凸幾何の端点演算子による特徴付けについて

筑波大学社会工学系
安藤 和敏

Coma Seminar
2001.5.07

アラインメント

X を有限集合とする．X の部分集合族 $\mathcal{L}$ が，以下の２条件

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{L}$.

(A2) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$.

を満足するとき，$(X, \mathcal{L})$ を **alignment** と呼ぶ．$\mathcal{L}$ の元を**閉集合**と呼ぶ.

アラインメント $(X, \mathcal{L})$ に対して，$\tau_{\mathcal{L}}\colon 2^X \to 2^X$ を

$$\tau_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap \{C \mid A \subseteq C \in \mathcal{L}\} \quad (A \subseteq X)$$

で定義する．つまり，$\tau_{\mathcal{L}}(A)$ は A を含む最小の閉集合.

Proposition 1: $\tau_{\mathcal{L}}$は閉包演算子である． 即ち，$\tau := \tau_{\mathcal{L}}$は以下の *(C1)–(C4)*を満足する．

(C1) $\tau(\emptyset) = \emptyset$.

(C2) $\forall A \subseteq X \colon A \subseteq \tau(A)$.

(C3) $\forall A, B \subseteq X \colon A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$ (Monotonicity).

(C4) $\forall A \subseteq X \colon \tau(\tau(A)) = \tau(A)$ (Idempotence).

□

閉包演算子からアラインメント

逆に

Proposition 2: 閉包演算子$\tau\colon 2^X \to 2^X$が与えられたときに，$\mathcal{L} \subseteq 2^X$を

$$\mathcal{L} = \{A \mid A \in 2^X, \tau(A) = A\}$$

で定義すると$(X, \mathcal{L})$はアラインメントになる．さらに，$\tau_{\mathcal{L}} = \tau$． $\Box$

- 以降は，$\mathcal{L}$が文脈から明らかなときは$\tau_{\mathcal{L}}$の代りにτと書いたりする．

<u>例</u>

- 有限集合 $X \subseteq \mathbf{R}^n$.

$$\tau(A) = \mathsf{conv.hull}(A) \cap X \quad (A \subseteq X).$$

$$\mathcal{L} = \text{“凸集合” 全体}$$

- 有限半順序集合 $P = (X, \preceq)$.

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \{x \mid x \in X, \exists a \in A\colon x \preceq a\} \\ &= A \text{ で生成されるイデアル}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = P \text{ のイデアル全体}.$$

端点演算子

$(X, \mathcal{L})$をアラインメントとする．

- 部分集合$A \subseteq X$に対して，$\tau(S) = \tau(A)$となる$S \subseteq A$を，Aの**spanning set** と呼ぶ．特に，A の極小な spanning set を**基底**と呼ぶ．

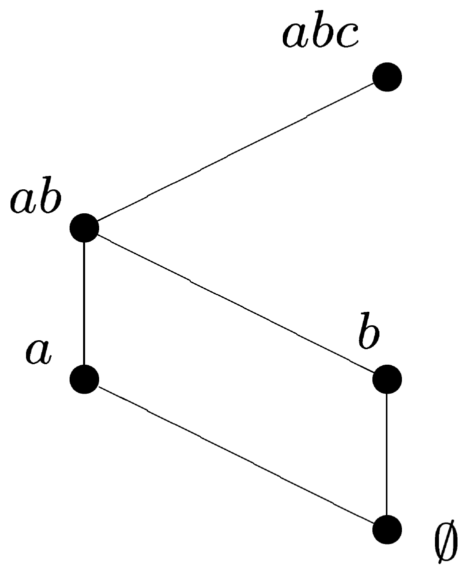
- ex: $2^X \to 2^X$を

$$\mathrm{ex}(A) = \{p \mid p \in A, p \notin \tau(A - p)\} \quad (A \subseteq X)$$

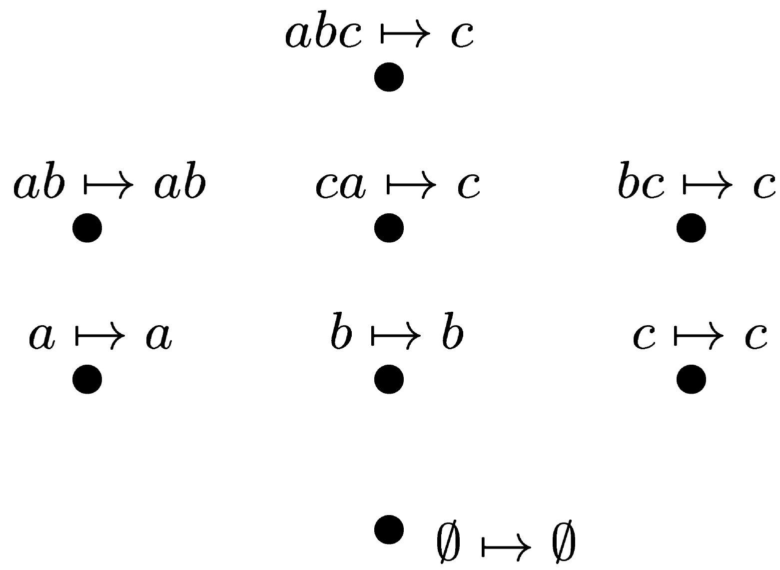
  で定義し，$(X, \mathcal{L})$の**端点演算子**と呼ぶ．$p \in \mathrm{ex}(A)$は，Aの**端点**と呼ばれる．$(X, \mathcal{L})$の端点演算子であることを強調するためにexの代りに$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$と書くこともある．

- $A \subseteq X$は，$\mathrm{ex}(A) = A$のとき**free**と呼ばれる．
  $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ =the free sets of $(X, \mathcal{L})$とする．

Example 3:



$\mathcal{L}$



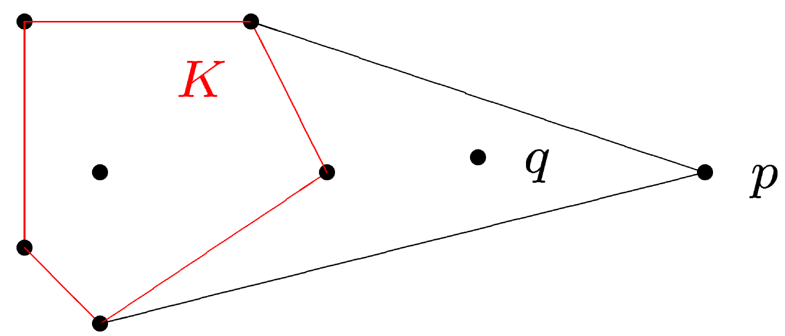
ex: $2^X \to 2^X$

ex$(\mathcal{L}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$である.

