磐田南高校キャンパスゼミ

― 配属決定のモデル分析 ―

静岡大学工学部

安藤和敏，甲斐充彦，関谷和之

2006.08.03

クラス編成問題 (導入)

- 通常，大学では「第二外国語」が必修科目であって，新入生は自分の希望にしたがって，スペイン語，ドイツ語，フランス語，中国語，ロシア語，韓国語などのうちの 1科目 (以降ではクラスと呼ぶ) を選択して履修しなければならない．
- ただし，各クラスには定員があり，人気のあるクラスには，履修を希望する学生が集中するため，ある学生は自分の希望通りのクラスを選択することはできないかもしれない．
- 話を簡単にするために以降では，クラスはドイツ語，フランス語，中国語の3科目だけであるとする．

クラス編成問題

- 各学生は，ドイツ語，フランス語，中国語の中から，選択を希望する順に第1志望から第3志望までを申告する．大学側は学生たちの希望をできるだけ適えるように，クラス配属を決定したい．
- 配属は以下の2つの条件を満足しなければならない．

1. 各学生はちょうど1つのクラスに配属されなければならない．
2. 各クラスに配属される学生の数は，そのクラスの定員を超えない．

- このような配属を決定する問題をクラス編成問題と呼ぶ．

クラス編成問題の線型計画モデル

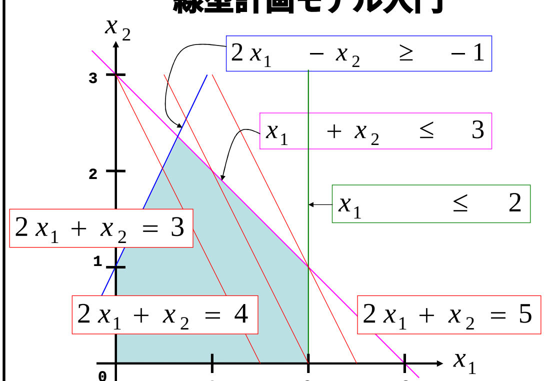
クラス編成問題を線型計画問題としてモデル化して，その問題をコンピュータソフトウェアを用いて解くというのが，本日の講義の目的である．

線型計画モデル入門

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\le -1,\\
x_1 + x_2 &\le 3,\\
x_1 &\le 2,\\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

という条件の下で，$2x_1 + x_2$ を最大化する (x_1, x_2) を求めよ．

線型計画モデル入門



線型計画モデル入門

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &\le -1,\\
x_1 + x_2 &\le 3,\\
x_1 &\le 2,\\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

制約条件

という条件の下で，$2x_1 + x_2$ を最大化する (x_1, x_2) を求めよ.

目的関数

例題

学生の数が5で，各学生が以下のような志望順位を持っているとき，各学生をどのクラスに配属したらよいだろうか？各クラスの定員を2とする.

学生	第1志望	第2志望	第3志望
1	ドイツ語	中国語	フランス語
2	ドイツ語	中国語	フランス語
3	フランス語	中国語	ドイツ語
4	フランス語	ドイツ語	中国語
5	フランス語	中国語	ドイツ語

例題

A：ドイツ語クラス（定員2）
B：フランス語クラス（定員2）
C：中国語クラス（定員2）

学生	第1志望	第2志望	第3志望
1	A	C	B
2	A	C	B
3	B	C	A
4	B	A	C
5	B	C	A

記号の説明

n：学生の総数
i：学生番号　　（$i = 1,2,\cdots,n$）

j：クラス番号　（j = A,B,C）
α_j：クラス j の定員

変数 x_{ij}

$i = 1,\ldots, n$ 及び j = A,B,Cに対して変数 x_{ij} を考える.

x_{ij} のイメージ図（n=5の場合）

x_{ij}

	A	B	C
1	x_{1A}	x_{1B}	x_{1C}
2	x_{2A}	x_{2B}	x_{2C}
3	x_{3A}	x_{3B}	x_{3C}
4	x_{4A}	x_{4B}	x_{4C}
5	x_{5A}	x_{5B}	x_{5C}

