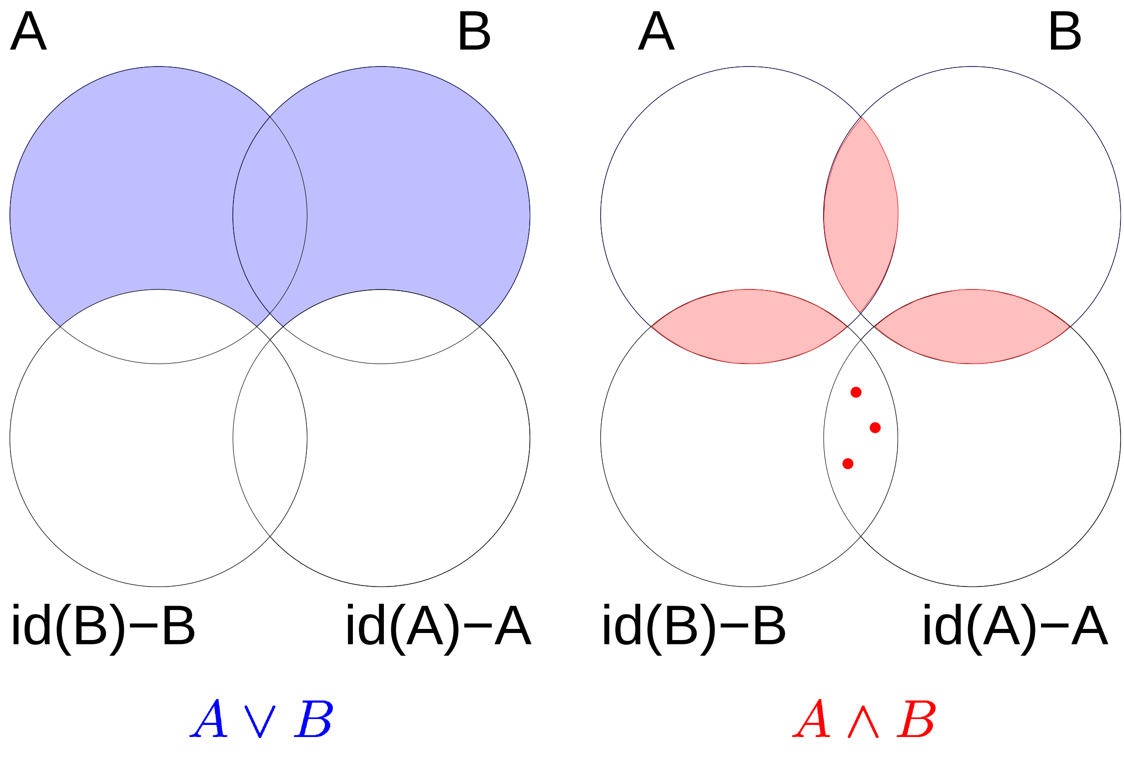
$$\mathcal{A}(P) \underset{\max}{\overset{\mathrm{id}}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}(P)$$

系: 上の同型によって $\mathcal{A}(P)$ 上の束演算が誘導される: $(\mathcal{I}(P); \cup, \cap) \cong (\mathcal{A}(P); \vee, \wedge)$. ここで,

$$\begin{aligned} A \vee B &= \max(\mathrm{id}(A) \cup \mathrm{id}(B)), \\ A \wedge B &= \max(\mathrm{id}(A) \cap \mathrm{id}(B)). \end{aligned}$$

対応する $\mathcal{A}(P)$ 上の順序を $\preceq$ で表すと,

$$\forall A, B \in \mathcal{A}(P) \colon A \preceq B \iff \mathrm{id}(A) \subseteq \mathrm{id}(B). \ \Box$$


A
B
A
B
id(B)−B
id(A)−A
id(B)−B
id(A)−A
$A \vee B$
$A \wedge B$

双対貪欲算法

♠ $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbf{R}$は劣モジュラ$\Leftrightarrow$ $A, B \in \mathcal{A}(P)$:

$$f(A) + f(B) \geq f(A \vee B) + f(A \wedge B).$$

♠ $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbf{R}$ に関連する多面体

$$\mathrm{P}(f) = \{x \mid x \in \mathbf{R}^E, \forall A \in \mathcal{A}(P)\colon x(A) \leq f(A)\}.$$

ここで$x(X) = \sum_{e \in X} x(e)$ $(X \subseteq E)$.