凸幾何

アラインメント $(X, \mathcal{L})$ は以下の**反交換公理**

(AE) $\forall K \in \mathcal{L}, \forall p, q \notin K \colon q \in \tau(K \cup p) \Longrightarrow p \notin \tau(K \cup q)$.



を満足するとき，**凸幾何**と呼ばれる．アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるとき，閉集合 $K \in \mathcal{L}$ のことを特に**凸集合**と呼ぶこともある．

Theorem 4 (Edelman and Jamison): アラインメント$(X,\mathcal{L})$が凸幾何であることと以下の全ては同値.

(a) 任意の閉集合$K \neq X$に対して, $K \cup p$が閉であるような$p \in X$が存在する.

(b) 任意の$A \subseteq X$は一意的な基底を持つ.

(c) 任意の閉集合Kに対して, $K = \tau(\mathrm{ex}(K))$ (有限Minkowski-Krein-Milman性).

(d) 任意の閉集合Kと$p \notin K$に対して, $p \in \mathrm{ex}(\tau(K \cup p))$.

結果

Theorem 5: アラインメント$(X, \mathcal{L})$が凸幾何であることと以下の全ては同値.

(1) *Minkowski-Krein-Milman* 性の逆: $\forall A \subseteq X$: $\mathrm{ex}(\tau(A)) = \mathrm{ex}(A)$.

(2) $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が全単射.

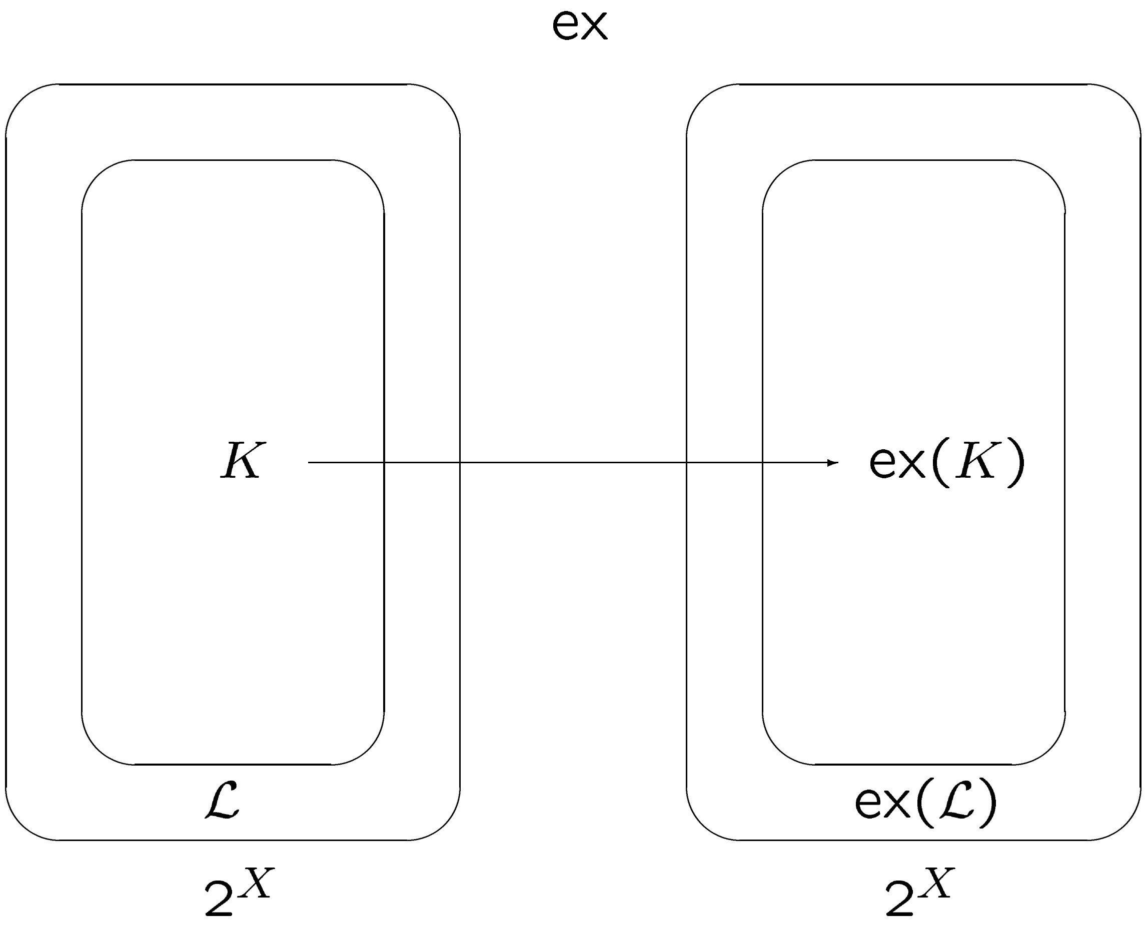
(3) `PI`: $\forall A, B \subseteq X$: $\mathrm{ex}(A \cup B) = \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A) \cup \mathrm{ex}(B))$.

(4) `Aizerman`: $\forall A, B \subseteq X$: $\mathrm{ex}(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(B)$.