変数 x_{ij} の意味

学生 i をクラス j に配属するとき，

$$x_{ij} = 1$$

学生 i をクラス j に配属しないとき，

$$x_{ij} = 0$$

例1

配属 → x_{ij}

学生	クラス
1	A
2	A
3	B
4	C
5	C

	A	B	C
1	1	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	0	1
5	0	0	1

制約条件（1）

各学生はちょうど1つのクラスに配属されなければならない．

全ての学生 i=1,⋯, n について，

$$x_{iA} + x_{iB} + x_{iC} = 1$$

制約条件（1）のイメージ図（n=5の場合）

	A	B	C	行の和
1	x_{1A}	x_{1B}	x_{1C}	1
2	x_{2A}	x_{2B}	x_{2C}	1
3	x_{3A}	x_{3B}	x_{3C}	1
4	x_{4A}	x_{4B}	x_{4C}	1
5	x_{5A}	x_{5B}	x_{5C}	1

制約条件（2）

各クラスに配属される学生の数は，そのクラスの定員を超えない．

全てのクラス j=A,B,C について，

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{nj} \leq \alpha_j$$

制約条件（2）のイメージ図（n=5の場合）

	A	B	C	行の和
1	x_{1A}	x_{1B}	x_{1C}	=1
2	x_{2A}	x_{2B}	x_{2C}	=1
3	x_{3A}	x_{3B}	x_{3C}	=1
4	x_{4A}	x_{4B}	x_{4C}	=1
5	x_{5A}	x_{5B}	x_{5C}	=1
列の和	$\leqq \alpha_A$	$\leqq \alpha_B$	$\leqq \alpha_C$	

演習0

以下の表で与えられる x_{ij} は制約条件(1)，(2)を満足している．この x_{ij} に対応する，各クラスへの学生の配属を示せ．

x_{ij}

	A	B	C
1	1	0	0
2	1	0	0
3	0	0	1
4	0	1	0
5	0	1	0

解答欄

学生	クラス
1	
2	
3	
4	
5	

学生満足度(天下り法)

- 学生が第1志望のクラスに配属されたときは，彼(彼女)の満足度は70
- 学生が第2志望のクラスに配属されたときは，彼(彼女)の満足度は30
- 学生が第3志望のクラスに配属されたときは，彼(彼女)の満足度は0

学生満足度(天下り法)

$$p_{ij} = \begin{cases} 70 & \text{クラス } j \text{ が学生 } i \text{ の第1志望のとき} \\ 30 & \text{クラス } j \text{ が学生 } i \text{ の第2志望のとき} \\ 0 & \text{クラス } j \text{ が学生 } i \text{ の第3志望のとき} \end{cases}$$

学生 i の x_{ij} で決まる配属に対する満足度は，

$$p_{iA}\,x_{iA} + p_{iB}\,x_{iB} + p_{iC}\,x_{iC}$$

となる．

演習1-1

学生の数が5で，各学生が以下のような志望順位を持っているとき，p_{ij} を計算しなさい．

i	第1志望	第2志望	第3志望
1	A	C	B
2	A	C	B
3	B	C	A
4	B	A	C
5	B	C	A

演習1-2

また，x_{ij} が例1のように与えられるときの各学生の満足度，及び，x_{ij} が演習0のように与えられるときの各学生の満足度を計算しなさい．

解答欄

	A	B	C	例1のx_{ij}に対する満足度	演習0のx_{ij}に対する満足度
1	70	0	30	70	70
2	70	0	30	70	70
3	0	70	30	70	30
4	30	70	0	0	70
5	0	70	30	30	70

目的関数（天下り法）

学生 i の満足度

$$p_{iA}x_{iA} + p_{iB}x_{iB} + p_{iC}x_{iC}$$

を全ての学生 $i = 1,\cdots,n$ について足し合わせた

$$\sum_{i=1}^{n}(p_{iA}x_{iA} + p_{iB}x_{iB} + p_{iC}x_{iC})$$

をクラス編成問題の目的関数とする．

クラス編成問題の線型計画モデル（天下り法）

$$x_{iA} + x_{iB} + x_{iC} = 1 (i = 1,\cdots,n)$$

$$x_{1j} + \cdots + x_{nj} \le \alpha_j (j = A, B, C)$$

$$x_{ij} = 0\text{または}1 (i = 1,\cdots,n;\ j = A, B, C)$$

という条件のもとで，

$$\sum_{i=1}^{n}(p_{iA}x_{iA} + p_{iB}x_{iB} + p_{iC}x_{iC})$$

を最大にする $x_{ij} (i = 1,\cdots,n;\ j = A, B, C)$ を求めよ．

演習1-3

学生の数が5で，各学生が以下のような志望順位を持っているとき，クラス編成問題を線型計画問題として定式化せよ．各クラスの定員を2とする．（$\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 2$．）

