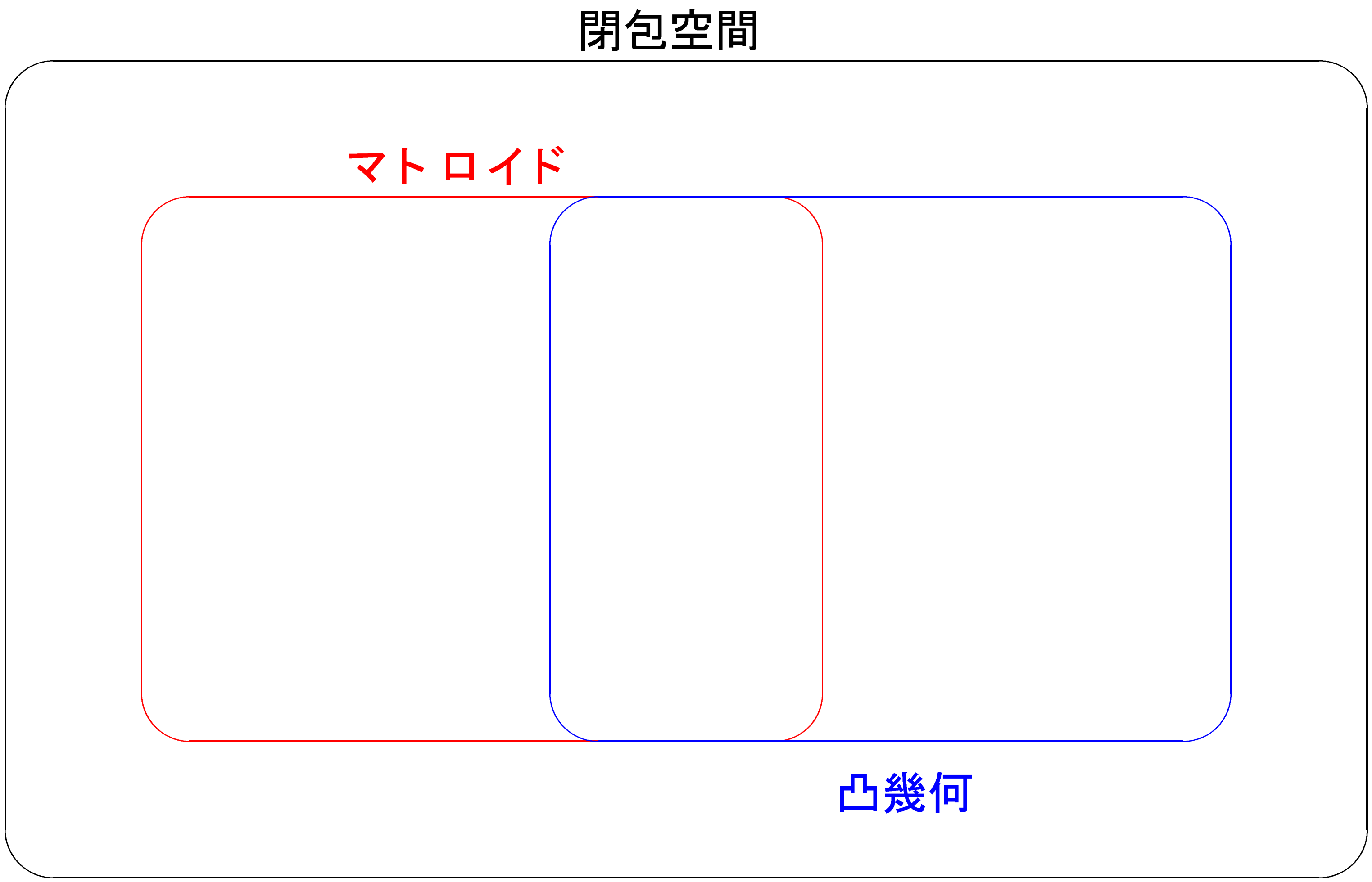
閉包空間の端点演算子の特徴付け

Characterizations of Extreme Point Operators of Closure Spaces

筑波大学社会工学系
安藤 和敏

2002.3.19



端点演算子による公理系

マトロイドの閉包演算子による定義

X を有限集合とする．$\tau\colon 2^X \to 2^X$ が，以下を満足するとき，X と τ の対 (X,τ) を**マトロイド**と呼ぶ．

(C1) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$. (Extensionality)