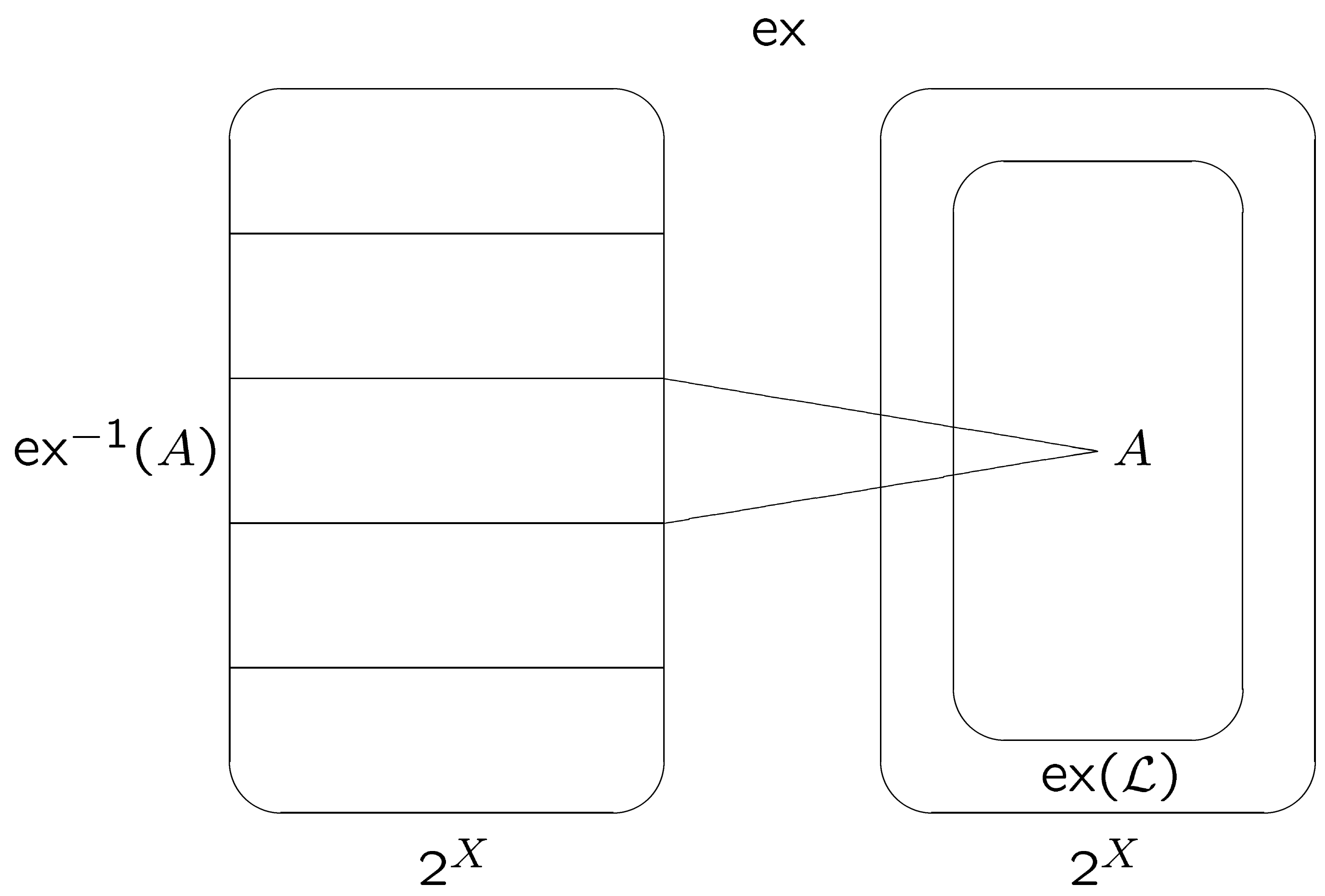
(5) 各$A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$に対して, $\mathrm{ex}^{-1}(A)$が区間である.

□

特徴付け（2）— $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}\colon \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が全単射 —



特徴付け (5) — $\mathrm{ex}^{-1}(A)$が区間 —



Koshevoy の端点演算子の特徴付けの別証

Theorem 6 (ほとんど Koshevoy): *A mapping* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme operator of a convex geometry if and only if it satisfies*

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A$.

(Ex2) $\forall p \in X\colon S(\{p\}) = \{p\}$.

(Ex3) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$ (Chernoff).

and

(`Aizerman`) $\forall A, B \subseteq X\colon S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) \subseteq S(B)$.

□

アラインメントの端点演算子に関係する諸命題

Proposition 7: $A \subseteq X$ が閉であるための必要十分条件は，任意の $p \notin A$ に対して $p \in \mathrm{ex}(A \cup p)$ となることである．

(Proof) (十分性:) A を閉とする．$p \notin A$ ならば，$\tau((A \cup p) - p) = \tau(A) = A \not\ni p$. よって，$p \in \mathrm{ex}(A \cup p)$.

(必要性:) 任意の $p \notin A$ に対して，$p \in \mathrm{ex}(A \cup p)$ とする．すると，$p \notin A$ ならば $p \notin \tau((A \cup p) - p) = \tau(A)$. 即ち，$\tau(A) \subseteq A$. □

Proposition 8 (Edelman and Jamison): $A \subseteq X$として，$B \subseteq A$をAの任意の *spanning set* とするとき，$\mathrm{ex}(A) \subseteq B$.

(Proof) BをAの基底として，pをAの端点とする．もし，$p \notin B$であれば，$B \subseteq A - p$であるから，$\tau(B) \subseteq \tau(A-p) \subsetneq \tau(A)$．これは，$B$が$A$の基底ということに反する．□

Proposition 9 (Chernoff性; 柏原-岡本 for cg): $A \subseteq B \subseteq X$ならば，$\mathrm{ex}(B) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(A)$である．

(Proof) $p \in \mathrm{ex}(B) \cap A$ならば，$p \notin \tau(B-p)$である．さらに$\tau(A-p) \subseteq \tau(B-p)$であるから，$p \notin \tau(A-p)$．□

Proposition 10 (柏原-岡本 for cg): Kを閉集合とするとき, pがKの端点であるための必要十分条件は$K-p$が閉になることである.

(Proof) (必要性:) $p \in K$をKの端点とする. $\tau(K-p) \subseteq K-p$を示せば良い. $\tau(K-p) \subseteq \tau(K) = K$. また$p$は端点であるから, $p \notin \tau(K-p)$. よって, $\tau(K-p) \subseteq K-p$.