♠ $\mathrm{P}(f)$上のLPとその双対

$$\text{(P)} \left| \begin{array}{lll} \max & \sum_{e \in E} w(e)x(e) & \\ \text{s.t.} & x(A) \leq f(A) & (A \in \mathcal{A}) \end{array} \right.$$

$$\text{(D)} \left| \begin{array}{lll} \min & \sum\{f(A)y(A) \mid A \in \mathcal{A}(P)\} & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{e \in A \in \mathcal{A}(P)} y(A) = w(e) & (e \in E), \\ & y(A) \geq 0 & (A \in \mathcal{A}(P)) \end{array} \right.$$

$\underline{x^\pi}$

♠ $\pi = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ を $P = (E, \preceq)E$ の linear extension:

$$e_i \preceq e_j \Rightarrow i \leq j$$

とする.

♠ $i = 1, \cdots, n$ に対して,

$$A_i := \max(\{e_1, \cdots, e_i\}).$$

$$A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_n.$$

♠ x^π を

$$x(A_i) = f(A_i) \quad (i = 1, \cdots, n)$$

の一意解とする.

$$\left(\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x(e_1) \\ x(e_2) \\ \vdots \\ x(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(A_1) \\ \vdots \\ f(A_n) \end{bmatrix}\right)$$

y^π

♠ y^π を

$$[y(A_1), \cdots, y(A_n)] \begin{bmatrix} \chi_{A_1} \\ \vdots \\ \chi_{A_n} \end{bmatrix} = [w(e_1), \cdots, w(e_n)]$$

$$y(A) = 0 \quad (A \in \mathcal{A} - \{A_1, \cdots, A_n\}$$

の一意解とする.

注意: x^π と y^π は, 相補性条件を満足する:

$$y^\pi(A) > 0 \Leftarrow x^\pi(A) = f(A). \square$$

注意: y^π は,

$$\sum\{y^\pi(A) \mid e \in A \in \mathcal{A}(P)\} = w(e)$$

を満す. □

Algorithm 2 Dual Greedy (Faigle and Kern(1996))

Require: $w\colon E \to \mathrm{R}_{+}$.

Ensure: (P)と(D)の最適解 x^{π} と y^{π}.

```
w' ← w.
for i = n downto 1 do
    Choose e_i ∈ max(E) such that
    w'(e_i) = min{w'(e) | e ∈ max(E)}.
    γ_i ← w'(e_i).
    w'(e) ← w'(e) − γ_i    (e ∈ max(E)).
    E ← E − {e_i}.
end for
π ← (e_1, ···, e_n).
Compute x^π and y^π.
```

注意: $\pi = (e_1, \cdots, e_n)$は *linear extension*.

定理 (Faigle and Kern 1996): Pが *rooted forest* ならば，双対貪欲算法は任意の$w\colon E \to \mathbf{R}_+$に対して正当である.

(証明の概略) x^πとy^πはLPの相補性条件を満足するので，後は両者の実行可能性を言えばよい.

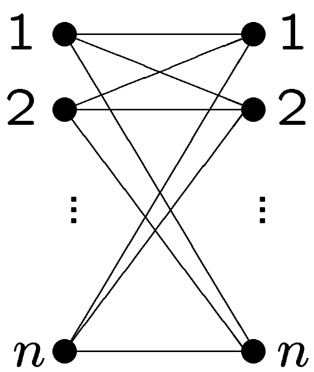
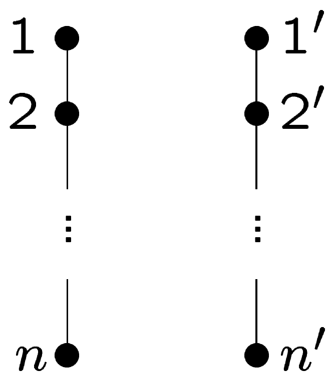
補題: y^πを *Dual Greedy* によって得られたものとすると

$$y^\pi(A_i) = \gamma_i. \quad (i = 1, \cdots, n)$$

特にy^πは非負. □

定理: $P = (E, \preceq)$が *rooted forest* ならば，$x^\pi \in \mathrm{P}(f)$. □

双対貪欲算法と北西隅法

輸送問題	Faigle-Kern
	
(i, j)	$\{i, j'\}$
Monge性	劣モジュラ性
$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = a_i$	$\sum\{y(A) \mid i \in A \in \mathcal{A}\} = a_i$