(C2) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$. (Monotonicity)

(C3) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$. (Idempotence)

(EA) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \in \tau(A \cup q)$.
(Steinitz-MacLane Exchange Axiom)

マトロイドの例 – 行列マトロイド –

X を $X \subseteq \mathbf{R}^n$ なる有限集合とする．$A \subseteq X$ に対して，

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \{x \mid x \in X, x \text{ は } A \text{ に線型従属}\} \\ &= X \cap (A \text{ で張られる部分空間})\end{aligned}$$

とすると，(X, τ) はマトロイドになる．

凸幾何 (あるいは, アンチマトロイド)

Xが有限集合で$\tau\colon 2^X \to 2^X$が以下を満足するとき, 対(X,τ)は**凸幾何** (アンチマトロイド) と呼ばれる.

(C0) $\tau(\emptyset) = \emptyset$.

(C1) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$. (Extensionality)

(C2) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$. (Monotonicity)

(C3) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$. (Idempotence)

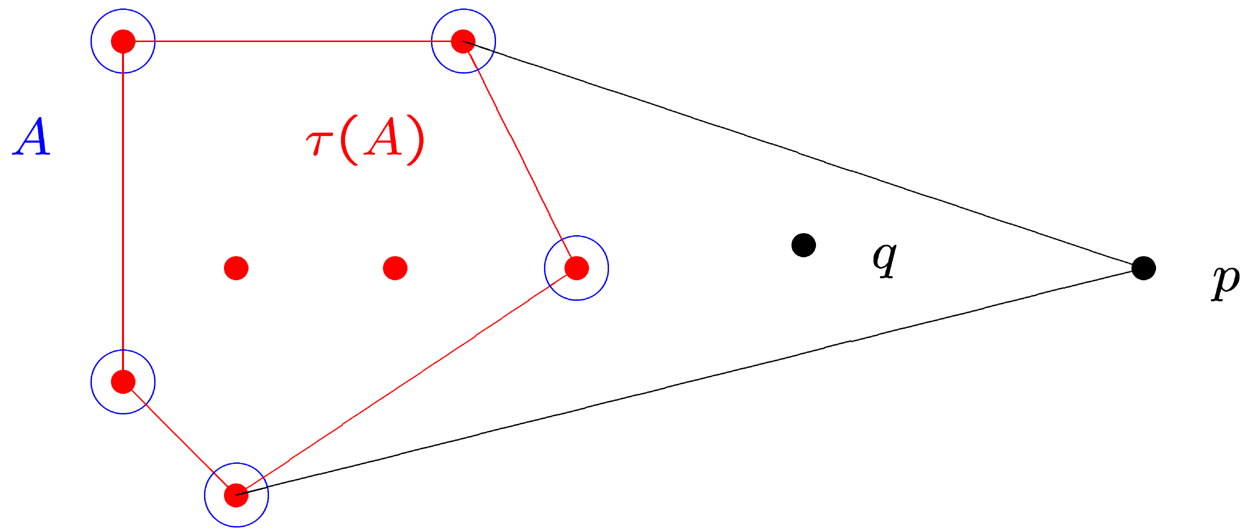
(AE) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)$ with $p \neq q\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q)$. (Antiexchange Axiom)

凸幾何の例 1 − 凸シェリング −

有限集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ に対して, $\tau\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau(A) = \mathrm{conv.hull}(A) \cap X \quad (A \subseteq X).$$

で定義すると, (X, τ) は凸幾何.