(十分性:) これは明らか. □

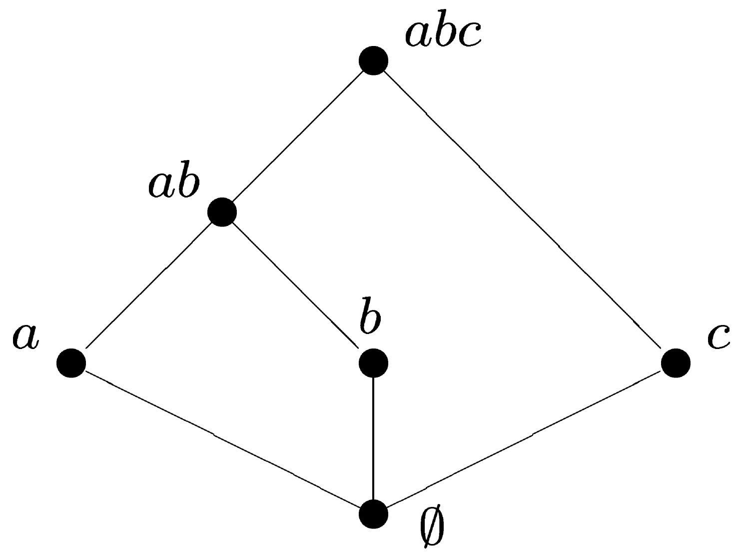
Lemma 11: 任意の $A \subseteq X$ に対して，$\mathrm{ex}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}(A)$.

(Proof) $p \in \mathrm{ex}(\tau(A))$ とすると，$p \notin \tau(\tau(A) - p)$.

$$A - p \subseteq \tau(A) - p \ \Rightarrow \tau(A - p) \subseteq \tau(\tau(A) - p)$$

ゆえに，$p \notin \tau(A - p)$. また $p \in \tau(A)$ であるから，$A \neq A - p$, 即ち，$p \in A$ でないといけない．よって，$p \in \mathrm{ex}(A)$. $\square$

Remark 12: 例えば，下図で表されるようなアラインメント$(X, \mathcal{L})$を考えよう．ここで，$X = \{a, b, c\}$，$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$である．



$\mathcal{L}$

$A = \{a, c\}$とすると，$\mathrm{ex}(A) = \{a, c\}$であるのに対して，$\tau(A) = \{a, b, c\}$であるので，$\mathrm{ex}(\tau(A)) = \{c\}$となるので，$\mathrm{ex}(\tau(A)) \subsetneq \mathrm{ex}(A)$ である．

Theorem 13: アラインメント$(X, \mathcal{L})$が凸幾何であるための必要十分条件は，任意の$A \subseteq X$に対して $\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\tau(A))$ となることである．

(Proof) 補題 11によって，一般に$\mathrm{ex}(A) \supseteq \mathrm{ex}(\tau(A))$である．もし，$\mathcal{L}$が凸幾何であるならば定理4(c) によって，$\mathrm{ex}(\tau(A))$は$A$の spanning set であるから，命題 8より$\mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(\tau(A))$.

逆に$\mathcal{L}$が凸幾何でないとする．定理 4(d)によって，ある閉集合Kと$p \notin K$が存在して，$p \notin \mathrm{ex}(\tau(K \cup p))$．ところが，命題 7によって，$p \in \mathrm{ex}(K \cup p)$であるから，$\mathrm{ex}(K \cup p) \supsetneq \mathrm{ex}(\tau(K \cup p))$．□

Corollary 14: アラインメント$(X,\mathcal{L})$が凸幾何であるための必要十分条件は，任意の$A \subseteq X$に対して $\tau(A) = \tau(\mathrm{ex}(A))$ となることである．

(Proof) 十分性は定理 4(c) より従う． 必要性を証明するために，$\mathcal{L}$が凸幾何として，$A \subseteq X$を任意とする． 定理 4(c) と定理 13によって，$\tau(A) = \tau(\mathrm{ex}(\tau(A))) = \tau(\mathrm{ex}(A))$ である．$\square$

凸幾何の端点集合の族

Proposition 15 (Idempotency): $(X, \mathcal{L})$をアラインメントとする．任意の$A \subseteq X$に対して，$\mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A)) = \mathrm{ex}(A)$.

(Proof) $\mathrm{ex}(A) \subseteq A$であるから，命題 9によって$\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(A) \cap \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A))$. □

$(X, \mathcal{L})$をアラインメントとする．$\mathrm{ex}(\mathcal{L}) \subseteq 2^X$を

$$\mathrm{ex}(\mathcal{L}) = \{ A \mid A \subseteq X, \mathrm{ex}(A) = A \}$$

と定義する． 命題 15によって，写像$\mathrm{ex}\colon 2^X \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は，well-defined である.

Theorem 16: アラインメント$\mathcal{L}$が凸幾何であれば，$\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が全単射となる．

(Proof) 定理 13によって，$\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\tau(A))$である．したがって，$\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}$が全射であることは明らか．

$K, K' \in \mathcal{L}$かつ$\mathrm{ex}(K) = \mathrm{ex}(K')$ならば MKM性（定理 4(c)）によって$K = \tau(\mathrm{ex}(K)) = \tau(\mathrm{ex}(K')) = K'$. □

Corollary 17: アラインメント$(X, \mathcal{L})$が凸幾何であるならば，各$\emptyset \neq A \subseteq X$に対して$\mathrm{ex}(A) \neq \emptyset$となる．

(Proof) $(X, \mathcal{L})$ を凸幾何であるとする．$A \subseteq X$とする．$\mathrm{ex}(A) = \emptyset$ならば，系 14によって，$\mathrm{ex}(\tau(A)) = \emptyset$. さらに，定理 16によれば，$\tau(A) = \emptyset$ であるから，τの単調性によって$A = \emptyset$. □

定理 16の逆も言える．

Theorem 18: $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が一対一対応であるならば，$(X, \mathcal{L})$は凸幾何である．