i	第1志望	第2志望	第3志望
1	A	C	B
2	A	C	B
3	B	C	A
4	B	A	C
5	B	C	A

天下り法の問題点

i	第1志望	第2志望	第3志望
1	A	C	B
2	A	C	B

学生1と学生2は，同じ志望順位をもっている．しかし，
「学生1は，クラスAを強く希望していて，」
「学生2は，クラスAとクラスCはどちらでもよい」
という状況も考えられる．

天下り法では，こうした「志望の強さ」というものが無視されている．

学生満足度（自由配点法）

各学生 i に，

学生 i のクラスAに対する満足度 $q_{iA} \ge 0$，

学生 i のクラスBに対する満足度 $q_{iB} \ge 0$，

学生 i のクラスCに対する満足度 $q_{iC} \ge 0$

を自由に配点してもらう．ただし，q_{iA}, q_{iB}, q_{iC} は以下を満たす0以上の整数とする．

$$q_{iA} + q_{iB} + q_{iC} = 100$$

演習2-1

学生に満足度を自由に配点してもらった結果，q_{ij} が以下のようになったとしよう．

q_{ij}

	A	B	C
1	60	15	25
2	60	0	40
3	0	90	10
4	30	60	10
5	0	60	40

演習2－1 (続き)

x_{ij}が例1のように与えられるときの各学生の満足度，及び，x_{ij}が演習0のように与えられるときの各学生iの満足度

$$q_{iA}x_{iA} + q_{iB}x_{iB} + q_{iC}x_{iC}$$

を計算しなさい．

解答欄

	A	B	C	例1のx_{ij}に対する満足度	演習0のx_{ij}に対する満足度
1	60	15	25	60	60
2	60	0	40	60	60
3	0	90	10	90	10
4	30	60	10	10	60
5	0	60	40	40	60

クラス編成問題の目的関数 (自由配点法)

学生 i の満足度

$$q_{iA}x_{iA} + q_{iB}x_{iB} + q_{iC}x_{iC}$$

を全ての学生 $i = 1,\cdots,n$ について足し合わせた

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(q_{iA}x_{iA} + q_{iB}x_{iB} + q_{iC}x_{iC})}$$

をクラス編成問題の目的関数とする．

クラス編成問題の線型計画モデル (自由配点法)

$$x_{iA} + x_{iB} + x_{iC} = 1 (i = 1,\cdots,n)$$

$$x_{1j} + \cdots + x_{nj} \le \alpha_j \ (j = A, B, C)$$

$$x_{ij} = 0 \text{または} 1 (i = 1,\cdots,n;\ j = A,B,C)$$

という条件のもとで，

$$\sum_{i=1}^{n}(q_{iA}x_{iA} + q_{iB}x_{iB} + q_{iC}x_{iC})$$

を最大にする　$x_{ij}(i = 1,\cdots,n;\ j = A,B,C)$ を求めよ．

演習2-2

学生の数が5で，各学生 i がクラスA, B, Cに対して以下のような満足度を持っているとき，クラス編成問題を線型計画問題として定式化せよ．各クラスの定員を2とする．（$\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = 2$．）

	A	B	C
1	60	15	25
2	60	0	40
3	0	90	10
4	30	60	10
5	0	60	40

クラス編成問題の線型計画モデルについての補足

$$x_{ij} = 0\text{または}1 (i = 1, \cdots, n;\ j = A, B, C)$$

という制約条件は，実は

$$0 \le x_{ij} (i = 1, \cdots, n;\ j = A, B, C)$$

という条件で置き換えることができる．

これを証明するのは，大学で何年か勉強しなければわからないので省略します．