$$\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q).$$

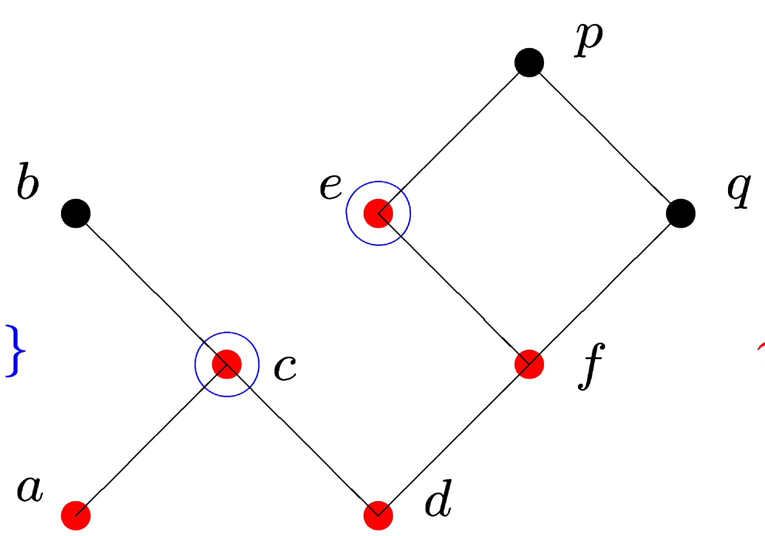
凸幾何の例2 − ポセット・シェリング −

有限半順序集合 $P = (X, \preceq)$ に対して，$\tau\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau(A) = \{x \mid x \in X, \exists a \in A\colon x \preceq a\} = (A \text{ で生成されるイデアル})$$

で定義すると，(X, τ) は凸幾何.

$A = \{c, e\}$



$\tau(A) = \{a, c, d, e, f\}$

$$\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin \tau(A)\colon q \in \tau(A \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(A \cup q).$$

マトロイドと凸幾何の公理系

公理系	マトロイド	凸幾何
閉包演算子	$\surd$	(定義)
閉集合族	$\surd$	Edelman-Jamison (1985)
独立(自由)集合族	$\surd$	?
階数関数	$\surd$	Dietrich (1989)
サーキット族	$\surd$	Dietrich (1986)
貪欲算法	$\surd$	Andrew-Faigle (1990)
極小全域集合	$\surd$	Edelman-Jamison (1985)
極大独立(自由)集合族	$\surd$	?
端点演算子	A (2002)	Koshevoy (1999), A (2001)

閉包空間

X を有限集合とする．写像 $\tau\colon 2^X \to 2^X$ が，以下の３条件

(C1) $\forall A \subseteq X\colon A \subseteq \tau(A)$. (Extensionality)

(C2) $\forall A, B \subseteq X\colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$. (Monotonicity)

(C3) $\forall A \subseteq X\colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$. (Idempotence)

を満足するとき，(X, τ) を**閉包空間**と呼ぶ．

マトロイドは交換公理を満たす閉包空間であり，凸幾何は反交換公理と $\tau(\emptyset) = \emptyset$ を満たす閉包空間である．

閉包空間の閉集合

Proposition 1: 閉包空間(X,τ)に対して，$\mathcal{L} \subseteq 2^X$を

$$\mathcal{L} = \{A \mid A \in 2^X, \tau(A) = A\}$$

で定義すると，

(A1) $X \in \mathcal{L}$.

(A2) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$.

□

$\mathcal{L}$の元を**閉集合**と呼ぶ.

例:

- (X,τ)がマトロイドのときは，閉集合= フラット (部分空間).
- (X,τ)が凸シェリングのときは，閉集合= “凸集合”.
- (X,τ)がポセット・シェリングのときは、閉集合=イデアル.

逆に,

(A1) $X \in \mathcal{L}$.

(A2) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$.

を満足する集合族$\mathcal{L} \subseteq 2^X$が与えられたとき, $\tau_{\mathcal{L}}\colon 2^X \to 2^X$を

$$\tau_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap\{C \mid A \subseteq C \in \mathcal{L}\} \quad (A \subseteq X)$$

で定義する. (つまり, $\tau_{\mathcal{L}}(A)$はAを含む最小の閉集合.)

Proposition 2: $\tau_{\mathcal{L}}$は閉包演算子である. 即ち, $\tau := \tau_{\mathcal{L}}$は(C1)–(C3)を満足する. つまり, $(X, \tau_{\mathcal{L}})$は閉包空間. さらに, $\tau_{\mathcal{L}}$の閉集合は$\mathcal{L}$. □

端点演算子ex

(X,τ)を閉包空間とする．ex: $2^X \to 2^X$を

$$\mathrm{ex}(A) = \{p \mid p \in A, p \notin \tau(A-p)\} \quad (A \subseteq X)$$

で定義し，(X,τ)の**端点演算子**と呼ぶ．$p \in \mathrm{ex}(A)$は，Aの**端点**と呼ばれる．

例:

- (X,τ)がマトロイドのときは，Aの端点 $=$ Aのisthmuses.
- (X,τ)が凸シェリングのときは，A端点$=$ conv(A)の端点.
- (X,τ)がポセット・シェリングのときは，Aの端点 $=$ Aの中で極大なもの.