(Proof) $\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$が一対一対応であるとする． もし，$(X, \mathcal{L})$が凸幾何でないのならば定理 4(c) によって，ある閉集合$K \in \mathcal{L}$が存在して，$K \supsetneq \tau(\mathrm{ex}(K))$ となる．Kとして，そのような閉集合のうちで$\mathrm{ex}(K)$が極大なものを選ぼう．

BをKのある基底とすると，$\mathrm{ex}(K)$はKを張れないから$B \supsetneq \mathrm{ex}(K)$である．さらに，$B \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$である． なぜならば$b \in B$とすると，$B$は$K$の極小な spanning set であるから, $\tau(B-b) \subsetneq K = \tau(B)$．したがって, $b \notin \tau(B-b)$ だからである．$\mathrm{ex}|_{\mathcal{L}}$が全単射であるから, ある$K \neq L \in \mathcal{L}$が存在して$B = \mathrm{ex}(L)$となる．ところが，$K$の選び方から$L = \tau(\mathrm{ex}(L)) = \tau(B) = K$．これは矛盾である．□

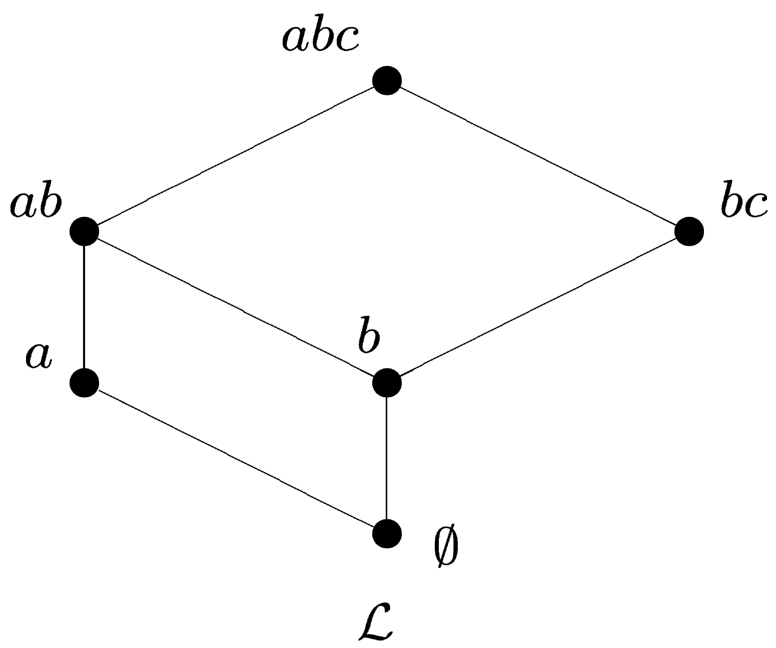
したがって，以下の系を得る．

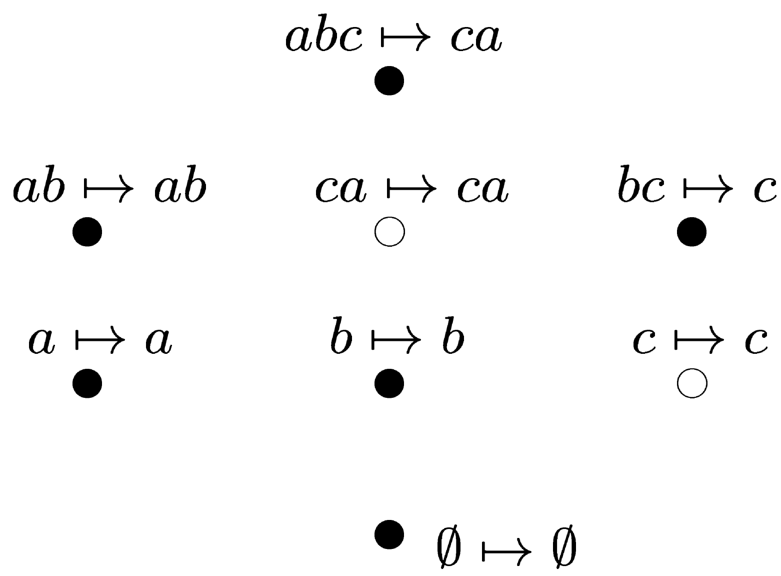
Corollary 19: アラインメント $(X, \mathcal{L})$ が凸幾何であるための必要十分条件は，$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}} \colon \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が全単射となる事である．$\square$

Proposition 20 (柏原-岡本 for cg): $\mathcal{L}$をアラインメントとする．$A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$かつ$B \subseteq A$ならば$B \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$.

(Proof) $A = \mathrm{ex}(A)$とする． 命題9により，$B = B \cap A = B \cap \mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(B)$．また，$\mathrm{ex}(B) \subseteq B$は定義から明らか．$\square$

Example 21: 下のハッセ図で示されるアラインメント (実際, 凸幾何) $(X, \mathcal{L})$ を考える. $X = \{a, b, c\}, \mathcal{L} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ である.





ex: $2^X \to 2^X$

端点演算子からアラインメントを得ること

Proposition 22: 任意のアラインメントに対して，$S = \mathrm{ex}\colon 2^X \to 2^X$は，以下の *(Ex1)–(Ex3)*を満足する.

(Ex1) $\forall A \subseteq X\colon S(A) \subseteq A$.

(Ex2) $\forall p \in X\colon S(\{p\}) = \{p\}$.

(Ex3) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow S(B) \cap A \subseteq S(A)$ (Chernoff 性).

(Proof) (Ex1)は自明. (Ex2)も定義から明らか. (Ex3)は命題 9による. □

Proposition 23: (Ex1) *and* (Ex3) *imply the following*

(Ex4) $\forall A \subseteq X \colon S(A) = S(S(A))$ (Idempotence).

(Proof) (Ex1)によって$S(S(A)) \subseteq S(A)$. 逆の包含関係を示したい. (Ex1)によって$S(A) \subseteq A$であるから, (Ex3)によって$S(A) = S(A) \cap S(A) \subseteq S(S(A))$. $\Box$

Proposition 24 (Moulin): *Chernoff* (Ex3) *is equivalent to any one of the followings four conditions provided that* (Ex1) *holds.*

(Ex3a) $\forall A, B \subseteq X\colon S(A \cup B) \subseteq S(S(A) \cup B)$.