Krüger の劣モジュラ性

♠ $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbf{R}$ が K-劣モジュラ関数
$\Leftrightarrow$ $\forall A, B \in \mathcal{A}(P)$:

$$f(A) + f(B) \geq f(A \vee B) + f(A \sqcap B),$$

ここで,

$$A \sqcap B = (A \wedge B) \cap (A \cup B).$$

注意: Pが *rooted forest* のときは, $A \wedge B = A \sqcap B$ となっているので, 劣モジュラ性と *K*-劣モジュラ性は同義.

定理 (Krüger 1997): 任意の半順序集合 P に対して, $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbf{R}$ が *K*-劣モジュラならば, 双対貪欲算法は正当である. □

系: Pを任意とする. 関数$f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbf{R}$ に対して, 双対貪欲算法が正当であるための必要十分条件は, f が K-劣モジュラであることである. □

研究の動機 − 通常の劣モジュラ関数の analogy はどこまで成り立つか? −

- 貪欲算法による特徴付け.
- TDIity.
- ○ 交叉定理 $\longrightarrow$ P が rooted forest のときは OK.
- Lovász 拡張 $\longrightarrow$ OK.
- 端点判定の(組合せ的)多項式アルゴリズム $\longrightarrow$ OK.
- ○ K-劣モジュラ関数最小化(組合せ的)多項式アルゴリズム
- ○ 離散分離定理 $\longrightarrow$ P が rooted forest のときは OK.

Lovász 拡張

補題: 任意の $w\colon E \to \mathbf{R}_+$ に対して，P の非空な反鎖の増加列

$$\mathcal{C}\colon A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_k$$

と $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \cdots, k)$ が一意に存在して，

$$w = \lambda_1 \chi_{A_1} + \lambda_2 \chi_{A_2} + \cdots + \lambda_k \chi_{A_k} \tag{1}$$

と書ける．ここで，$k \geq 0$．□

♠ Lovász 拡張
Let $P = (E, \preceq)$ be a poset and consider an arbitrary function $f\colon \mathcal{A}(P) \to \mathbf{R}$. Define

$$\hat{f}(w) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(A_i), \tag{2}$$

where c has the uniquely represented as (1).

定理: *Lovász* 拡張 $\hat{f}\colon \mathbf{R}_+^E \to \mathbf{R}$ が凸であるための必要十分条件は f が *K*-劣モジュラであることである．□

補題: *Lovász* 拡張 $\hat{f}$ は, *positively homogeneous, i.e., for any* $\mu > 0$ *we have*

$$\hat{f}(\mu w) = \mu \hat{f}(w).$$

(証明) $w\colon E \to \mathbf{R}_+$ が

$$w = \lambda_1 \chi_{A_1} + \lambda_2 \chi_{A_2} + \cdots + \lambda_k \chi_{A_k}$$

と表現されているとする．ここで，$\lambda_i > 0$ かつ

$$\emptyset \neq A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_k.$$

このとき任意の $\mu > 0$ に対して

$$\mu w = \mu\lambda_1 \chi_{A_1} + \mu\lambda_2 \chi_{A_2} + \cdots + \mu\lambda_k \chi_{A_k}.$$

これは，μw の増加する反鎖の列による一意的な表現であるので，

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mu w) &= \mu\lambda_1 \hat{f}(A_1) + \mu\lambda_2 \hat{f}(A_2) + \cdots + \mu\lambda_k \hat{f}(A_k) \\ &= \mu \hat{f}(w). \ \Box \end{aligned}$$

定理: *Lovász* 拡張 $\hat{f}\colon \mathbf{R}_{+}^{E} \to \mathbf{R}$ が凸であるための必要十分条件は f が *K*-劣モジュラであることである.