一般に，$A \neq \emptyset$でもex$(A) = \emptyset$となることもある．端点演算子は，閉包演算子の逆関数みたいなものである．

Free subsets (自由集合)

(X, τ)を閉包空間とする.

$A \subseteq X$は, $\mathrm{ex}(A) = A$のとき**自由**と呼ばれる.

例:

- (X, τ)がマトロイドのときは, 自由集合 $=$ 独立集合.
- (X, τ)が凸シェリングのときは, 自由集合$=$ 端点集合.
- (X, τ)がポセット・シェリングのときは, 自由集合 $=$ 反鎖 (antichain).

閉包空間の端点演算子の性質

Proposition 3 (Chernoff性): $A \subseteq B \subseteq X$ならば，$\mathrm{ex}(B) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(A)$である．□

Lemma 4 (A (2001)): (X, τ)を閉包空間とする．各$A \subseteq X$に対して，Aの端点$\mathrm{ex}(A)$は，

$$\mathrm{ex}(A) = \bigcap\{B \mid B \subseteq A, \tau(B) = \tau(A)\}.$$

と書ける．□

閉包空間の端点演算子による公理系

Proposition 5: (X,τ) を閉包空間とすると，その端点演算子 $\mathrm{ex}\colon 2^X \to 2^X$ は，以下の (Ex1)–(Ex3) を満足する．

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A.$ (Intensionality)

(Ex2) $A \subseteq B \subseteq X \Longrightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A).$ (Chernoff property)

(Ex3) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin A$:
$(p \notin S(A \cup p), q \in S(A \cup q)) \Longrightarrow q \in S(A \cup p \cup q).$

Theorem 6: 写像 $S\colon 2^X \to 2^X$ に対して，(Ex1)–(Ex3) が成り立つとする．$\tau\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau_S(A) = A \cup \{p \mid p \notin A, p \notin S(A \cup p)\} \tag{1}$$

で定義すると，(X,τ_S) は S を端点演算子として持つ閉包空間である．□

Theorem 7 (A (2002)): *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme point operator of a closure space if and only if it satisfies*

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A.$ (Intensionality)

(Ex2) $A \subseteq B \subseteq X \Longrightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A).$ (Chernoff property)

(Ex3) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin A$:
$(p \notin S(A \cup p), q \in S(A \cup q)) \Longrightarrow q \in S(A \cup p \cup q).$

$\square$

マトロイドの端点演算子による公理系

Theorem 8 (A (2001)): *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme point operator of a matroid if and only if it satisfies*

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A.$

(Ex2) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$

(Ex3) $\forall A \subseteq X, \forall p, q \notin A$:
$(p \notin S(A \cup p), q \in S(A \cup q)) \Longrightarrow q \in S(A \cup p \cup q).$

and

(Ex4) $\forall A \subseteq X, \forall p \in X\colon p \in S(A \cup p) \Rightarrow S(A \cup p) \supseteq S(A) \cup p.$

□

凸幾何の端点演算子による公理系

Theorem 9 (A (2001)): *A mapping $S\colon 2^X \to 2^X$ is the extreme point operator of a convex geometry if and only if it satisfies*

(Ex0) $\forall p \in X\colon S(\{p\}) = \{p\}$. (Singleton Identity)

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A$.

(Ex2) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$

and

(Ex5) $\forall A, B \subseteq X\colon S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) \subseteq S(B)$.
(Aizerman's Axiom)

□

マトロイドと凸幾何の公理系

公理系	マトロイド	凸幾何
閉包演算子	$\surd$	(定義)
閉集合族	$\surd$	Edelman-Jamison (1985)
独立(自由)集合族	$\surd$	?
階数関数	$\surd$	Dietrich (1989)
サーキット族	$\surd$	Dietrich (1986)
貪欲算法	$\surd$	Andrew-Faigle (1990)
極小全域集合	$\surd$	Edelman-Jamison (1985)
極大独立(自由)集合族	$\surd$	?
端点演算子	A (2002)	Koshevoy (1999), A (2001)

今後の研究課題

- 凸幾何の独立集合族 (free subsets) による特徴付け.
- 閉包空間と greedoid の関係? (exchange system?)