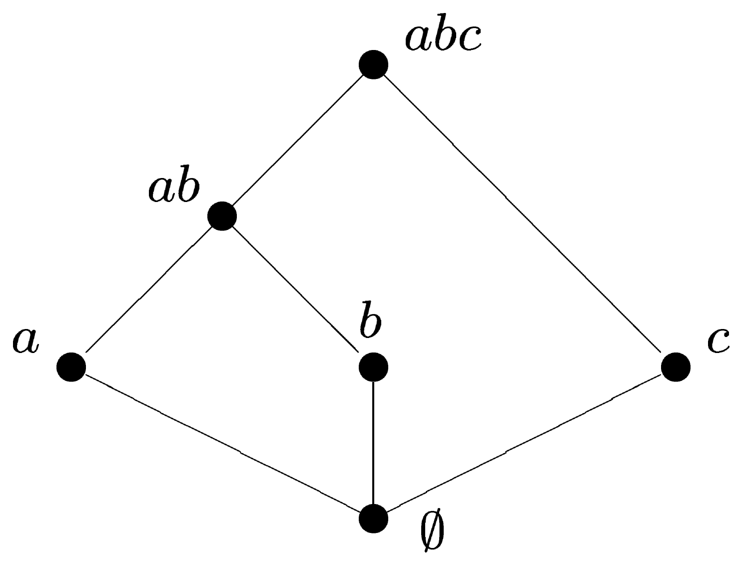
(Ex3b) $\forall A, B \subseteq X\colon S(A \cup B) \subseteq S(S(A) \cup S(B))$.

(Ex3c) $\forall A, B \subseteq X\colon S(A \cup B) \subseteq S(A) \cup S(B)$.

(Ex3d) $\forall A, B \subseteq X\colon S(A \cup B) \subseteq S(A) \cup B$.

$\square$

Remark 25: The reverse inclusion, say (Ex3c), does not hold in general. Consider the alignment $(X, \mathcal{L})$ in Remark 12. For $A = \{a\}$ and $B = \{b, c\}$ we have ex$(A) = \{a\}$ and ex$(B) = \{b, c\}$ but ex$(A \cup B) =$ ex$(\{a, b, c\}) = \{c\}$.



$\mathcal{L}$

Theorem 26: 写像$S\colon 2^X \to 2^X$に対して，(Ex1)–(Ex3)が成り立つとする．$\mathcal{L} \subseteq 2^X$を

$$\mathcal{L} = \{A \mid A \subseteq X, \forall p \in X - A\colon p \in S(A \cup p)\} \tag{1}$$

で定義すると，$(X, \mathcal{L})$はアラインメントになる．さらに，任意の$K \in \mathcal{L}$に対して$S(K) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(K)$であるが，一般に$S \supseteq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$である．

(Proof) (前半:) $X \in \mathcal{L}$は自明に成り立つ．(Ex2)によって，任意の$p \in X$に対して$p \in S(\{p\})$であるから，$\emptyset \in \mathcal{L}$である．したがって，(A1)は示された．(A2)を示そう．

$A, B \in \mathcal{L}$とする．$p \in X - (A \cap B)$を考えよう．$p \in X - A$または$p \in X - B$であるから，$\mathcal{L}$の定義より，$p \in S(A \cup p)$または$p \in S(B \cup p)$である．(Ex3)を，$(A \cap B) \cup p \subseteq A \cup p$ と $(A \cap B) \cup p \subseteq B \cup p$に対して適用すると，$p \in S(A \cup p) \cap ((A \cap B) \cup p)$または$p \in S(B \cap p) \cap ((A \cap B) \cup p)$であるから，$p \in S((A \cap B) \cup p)$が得られる．したがって，$A \cap B \in \mathcal{L}$である．

(後半:) 最初に任意の $A \subseteq X$ に対して，$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq S(A)$ であることを示そう．$p \in \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A)$ とすると，$p \in A$ かつ $p \notin \tau(A-p)$．$\tau(A-p) \in \mathcal{L}$ であるから，

$$\forall q \notin \tau(A-p) \colon q \in S(\tau(A-p) \cup q).$$

$p \notin \tau(A-p)$ であるから，$p \in S(\tau(A-p) \cup p)$．$A \subseteq \tau(A-p) \cup p$ かつ $p \in A$ であるから，(Ex3) によって $p \in S(A)$．

$K \in \mathcal{L}$ とする．$S(K) \subseteq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(K)$ を示すためには，命題 10 によって，任意の $p \in S(K)$ に対して $K-p \in \mathcal{L}$ という事を示せば良い．$p \in S(K)$ としよう．

$q \notin K-p$ とする．もし $q \neq p$ ならば $q \notin K$ であるから，$K \in \mathcal{L}$ という事によって，$q \in S(K \cup q)$ である．ところで，$K-p \cup q \subseteq K \cup q$ であるから，S に対する Chernoff 性により，

$$q \in S(K \cup q) \cap (K-p \cup q) \subseteq S(K-p \cup q).$$

もし $q = p$ であるのなら，$q = p \in S(K) = S(K-p \cup q)$．ゆえに，$K-p \in \mathcal{L}$．
□

Remark 27: 残念ながら，一般に $S \neq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ である．下図で示される $S\colon 2^X \to 2^X$ を考えよう．これは，前の例 21 の ex を用いて，

$$S(A) = \begin{cases} \{c\} & \text{if } A = X, \\ \mathrm{ex}(A) & \text{otherwise} \end{cases}$$

と書ける．S が Chernoff を満足する事を見るためには，任意の $A \neq X$ に対して，$S(X) \cap A \subseteq S(A)$ を見れば良い．ex は Chernoff を満すから，

$$S(X) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(X) \cap A \subseteq \mathrm{ex}(A) = S(A).$$