(証明) [十分性] f が K-劣モジュラであるならば,

$$\hat{f}(w) = \max\{\sum_{e \in E} w(e)x(e) \mid x \in \mathrm{P}(f)\}$$

であるから, $\hat{f}$ は凸.
[必要性] $\hat{f}$ を凸とする. 補題によって,

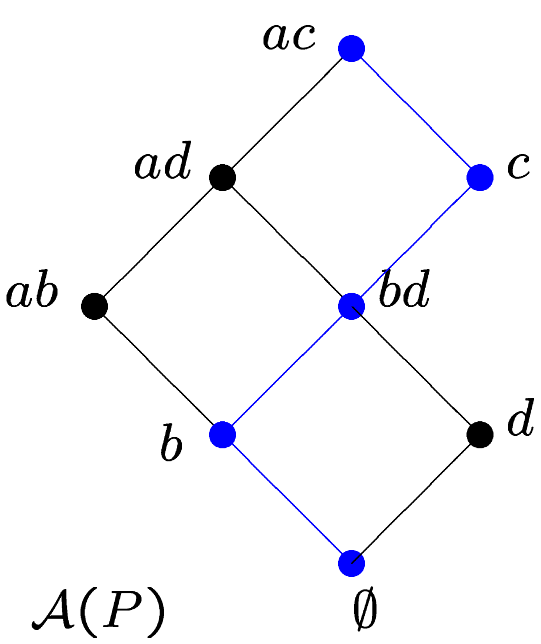
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{f}(\chi_A) + \hat{f}(\chi_B)) &\geq \hat{f}(\frac{1}{2}(\chi_A + \chi_B)) \\ &= \frac{1}{2}\hat{f}(\chi_A + \chi_B). \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= \hat{f}(A) + \hat{f}(B) \\ &\geq \hat{f}(\chi_A + \chi_B) \\ &= \hat{f}(\chi_{A \vee B} + \chi_{A \sqcap B}) \\ &= f(A \vee B) + f(A \sqcap B). \ \square \end{aligned}$$

端点判定のアルゴリズム

定理: $x \in \mathbf{R}^E$が端点$\Leftrightarrow \exists$ *linear extension* π *of* $P = (E, \preceq)$ *s.t.* $x = x^\pi$. □



$x \in \mathbf{R}^E$が $\mathrm{P}(f)$ の端点ならば，$A_0 = \emptyset$から始めて $x(A_i) = f(A_i)$なる

$$A_0 \prec A_1 \prec \cdots \prec A_n$$

たちを下から見つけることができる．

補題 (登り方): *Let* $A \in \mathcal{A}(P) - \max(E)$. *Then,* $A \prec\cdot\, A \vee e$ *if and only if* $e \in \min(E - \mathrm{id}(A))$. □

補題 (行きづまることもない): *Suppose that* x *is an extreme point of* $\mathsf{P}(f)$. *For each* $A \in \mathcal{A}(P) - \max(E)$ *with* $x(A) = f(A)$ *there exists an* $e \in \min(E - \mathrm{id}(A))$ *such that* $x(A \vee e) = f(A \vee e)$. □

定理: 次のアルゴリズムは正当である. □

Algorithm 3 Extreme

Require: $x \in \mathbf{R}^E$.

Ensure: YES if x is an extreme point of P(f), NO otherwise.

```
A ← ∅.
while ∃e ∈ min(E − id(A)) such that x(A ∨ e) = f(A ∨ e) do
    A ← A ∨ e.
end while
if A = max(E) then
    return YES.
else
    return NO.
end if
```

最後に

- 劣モジュラ・フロー多面体による表現 [Fujishige (1999)] の一般化.

- $\mathcal{A}(P)$ は分配束であるが, $x \in \mathrm{P}(f)$ に対して

$$\mathcal{A}(x) := \{A \mid A \in \mathcal{A}(P), x(A) = f(A)\}$$

  はどうか? 一応束か.

- 集合論的特殊化?

- L/M-凸関数との関連?

- Faigle and Kern (1998) と Frank (1999) の勉強.