他の公理 (Ex1)–(Ex2) は明らかに満している．

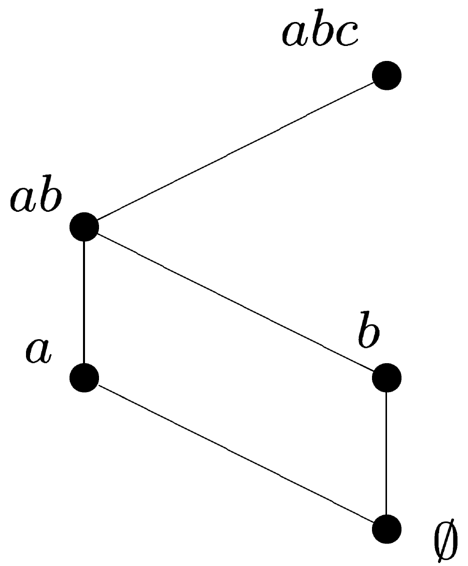
$abc \mapsto c$

$S\colon 2^X \to 2^X$ $\quad ab \mapsto ab \quad ca \mapsto ca \quad bc \mapsto c$

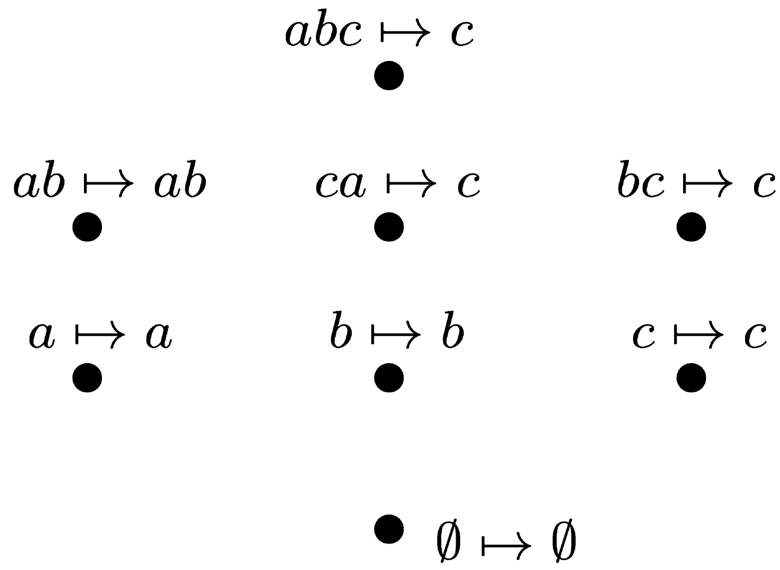
$a \mapsto a \quad b \mapsto b \quad c \mapsto c$

$\emptyset \mapsto \emptyset$

この S から (1) で $\mathcal{L}$ を定義すると，左の図が得られる．この $\mathcal{L}$ から $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ を計算すると，



$\mathcal{L}$



$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}\colon 2^X \to 2^X$

右図となるが，$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(\{c,a\}) \subsetneq S(\{c,a\})$ である．

凸幾何の ex 演算子による特徴付け

Theorem 28 (Koshevoy): *Suppose that an alignment* $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry. Then,* $S := \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$ *satisfies following condition.*

(PI) $\forall A, B \subseteq X \colon S(A \cup B) = S(S(A) \cup S(B))$.

□

Let us consider the following condition.

(**Aizerman**) $\forall A, B \subseteq X \colon S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) \subseteq S(B)$.

Proposition 29 (see e.g. Moulin): **Aizerman** *is eqivalent to the following* **Aizerman'** *provided that* $S(S(A)) = S(A)$ *for every* $A \subseteq X$.

(**Aizerman'**) $\forall A, B \subseteq X \colon S(B) \subseteq A \subseteq B \Rightarrow S(A) = S(B)$.

$\square$

Theorem 30 (Aizerman and Malishevski): *Suppse that (Ex1) holds. Then,*

$$\mathtt{PI} \Longleftrightarrow \mathtt{Chernoff} + \mathtt{Aizerman}.$$

□

Theorem 31: *An alignment* $(X, \mathcal{L})$ *is a convex geometry if and only if* ex: $2^X \to 2^X$ *satisfies* **Aizerman**.

(Proof) Suppose that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. Then, it follows from Theorem 28 and Theorem 30 that ex safisfies **Aizerman**.

Conversely, suppose that ex safisfies **Aizerman**. Since we have $\mathrm{ex}^2 = \mathrm{ex}$ by Proposition 23, we have **Aizerman'** by Proposition 29. Let $A \subseteq X$ be arbitrary. We have from Lemma 11 that $\mathrm{ex}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}(A) \subseteq \tau(A)$. Then, by **Aizerman** we have $\mathrm{ex}(A) = \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A)) = \mathrm{ex}(\tau(A))$. It thus follows from Theorem 13 that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. □

Theorem 32: *Suppose that $S\colon 2^X \to 2^X$ satisfies* (Ex1)–(Ex3) *and* **`Aizerman`**. *Define $\mathcal{L} \subseteq 2^X$ by (1). Then, $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry and we have $S = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$.*

(Proof) 定理 26によって, $\mathcal{L}$はアラインメント, $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}} \subseteq S$, かつ, 任意の$K \in \mathcal{L}$に対して, $S(K) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(K)$である事に注意しておく.

最初に, $\mathcal{L}$が凸幾何という事を示す. $A \subseteq X$を任意とする. 定理 26と補題 11によって,

$$S(\tau(A)) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(\tau(A)) \subseteq \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq \tau(A).$$

上式に **`Aizerman`** を適用すると, $S(\tau(A)) = S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A))$.

$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq S(A)$が示されたわけであるが, (Ex3)と(Ex1)によって,

$$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \cap S(A) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \cap S(S(A)) \subseteq S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A)).$$

(Ex1)を用いて, $\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A))$.

したがって,

$$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = S(\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A)) = S(\tau(A)) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(\tau(A)). \tag{2}$$

定理 13によって, $\mathcal{L}$ は凸幾何である.

次に, $S = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}$を示す. 式(2)と定理 26によって,

$$S(\tau(A)) = \mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) \subseteq S(A) \subseteq \tau(A).$$

これに **Aizerman** を適用すると,

$$\mathrm{ex}_{\mathcal{L}}(A) = S(\tau(A)) = S(S(A)) = S(A).$$

□

Koshevoy の結果との比較

Corollary 33: *A mapping $S\colon 2^X \to 2^X$ is the extreme operator of a convex geometry if and only if S satisfies (Ex1)–(Ex3) and (Ex6). Furthermore, a convex geometry is uniquely determined by its extreme operator.* □

関数$S\colon 2^X \to 2^X$は, 以下の(C1)–(C2)を満足するとき**選択関数**と呼ばれる.

(C1) $S(\emptyset) = \emptyset$.

(C2) $\emptyset \neq S(A) \subseteq A \quad (\emptyset \neq A \subseteq X)$.

Koshevoy の結果は，上と同値な

Corollary 34 (Koshevoy): *A choice function* $S\colon 2^X \to 2^X$ *is the extreme operator of a convex geometry if and only if* S *satisfies Path Independence.* □

Remark 35: Koshevoy は，選択関数 $S\colon 2^X \to 2^X$ が与えられたとき，

$$\bar{S}(A) = \bigcup\{A' \mid A \subseteq X, S(A') = S(A)\} \quad (A \subseteq X)$$

で $\bar{S}\colon 2^X \to 2^X$ を定義して，もし S が `Path Independence` を満足するならば，$\bar{S}$ が，ある凸幾何の閉包演算子であることを示した．

凸幾何は端点演算子によって一意に決定される．もし S が `PI` を満たすのであれば，Koshevoy の結果も A の結果も同一の凸幾何を与える．

よって，我々の結果 (定理 32) と Koshevoy の結果は同じ結論を導きだすが，途中の経過が違うので互いに補完し合うものである．

Remark 36: Chernoff を満足する一般の S に対して，A の結果は必ずアラインメントを与えるに対して $\bar{S}$ は閉包演算子にならない．注意 27 の例を見てみよう．$\bar{S}(\{c\}) = \{a,b,c\} \not\subseteq \{c,a\} = \bar{S}(\{c,a\})$ である．

$$abc \mapsto c$$

$$ab \mapsto ab \qquad ca \mapsto ca \qquad bc \mapsto c$$

$$a \mapsto a \qquad b \mapsto b \qquad c \mapsto c$$

$$\emptyset \mapsto \emptyset$$

$$S\colon 2^X \to 2^X$$

One More Characterization

For an alignment $(X, \mathcal{L})$ and $A \in \text{ex}(\mathcal{L})$, let us consider family $\text{ex}^{-1}(A)$. If $B \in \text{ex}^{-1}(A)$, then we have $A = \text{ex}(B) \subseteq B$. Hence, $\text{ex}^{-1}(A)$ has a minimum element A.

Theorem 37 (Dean and Johnson for "if part"): *An alignment $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry if and only if for each $A \in \text{ex}(\mathcal{L})$ $\text{ex}^{-1}(A)$ is an interval.*

(Proof) ("if" part:) Suppose that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry and let $A \in \text{ex}(\mathcal{L})$. We claim that $\text{ex}^{-1}(A) = [A, \tau(A)]$. Let $B \in \text{ex}^{-1}(A)$. We have shown that $A \subseteq B$. Also, we have from Corollary 14 that $B \subseteq \tau(B) = \tau(\text{ex}(B)) = \tau(A)$. Conversely, suppose that $A \subseteq B \subseteq \tau(A)$. Since we have from Theorem 13 that $A = \text{ex}(\tau(A))$, it follows from (**Aizerman**) that $\text{ex}(B) = A$.

(“only if” part:) Suppose that for each $A \in \text{ex}(\mathcal{L})$ $\text{ex}^{-1}(A)$ is an interval $[A, B]$ for some $B \subseteq X$. We will show that ex satisfies **`Aizerman`**.

Suppose that $\text{ex}(D) \subseteq C \subseteq D$ for $C, D \subseteq X$. Let $A = \text{ex}(D)$. Since $D \in \text{ex}^{-1}(A)$, we have $C \in \text{ex}^{-1}(A)$, i.e., $\text{ex}(C) = A = \text{ex}(D)$.

It follows from Theorem 31 that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. □

Characterization of Distributive Lattices

Theorem 38 (Koshevoy (see also 柏原-岡本)):
Suppose that $(X, \mathcal{L})$ is a convex geometry. Then, $\mathcal{L}$ is a distributive lattice if and only if $S :=$ ex satisfies:

(Expansion) $\forall A, B \subseteq X \colon S(A) \cap S(B) \subseteq S(A \cup B)$.

(Proof) ("only if" part:) Suppose that $\mathcal{L}$ is a distributive lattice. Then, $\mathcal{L}$ is the set of order ideals of a poset $P = (X, \preceq)$ and we have

$$\mathrm{ex}(A) = \{a \mid a \in A,\ \nexists b \in A \colon a \prec b\}.$$

Then, it is easy to see that for each $A, B \subseteq X$ we have $\mathrm{ex}(A) \cap \mathrm{ex}(B) \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{ex}(A) \cup \mathrm{ex}(B))$. Applying **Path Independence** yields **Expansion**.

("if" part:) See [Koshevoy]. □

References

[1] M. A. Aizerman and A. V. Malishevski. General theory of best variants choice: some aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:1030–1040, 1981.

[2] H. Chernoff. Rational choice functions and orderings. *Econometrica*, 22:121–127, 1954.

[3] R. A. Dean and M. R. Johnson. Path independent choice functions and their lattices. Working Paper 1999-2, Department of Economics, Tulane University, July 1999.

[4] P. Edelman and R. Jamison. Theory of convex geometries. *Geometriae Dedicata*, 19:247–270, 1985.

[5] K. Kashiwabara and Y. Okamoto. A greedy algorithm for convex geometries (in Japanese). RIMS Kokyuroku, 1174:179–191, 2000.

[6] G. A. Koshevoy. Choice functions and abstract convex geometry. *Mathematical Social Science*, 38:35–44, 1999.

[7] H. Moulin. Choice functions over a finite set: A summary. *Social Choice Welfare*, 2:147–160, 1985.